Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 11.01.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 12

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 19.01.2010

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Seien $\|\cdot\|_p$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, die in der Vorlesung eingeführten Normen des $\mathbb{R}^n$. Man beweise, dass die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &\leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2, \end{aligned}$$

für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gelten, und zeige, dass die hier auftretenden Konstanten nicht verbessert werden können.
Hinweis: Konstruktion von Beispielen für den zweiten Teil. **4 Punkte**

2. Man untersuche die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^4 + 5x^2y^2 + 3x^2y + xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 > 0, \\ 0 & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

(b)
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Die Stetigkeit im Koordinatenursprung erhält man durch geeignete Abschätzungen von $f(x_1,x_2)$ oder durch Übergang zu Polarkoordinaten.

4 Punkte

3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Man ermittle (falls er existiert) den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in M} f(x,y)$$

(a) für $M = \{t\binom{1}{1},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$,

(b) für $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ y = x^2\}$,

(c) für $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y < x^2\}$.

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !