Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 08.11.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II

Serie 05

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 17.11.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Es bezeichne $[y]$ den ganzzahligen Anteil von y. Man berechne

$$a)\quad \int_0^1 \frac{[kx]}{k}\,dx,\ k\in\mathbb{N},\qquad b)\quad \int_0^1 \frac{[kx^2]}{k}\,dx,\ k\in\mathbb{N}.$$

   Für $k \in \{1,2\}$ gebe man die konkreten Integralwerte an. **4 Punkte**

2. Seien $f(x) = 1/x$ und $\varepsilon > 0$.
   (a) Ist $f(x)$ in $[\varepsilon, 1]$ integrierbar ? (Begründung !)
   (b) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = 1/k$. Man zerlege

$$\left[\frac{1}{k}, 1\right] = \bigcup_{l=1}^{k-1} \left[\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$$

   und gebe eine Formel für die Untersumme $S_*(f, Z_k)$ bezüglich dieser Zerlegung Z_k an.
   (c) Was lässt sich aus dem Verhalten der Untersummen für

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

   folgern ?

   4 Punkte

3. Aus der Vorlesung ist folgender Sachverhalt bekannt (Satz 3.37): Sind $f(x)$ und $g(x)$ beide Riemann–integrierbar und gilt $f(x) = g(x)$ auf einer dichten Teilmenge $D \subset [a, b]$ für alle $x \in D$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

   Man folgere daraus, dass die Dirichletsche Sprungfunktion in $[0, 1]$ nicht Riemann–integrierbar ist. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !