Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 03.12.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 09

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 15.12.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ Riemann–integrierbar und sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Des Weiteren sei $\varphi(x) : \mathbb{R} \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Funktionen $F_o(x)$ und $F_u(x)$ sind durch

$$F_o(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt, \quad F_u(x) = \int_{\varphi(x)}^b f(t)dt$$

gegeben. Man berechne die erste Ableitung von $F_o(x)$ und $F_u(x)$.
Hinweis: Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung. **4 Punkte**

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Man untersuche die Konvergenz des uneigentlichen Integrales

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(-\ln(x))^\alpha}$$

und berechne gegebenenfalls den Integralwert.
Hinweis: Stammfunktion suchen, dann Fallunterscheidung bezüglich α. **4 Punkte**

3. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann–integrierbar.

   a) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß fg
      - uneigentlich Riemann–integrierbar ist,
      - nicht uneigentlich Riemann–integrierbar ist.

      Konkrete Angabe von a, b, f, g !

   b) Seien f^2 und g^2 ebenfalls uneigentlich Riemann–integrierbar. Man zeige, daß dann fg und $|fg|$ auch uneigentlich Riemann–integrierbar sind.

Hinweis: Nutze für b) Serie 08, Aufgabe 3. **4 Punkte**

4. Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}.$$

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !