

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 15.01.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 13

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 26.01.2010

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man löse folgende Aufgaben:

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Man bestimme die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ an der Stelle $(0,0)$. Ist $f(x, y)$ an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar?

(b) Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

im Nullpunkt unstetig ist, aber Ableitungen in jede Richtung besitzt.

4 Punkte

2. Man löse folgende Aufgaben:

(a) Man berechne die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \cosh(xy) \\ \ln(1+x^2) \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Man bestimme den Gradienten der Funktion

$$g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^m x_i^0 x_i \right)^2.$$

Hierbei ist $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ fest.

4 Punkte

3. (Zustandsgleichung für reale Gase.) Für ein reales Gas mit dem Druck P , dem Molvolumen V_m und absoluter Temperatur T gilt die van der Waalsche Gleichung

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

wobei a, b und R Konstanten sind. Man zeige, daß für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V_m} = -1$$

gilt. Durch "Kürzen" erhält man hier das falsche Ergebnis 1 !!! **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !