Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Dr. B. Rummler
Dr. V. John

Übungsaufgaben : Funktionalanalysis

1 Metrische Räume, Eigenschaften von Mengen in metrischen Räumen

1. Man zeige : Ist ρ Metrik eines metrischen Raumes (Ω, ρ), so gilt
$$|\rho(x_1, x_2) - \rho(x_3, x_4)| \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4) \ \forall x_i \in \Omega.$$

2. Sei $\{u_k\}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M, d). Man zeige, daß für jedes $n \geq 2$ die Ungleichung
$$d(u_1, u_n) \leq d(u_1, u_2) + d(u_2, u_3) + \ldots + d(u_{n-1}, u_n)$$
gilt.

3. Man zeige, daß für jede Abstandsfunktion d des metrischen Raumes M gilt
$$|d(u, w) - d(v, w)| \leq d(u, v)$$
für beliebige Elemente u, v, w aus M.

4. Es sei p eine Primzahl. Für jedes ganze $n > 0$ definieren wir $v_p(n)$ als den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von n. Jetzt sei $x = \pm\frac{r}{s}$ eine von Null verschiedene rationale Zahl mit $s, r > 0$. Wir setzen $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$. Für beliebige Paare rationaler Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}$ setzen wir
$$d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}, \quad x \neq y, \quad d(x, x) = 0.$$
Man zeige, daß $d(x, y)$ eine Abstandsfunktion auf der Menge $\mathbb{Q}$ ist (der sogenannte p–adische Abstand).

5. Sei auf $\mathbb{R}$ der Abstand $d(x, y) = |x - y|$ definiert. Sei eine bijektive Abbildung $f = \frac{x}{1+|x|}$ von $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $I = (-1, 1)$ gegeben. Welche Abstandsfunktion wird auf I induziert?

6. Sei M ein metrischer Raum mit einer Abstandsfunktion, welche der ultrametrischen Ungleichung
$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \forall x, y, z \in M$$
genügt. Man zeige:
   - Ist $d(x, y) \neq d(y, z)$, so gilt $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.
   - Jede offene Kugel $K(x, r)$ ist als Menge sowohl offen als auch abgeschlossen. Für jedes $y \in K(x, r)$ gilt $K(y, r) = K(x, r)$.
   - Haben zwei offene Kugeln in M einen gemeinsamen Punkt, so ist eine von ihnen in der anderen enthalten.
   - Der Abstand zweier verschiedener offener Kugeln vom Radius r, die in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius r enthalten sind, ist gleich r.

7. Sei A^0 der innere Kern der Menge A. Man zeige, daß A^0 die größte in A enthaltene offene Menge ist.

8. Sei A, B ein beliebiges Paar von Mengen und $C = A \cap B$. Man zeige, daß $C^0 = A^0 \cap B^0$.

9. Sei M die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Man zeige, daß die Abbildung $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$
$$d(u,v) = \max_{x \in [0,1]} |u(x) - v(x)|, \quad u, v \in M$$
eine Abstandsfunktion ist.

10. Sei M die Menge aller fast überall endlichen, meßbaren Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Man zeige, daß die Abbildung $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$
$$d(u,v) = \int_0^1 \frac{|u(x) - v(x)|}{1 + |u(x) - v(x)|} dx \quad u, v \in M$$
eine Abstandsfunktion ist.

11. Sei M die Menge aller beschränkter Folgen, d.h. wenn $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in M$, dann $\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| < \infty$. Man zeige, daß die Abbildung $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$
$$d(u,v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad \{u_k\}, \{v_k\} \in M$$
eine Abstandsfunktion ist.

12. Man zeige, daß in einem metrischen Raum (Ω, ρ) jede Fundamentalfolge beschränkt ist.
Definition: Eine Menge im metrischen Raum (Ω, ρ) ist beschränkt, wenn sie in einer Kugel $K(x_0, r_0), r_0 < \infty$, liegt.

13. In einem metrischen Raum (M, d) gelte $u_n \to u$ und $v_n \to v$. Man zeige, daß dann auch $d(u_n, v_n) \to d(u,v)$ gilt (Stetigkeit der Abstandsfunktion).

14. Sei (F, d) ein Teilraum des metrischen Raumes (M, d), wobei F dicht in M ist. Man zeige, daß wenn (F, d) ein separabler metrischer Raum ist, dann ist auch (M, d) separabel.

15. Es existiere in dem metrischen Raum (M, d) eine nichtabzählbare Menge $A \subset M$ mit $d(u,v) \geq a > 0$ für beliebige Punkte $u, v \in A$. Man zeige, daß (M, d) nicht separabel ist.
Hinweis: Man nehme an, daß (M, d) separabel ist und die abzählbare Menge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in M ist. Dann betrachte man alle Kugeln $K(x_n, a/2)$ und zeige, daß mindestens eine von diesen Kugeln zwei verschiedene Punkte von A enthält.

16. Man zeige, daß der metrische Raum (M, d) aller beschränkten Folgen mit der Abstandsfunktion
$$d(u,v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M$$
vollständig und nicht separabel ist.
Hinweis: Betrachte alle Folgen mit Elementen u_n gleich 0 oder 1.

17. Man zeige, daß der metrische Raum (M, d) aller konvergenten Folgen mit der Abstandsfunktion
$$d(u,v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M$$
vollständig und separabel ist.
Hinweis: Betrachte alle Folgen mit Elementen $u_n \in \mathbb{Q}$.

18. Man zeige : Sind (Ω_1, ρ_1) und (Ω_2, ρ_2) Vervollständigungen eines metrischen Raumes (Ω, ρ), so sind (Ω_1, ρ_1) und (Ω_2, ρ_2) isometrisch.

19. Sei (a,b) ein endliches Intervall. Man zeige, daß für $q > p \geq 1$ gilt $L^q((a,b)) \subset L^p((a,b))$.

20. Sei (a,b) ein endliches Intervall und $1 \leq p \leq q < \infty$. Man zeige
$$\frac{||f||_{L^p}}{(b-a)^{1/p}} \leq \frac{||f||_{L^q}}{(b-a)^{1/q}} \quad \forall f \in L^q((a,b)).$$

21. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume. Für jedes Paar von Punkten $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ in $M = M_1 \times M_2$ setze man

$$d(u, v) = \max\{(d_1(u_1, v_1), d_2(u_2, v_2)\}.$$

Man beweise, daß die so definiert Abbildung eine Abstandsfunktion ist.

22. Man zeige, daß die Abstandsfunktion $d(u, v)$ auf $M = M_1 \times M_2$ aus Aufgabe 21 gleichmäßig äquivalent zu den Abstandsfunktionen

$$d'(u, v) = d_1(u_1, v_1) + d_2(u_2, v_2)$$

und

$$d''(u, v) = \sqrt{(d_1(u_1, v_1))^2 + (d_2(u_2, v_2))^2}$$

ist.
Definition: Zwei Abstandsfunktionen d' und d'' auf M heißen gleichmäßig äquivalent, wenn die identische Abbildung von (M, d') auf (M, d'') sowie die entsprechende Umkehrabbildung gleichmäßig stetig sind.

23. Man zeige: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

24. Seien F und G zwei kompakte Mengen in (M, d). Man zeige, daß die Menge $A \in \mathbb{R}$

$$A = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda = d(x, y), x \in F, y \in G\}$$

eine kompakte Menge in $\mathbb{R}$ ist.

25. Sei $(\mathbb{Q}, d)$ der metrische Raum aller rationaler Zahlen mit der Abstandsfunktion

$$d(p, q) = |p - q|, \quad p, q \in \mathbb{Q}.$$

Man zeige, daß die Menge $A = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\}$ beschränkt, abgeschlossen, aber nicht kompakt ist.

26. Seien f, g zwei stetige Abbildungen eines metrischen Raumes (M, d) in einen metrischen Raum (M', d'). Man zeige, daß die Menge $A = \{u \in M : f(u) = g(u)\}$ abgeschlossen in M ist.

27. Seien F und G zwei nichtleere Mengen mit $F \cap G = \emptyset$ in einem metrischen Raum (M, d). Man zeige, daß die Funktion

$$f(u) = \frac{d(u, F)}{d(u, F) + d(u, G)}$$

stetig ist, $f(M) \subset [0, 1]$, $f(u) = 0$ äquivalent zu $u \in F$, sowie $f(u) = 1$ äquivalent zu $u \in G$ ist.

28. Sei F eine kompakte Menge, G eine abgeschlossene Menge, $F \cap G = \emptyset$ und $F, G \subset M$ in einem metrischen Raum (M, d). Man zeige, daß $d(F, G) > 0$.

29. Man zeige, daß der Durchschnitt einer beliebigen Anzahl von konvexen Mengen eine konvexe Menge ist.

2 Normierte Räume, Banachräume

1. Sei $G \in E^n$ ein Gebiet. Man zeige, daß $L_\infty(\bar{G})$ ein normierter Raum ist.
Hinweis: Zum Beweis der Normaxiome betrachte man Folgen von Nullmengen $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\bar{G} \setminus E_n} |f(t)| = ||f||_{L^\infty(\bar{G})}.$$

2. Man zeige : Sind B_1 und B_2 Banach – Räume, so bildet ihr direktes Produkt

$$B_1 \times B_2 = \{(x, y) \mid x \in B_1, y \in B_2\}$$

mit der Norm

$$||(x, y)|| = \sqrt{||x||_1^2 + ||y||_2^2}$$

einen Banach – Raum. ($||x||_i$ - Norm von B_i)

3. Es sei $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in einem Banach – Raum mit konvergenter Reihe der Normen $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$. Man zeige : $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert in B und $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

4. Man zeige, daß die Menge aller Nullfolgen einen Unterraum des Banach – Raumes l_∞ bildet.

5. Man weise nach, daß die Funktion $x(t) = |t|$ mit der verallgemeinerten Ableitung $\dot{x}(t) = \operatorname{sgn}(t)$ dem Sobolev – Raum $W^{1,1}[a,b], (a < 0 < b)$, angehört.
Hinweis : Zu zeigen ist die Existenz einer Folge $\{x_k\} \in C^1[a,b]$ mit $x_k \to x$ im Sinne der Konvergenz des $W^{1,1}[a,b]$. Man kann dazu Hyperbelfunktionen nutzen.

6. Eine Menge A des normierten Raumes $(\Omega, ||\cdot||)$ heißt konvex, wenn $\forall x_1, x_2 \in A$ auch sämtliche Elemente der Gestalt $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ sind, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ gilt.
Man zeige : Jede Kugel in Ω ist konvex.

7. Führt man in der Menge der Folgen aus $l^p, 1 \leq p < \infty$ die von l^∞ induzierte Supremumsnorm ein, so ist l^p nicht vollständig.
Hinweis: Man nutze eine Folge von Elementen x_n der Gestalt $x_n = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)$.

3 Skalarprodukt, Hilberträume

1. a) Man zeige, daß in einem unitären Raum die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

gilt. Man deute diese Relation im E^2.
b) In jedem unitären Raum ist

$$||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|.$$

2. Im Hilbertraum $\mathbb{C}^1$ folgt aus $(x,y)_{\mathbb{C}^1} = 0$, daß $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

3. In jedem Raum mit Skalarprodukt gilt

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x + \alpha y|| = ||x - \alpha y|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

wobei $\mathbb{K}$ der Körper ist, über dem der Raum definiert ist.

4. $\tilde{\Omega}$ sei die Menge aller reellwertigen Polynome $x(t)$ auf E^1 und Ω die Menge der Äquivalenzklassen $\tilde{\Omega}/(x : (x,x) = 0)$ mit dem in a) definierten Skalarprodukt.

   a) Man zeige, daß Ω mit dem Skalarprodukt

   $$(y,z) \stackrel{\text{def}}{=} y(-1)z(-1) + y(0)z(0) + y(1)z(1), \qquad y, z \in \Omega,$$

   einen reellen Hilbertraum H bildet.

   b) Wann liegen Polynome in einer Äquivalenzklasse ?

   c) Welche Dimension hat H ?

   d) Man berechne ein vollständiges Orthonormalsystem von H.

5. Man ermittle für den Raum der reellen quadratischen $(2,2)$–Matrizen und den R^4 jeweils eine Norm und eine Abbildung, so daß Isometrie besteht.

6. Man zeige : Ist $(\Omega, (.,.))$ ein unitärer Raum und sind $\{x_k\}, \{y_k\}$ in Ω konvergente Folgen, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (\lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k) = (x,y),$$

d.h. das Skalarprodukt ist stetig.

7. Man zeige: In einem reellen unitären Raum gilt die Umkehrung des pythagoräischen Satzes: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longrightarrow x \perp y$. Im komplexen Fall ist dies falsch (Beispiel)!

8. Es sei $H = L^2(-\pi, \pi)$ der Hilbertraum aller in $(-\pi, \pi)$ quadratisch summierbaren Funktionen. Man zeige, daß die Menge aller geraden Funktionen ($x(t) = x(-t)$ f.ü.), die in H liegen, einen Unterraum von H bildet.

9. Es sei $\{a_i\}$ ein vollständiges ONS von H und x,y beliebige Elemente von H mit Fourierkoeffizienten $\{c_i\}$ bzw. $\{d_i\}$. Man zeige
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{d}_i.$$

10. Gegeben sei der Hilbertraum $H = l^2$. Man zeige, daß die Teilmenge $\mathcal{A}$ aller Folgen der Gestalt
$$x_a = \left\{\frac{a}{i}\right\}_{i=1}^{\infty} \qquad \forall a \in \mathbf{R}^1$$
in H einen Unterraum bildet.

11. Man zeige : Ist $\mathcal{A}$ dicht in einem Hilbertraum H und $x \perp y\ \forall y \in \mathcal{A}$, so folgt $x = 0$.

12. $\hat{\Omega}$ sei die Vervollständigung des unitären Raumes $(\Omega, (.,.))$. Die Folgen $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ mit $x_k, y_k \in (\Omega, (.,.))$ mögen für $k \to \infty$ im Sinne der vom Skalarprodukt $(\{w_k\}_{k=1}^{\infty}.,.)$ erzeugten Metrik gegen $x, y \in \hat{\Omega}$ konvergieren. Man zeige : Mit $(x, y)_{\hat{\Omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k)$ ist in $\hat{\Omega}$ ein Skalarprodukt induziert.

13. Seien $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine orthogonale Basis des Hilbertraumes H und $H_n = \mathcal{L}(\{w_k\}_{k=1}^{n})$ ein endlichdimensionaler Unterraum und P_{H_n} der Projektor nach H_n. Man zeige:
   a) $P_{H_n} x = \sum_{k=1}^{n} (x, w_k) w_k \quad \forall x \in H$,
   b) $P_{H_n} x$ ist die eindeutige Bestapproximation von $x \in H$ in H_n.

14. Man zeige, daß die Räume $L^2((0,1))$ und l^2 isomorph und isometrisch sind.
Hinweis: Man zeige, daß jeder separable Hilbertraum isomorph zu l^2 ist.

15. Sei E ein separabler Hilbertraum und $\{a_n\}$ ein Orthonormalsystem. Man beweise, daß jedes nicht vollständige System $\{a_n\}$ in E vervollständigt werden kann.

16. Es sei $\{a_n\}$ ein Orthonormalsystem des separablen Hilbertraumes E. Man zeige, daß für jedes Element $x \in E$ die k–te Teilsumme der Fourierreihe von x bezüglich $\{a_n\}$ unter allen Linearkombinationen der ersten k Elemente von $\{a_n\}$ die beste Approximation von x liefert.

4 Banachscher Fixpunktsatz

1. Sei $f(x) \in C[a, b]$. Man zeige, daß die Gleichung
$$y(x) + \frac{1}{2} sin(y(x)) + f(x) = 0$$
eine eindeutige Lösung besitzt.

2. Sei $f(x) \in C^1(-\infty, \infty)$ mit
$$0 < c \leq f'(x) \leq d < \infty.$$
Man zeige, daß die Gleichung $f(x) = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt.
Hinweis: Man betrachte den Operator $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ Ax = x - \frac{1}{d} f(x)$.

3. Sei $f(x, y(x)) \in C([a, b] \times (-\infty, \infty))$. Existiere in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}$ die erste partielle Ableitung nach y und gelte
$$0 < c \leq \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \leq d < \infty,\ \forall x \in [a, b].$$
Man zeige, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ eine eindeutige Lösung $y(x) \in C[a, b]$ besitzt.
Hinweis: Man betrachte den Operator $A : C[a, b] \to C[a, b],\ Ay = y(x) - \frac{1}{d} f(x, y(x))$.

4. Mit der Methode der sukzessiven Approximation finde man die Lösung der Integralgleichung

$$x(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 s\,t\,x(t)dt + \frac{5}{6}s.$$

Als Anfangsiterierte nehme man $x_0(s) = 0$.

5. Sei (M,d) ein kompakter metrischer Raum. Sei A ein Operator auf (M,d) mit $W(A) \subset M$ und gelte $d(Au, Av) < d(u,v), \forall u, v \in M$. Man zeige, daß die Gleichung $Au = u$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.
Hinweis: Man beweise die Existenz eines Punktes $u_0 \in M$ mit

$$\inf_{u\in M} d(u, Au) = d(u_0, Au_0).$$

5 Lineare Operatoren

1. Man zeige : Ist A ein homogener oder additiver Operator auf dem Vektorraum D_A, so gilt $A(-x) = -A(x)\ \forall x \in D_A$.

2. Seien E_1 und E_2 zwei normierte Räume und $A : E_1 \to E_2$ ein Operator. Man zeige, daß die folgenden Normdefinitionen äquivalent sind:

   a) Die kleinste Konstante $M < \infty$ für die gilt

   $$||A||_{E_2} \le M||x||_{E_1} \quad \forall x \in D(A)$$

   heißt Norm von $A : ||A|| = M$.

   b)

   $$||A|| = \sup_{x\in D(A), x\neq 0} \frac{||Ax||_{E_2}}{||x||_{E_1}} = \sup_{x\in D(A), ||x||_{E_1}=1} ||Ax||_{E_2} = \sup_{x\in D(A), ||x||_{E_1}\le 1} ||Ax||_{E_2}.$$

3. Man zeige, daß ein linearer beschränkter Operator A dann und nur dann kontraktiv ist, wenn $||A|| < 1$ ist.

4. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Man zeige, daß A präkompakte Mengen auf präkompakte Mengen abbildet.

5. Man beweise, daß der Operator $A : C[0,1] \mapsto C^1[0,1]$

$$x(t) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k\, x\left(\frac{k}{n}\right)$$

ein linearer und stetiger Operator ist, wobei $n \in \mathbf{N}$ fest gewählt ist. Die obigen Polynome heißen Bernstein–Polynome.

6. Es seien X ein normierter Raum, A ein beschränkter linearer Operator von $D_A \subset X$ in den Banachraum Y und D_A dicht in X. Man zeige, daß durch

$$\hat{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

ein in ganz X eindeutiger linearer beschränkter Operator $\hat{A}$ mit $||\hat{A}|| = ||A||$ definiert wird, wobei $\{x_n\} \in D_A$ eine beliebige gegen x konvergente Folge ist. $\hat{A}$ heißt lineare stetige Fortsetzung von A auf X bzw. Abschließung von A.

7. A sei ein beschränkter linearer Operator auf $D_A = \mathcal{A}$ als Unterraum des Hilberraumes H. Man zeige, daß der durch

$$\hat{A}x = A(P_{\mathcal{A}}x) \quad \forall x \in H$$

definierte Operator $\hat{A}$ ein linearer beschränkter Operator ist.

8. A sei ein linearer beschränkter Operator. Man zeige, daß

$$\mathcal{M} = \{M \;:\; \|Ax\| \leq M\|x\| \;\forall x \in X\}$$

abgeschlossen ist und somit $\|A\|$ zu $\mathcal{M}$ gehört.

9. A sei der Operator, der jedem Element $f \in C^1([a, b]]$ sich selbst als Element des $C[(a, b)]$ zuordnet. Man zeige, daß dieser sogenannte Einbettungsoperator von $C^1([a, b]) \to C([a, b])$ linear und beschränkt ist und berechne seine Norm.

10. Man beweise den folgenden Umkehrsatz zum Existenzsatz von Banach : Existiert $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ zu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ dann existiert $m > 0 : \|Ax\| \geq m\|x\| \;\forall x \in X$.

11. Sei $A : l^\infty \to l^\infty$ definiert durch $A(x_1, x_2, x_3 \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Man zeige: A ist injektiv, stetig, nicht surjektiv und $\|A\| = 1$. Der Umkehroperator A^{-1} ist nicht stetig.

12. Man zeige, daß eine schwachkonvergente Folge nur einen Grenzwert besitzen kann.
Hinweis: Man nutze die Folgerung zum Satz von Hahn–Banach.

13. Sei $e_n = 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \in l^2$, wobei die 1 an der n–ten Stelle steht. Man zeige, daß die Folge $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ in l^2 schwach gegen $\mathbf{0}$ konvergiert. Konvergiert diese Folge auch stark gegen $\mathbf{0}$?

14. Man zeige, daß im endlichdimensionalen euklidischen Raum E^n starke und schwache Konvergenz äquivalent sind.

15. Es seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen aus dem normierten Raum E und $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ zwei reelle Zahlenfolgen. Man zeige, daß aus

$$x_n \rightharpoonup x, y_n \rightharpoonup y, \alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta, n \to \infty$$

folgt

$$\alpha_n x_n + \beta_n y_n \rightharpoonup \alpha x + \beta y, n \to \infty.$$

16. Es seien E_1 und E_2 normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Man zeige, daß aus $x_n \rightharpoonup x$, $x, x_n \in E_1$ stets $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in E_2 folgt.

17. Es seien E_1 und E_2 normierte Räume und $\{A_n\}, A_n \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ eine stark konvergente Folge von Operatoren. Man zeige, daß diese Folge auch schwach konvergiert.

18. Seien E_1 und E_2 zwei normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ein Operator. Man zeige, daß die folgenden Definitionen äquivalent sind:

    a) A heißt kompakt oder vollstetig, wenn er die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{K}(0, 1) \subset E_1$ auf eine in E_2 relativ kompakte Menge abbildet.
    b) A heißt kompakt, wenn jede Folge $\{x_n\}, x_n \in E_1, \|x_n\| \leq 1$ eine Teilfolge $\{x_{n_j}\}$ enthält, so daß die Folge $\{Ax_{n_j}\}$ in E_2 konvergiert.

19. Man zeige:

    a) Ist $A : X \to Y$ ein kompakter Operator und $B : Y \to Z$ beschränkt, so ist der Operator $BA : X \to Z$ kompakt.
    b) Ist $A : Y \to Z$ ein kompakter Operator und $B : X \to Y$ beschränkt, so ist der Operator $AB : X \to Z$ kompakt.

20. Man zeige, daß $\bar{K}(0, 1)$ in einem unendlichdimensionalen normierten Raum nicht kompakt ist.

21. Man zeige, daß der Operator $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt, \quad K(s, t) = s^2 t$$

kompakt ist.

22. Es sei E_1 ein normierter Raum, E_2 ein Banach–Raum und $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ein kompakter Operator. Man zeige, daß $W(A)$ separabel ist.

23. Es sei F ein linearer Unterraum des normierten Raumes E und $x_0 \in E$ ein Element, das von F den Abstand $d > 0$ hat, d.h. es gilt $\inf_{x \in F} \|x - x_0\| = d > 0$. Man zeige, daß es ein auf E definiertes lineares Funktional f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in F$, $\|f\| = 1$ und $f(x_0) = d$ gibt.

24. Sei F eine beliebige Teilmenge des normierten Raumes E. Man zeige, daß ein Element $x_0 \in E$ genau dann zum Abschluß von F gehört, wenn für jedes beschränkte lineare Funktional f, das auf F verschwindet, die Gleichung $f(x_0) = 0$ gilt.

25. Sei die Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x \to \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} x$$

gegeben.

a) Man zeige, daß A ein Projektor ist.

b) Man berechne das Bild von A.