Dr.B.Rummler
Dipl.-Math. V.John
Institut für Analysis und Numerik

Magdeburg,den 30.06.97

Leistungskontrolle: Funktionalanalysis

1. Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{A} \neq \{0_H\}$ ein Unterraum. Was ist der Projektor $P_{\mathcal{A}} : H \mapsto \mathcal{A}$?
   Sei die Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit
   $$x \to \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} x$$
   gegeben.
   a) Man zeige, daß A ein Projektor ist.
   b) Man gebe einen Weg zur Berechnung des Bildes von A an.

   6 Punkte

2. Sei H ein Hilbertraum und $A : H \mapsto H$ ein vollstetiger und selbstadjungierter Operator. Man klassifiziere das Spektrum von A. 4 Punkte

3. Wie lautet der Existenzsatz von Banach zum inversen Operator? 2 Punkte

4. Wie lautet der Rieszsche Darstellungssatz?
   Seien zwei reelle Zahlen $a, b > 0$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung $A : L_2([0, a]) \mapsto \mathbb{R}$, die jeder Funktion $x(t) \in L_2([0, a])$ den Wert
   $$Ax := b \int_0^a x(t)dt$$
   zuordnet. Ist A ein lineares und stetiges Funktional? Welche Norm besitzt A? 6 Punkte

5. Sei H ein Hilbertraum und $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Wir betrachten ein Folge von linearen und beschränkten Operatoren $\{A_n\}$ mit $A_n : H \mapsto \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$. Welche Eigenschaften hat der Grenzwert
   $$A = \lim_{n\to\infty} A_n \quad ?$$

   4 Punkte

6. Seien X, Y Banachräume und $A : X \mapsto Y$ ein Operator. Man definiere folgende Eigenschaften von A :
   a) A ist beschränkt.
   b) A ist vollstetig.

   Man zeige: Ist $A : Y \mapsto Z$ ein vollstetiger Operator und $B : X \mapsto Y$ ein linearer beschränkter Operator, so ist $AB : X \mapsto Z$ ein vollstetiger Operator (X, Y, Z Banachräume). 6 Punkte

Leistungskontrolle bestanden bei mindestens 14 erreichten Punkten!