Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 13.11.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 06

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 24.11.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man zerlege das Polynom
$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$
in irreduzible Faktoren.
Hinweis: Es existiert eine doppelte Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$
Nun berechne man die Koeffizienten a, b, c, d der Partialbruchzerlegung
$$\frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} = \frac{a}{x - x_0} + \frac{b}{(x - x_0)^2} + \frac{c + dx}{x^2 + \alpha x + \beta}.$$
Die Größen x_0, α, β erhält man aus dem ersten Teil der Aufgabe. **4 Punkte**

2. Man beweise den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, f stetig in $[a, b]$, und $g(x) \geq 0$ in $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$
4 Punkte

3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Desweiteren gebe es einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$. Man zeige, dass dann
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$
Hinweis: Mittelwertsatz. **4 Punkte**

4. Sei $x = 2 \arctan z$. Man zeige
$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1 + z^2}.$$
Mit diesen Beziehungen kann man Winkelfunktionen im Integranden durch rationale Funktionen ausdrücken. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !