Kapitel 3

Das Riemann–Integral

Bemerkung 3.1 Motivation. Längen–, Flächen– und Volumenberechnungen, beziehungsweise ganz allgemein Inhaltsberechnungen, sind eine der Haupttriebkräfte bei der Entwicklung der modernen Analysis.

Dieses Kapitel behandelt die Inhaltsbestimmung einer Fläche zwischen einer reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen und der x–Achse. Dazu gibt es in der modernen Analysis verschiedene Wege, die nicht äquivalent sind. Hier wird der einfachste Weg, das sogenannte Riemann[1]–Integral, beschrieben. Das ist das gleiche Integral, welches man aus der Schule kennt. Es gibt Integralbegriffe, beispielsweise das Regel–Integral oder das Lebesgue[2]–Integral, welche mathematisch bessere Eigenschaften besitzen. In der Praxis reicht das Riemann–Integral jedoch im allgemeinen aus. Außerdem gilt, dass jede Funktion, die Riemann–integrierbar ist, auch integrierbar bezüglich der anderen Integralbegriffe ist und die Integralwerte gleich sind.

Das Vorgehen ist wie folgt: eine Funktion $f(x)$ wird Riemann–integrierbar heißen, falls die von $f(x)$ begrenzte Fläche gleichermaßen von oben und von unten durch bekannte Objekte und ihren Inhalt approximiert werden kann. Als bekannt vorausgesetzt wird der elementargeometrische Inhalt von Rechtecken. □

Bemerkung 3.2 Voraussetzungen, Bezeichnungen. Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, seien $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, das heißt, es existiert eine Zahl $K > 0$ so dass $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. □

Definition 3.3 Zerlegung, Teilintervall, Länge, Feinheit, äquidistant, Verfeinerung, Überlagerung.

1. Eine Zerlegung Z von I ist durch endlich viele strikt angeordnete Teilungspunkte oder Knoten
$$Z \ : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$$
gegeben. Man schreibt $Z = (x_0, \ldots, x_k)$.
2. Mit $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ bezeichnet man das j–te Teilintervall, mit $|I_j| = x_j - x_{j-1}$ dessen Länge und mit
$$\delta(Z) := \max_{j=1,\ldots,k} |I_j| = \max\{|I_j| \ : \ j = 1, \ldots, k\}$$
die Feinheit der Zerlegung Z.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)
[2] Henri Lebesgue (1875 – 1941)

3. Im Falle $x_j = a + j\frac{b-a}{k}$, $j = 0, \ldots, k$, nennt man die Zerlegung äquidistant.
4. Eine weitere Zerlegung Z' von I heißt Verfeinerung von Z, falls alle Teilungspunkte von Z in Z' enthalten sind. Man schreibt auch $Z \subset Z'$.
5. Mit $Z + Z'$ bezeichnet man die Überlagerung der Zerlegungen Z und Z' von I, in der alle Teilungspunkte von Z und von Z' jeweils genau einmal und in Anordnung aufgeführt sind.

□

Bemerkung 3.4 Überlagerung und Verfeinerung. $Z + Z'$ ist sowohl eine Verfeinerung von Z als auch von Z'. □

Definition 3.5 Ober– und Untersummen. Sei $Z\ :\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ eine Zerlegung von I. Dann nennt man

$$S_*(f, Z) := \sum_{j=1}^{k} \inf \{f(x)\ :\ x \in I_j\} |I_j|$$

Untersumme und

$$S^*(f, Z) := \sum_{j=1}^{k} \sup \{f(x)\ :\ x \in I_j\} |I_j|$$

Obersumme von $f(x)$ bezüglich der Zerlegung Z. □

Beispiel 3.6 Ober– und Untersummen. Betrachte die Funktion $f(x) = x^3$ in $I = [0, 1]$ und die Zerlegung $Z\ :\ 0 < 0.7 < 1$. Die Funktion ist streng monoton wachsend, also nimmt sie ihr Infimum (Minimum) in jedem der beiden Teilintervalle am linken Rand an und ihr Supremum (Maximum) am rechten Rand. Es sind

$$\begin{aligned} S_*(f, Z) &= f(0) \cdot 0.7 + f(0.7) \cdot 0.3 = 0 + 0.3 \cdot 0.7^3 = 0.1029, \\ S^*(f, Z) &= f(0.7) \cdot 0.7 + f(1) \cdot 0.3 = 0.7^4 + 0.3 \cdot 1^3 = 0.5401. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.7 Grundlage der Integrationstheorie. Grundlegend für die gesamte Integrationstheorie ist das Verhalten von Unter– und Obersumme bei Wechsel der Zerlegung. Die Untersuchungen dazu sind etwas technisch, aber sehr wichtig. □

Lemma 3.8 Abschätzungen für Überlagerung von Zerlegungen. *Sei $K \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in I$ gilt $|f(x)| \le K$. Sei $Z\ :\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ eine Zerlegung von I in k Teilintervalle. Dann gelten für jede Zerlegung Z' von I*

$$\begin{aligned} S_*(f, Z') &\le S_*(f, Z' + Z) \le S_*(f, Z') + 2(k-1)K\delta(Z'), \\ S^*(f, Z') &\ge S^*(f, Z' + Z) \ge S^*(f, Z') - 2(k-1)K\delta(Z'). \end{aligned}$$

Beweis: Wegen $\sup\{f(x)\} = -\inf\{-f(x)\}$ gilt $S^*(f, Z')) = -S_*(-f, Z')$. Deshalb reicht es, die Behauptung für die Untersummen zu zeigen.

Sei $Z'\ :\ a = y_0 < y_1 < \ldots < y_l = b$ und betrachte ein Teilintervall $I'_j = [y_{j-1}, y_j]$, welches in seinem Inneren mindestens einen der Teilungspunkte von Z enthält

$$y_{j-1} < x_r < x_{r+1} < \ldots < x_{r+s} < y_j,\ r \in \{1, \ldots, k-1\},\ s \in \mathbb{N}_0.$$

Nun vergleicht man die Beiträge zu $S_*(f,Z')$ und $S_*(f,Z'+Z)$ auf I'_j (Bild malen). Es gilt

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{f(x)\ :\ x\in I'_j\right\}\left|I'_j\right| && (3.1)\\
=\;& \inf\left\{f(x)\ :\ x\in I'_j\right\}(y_j-y_{j-1})\\
=\;& \inf\{f(x)\ :\ x\in[y_{j-1},y_j]\}\Big((x_r-y_{j-1})+(x_{r+1}-x_r)+\ldots+(y_j-x_{r+s})\Big)\\
\le\;& \inf\{f(x)\ :\ x\in[y_{j-1},x_r]\}(x_r-y_{j-1})\\
&+\sum_{p=1}^{s}\Big(\inf\{f(x)\ :\ x\in[x_{r+p-1},x_{r+p}]\}(x_{r+p}-x_{r+p-1})\Big) && (3.2)\\
&+\inf\{f(x)\ :\ x\in[x_{r+s},y_j]\}(y_j-x_{r+s})\\
\le\;& K\Big((x_r-y_{j-1})+(x_{r+1}-x_r)+\ldots+(y_j-x_{r+s})\Big)\\
=\;& K(y_j-y_{j+1})\le K\delta(Z')\le -K(y_j-y_{j+1})+2K\delta(Z')\\
\le\;& \inf\left\{f(x)\ :\ x\in I'_j\right\}\left|I'_j\right|+2K\delta(Z'). && (3.3)
\end{aligned}$$

Die Summe mit dem Summationsindex p ist im Fall $s=0$ leer. Bei der ersten Ungleichung, (3.1) nach (3.2), wird genutzt, dass das Infimum in einem Teilintervall größer sein kann als in I'_j. Bei der zweiten Ungleichung wird die Beschränktheit von $f(x)$ verwendet, bei der dritten Ungleichung $\delta(Z')\ge y_j-y_{j+1}$ und bei der letzten die Beschränktheit von $f(x)$ in der Form $-K\le\inf\left\{f(x)\ :\ x\in I'_j\right\}$.

Man beachte nun, dass diese Situation höchstens in $k-1$ Intervallen von Z' eintreten kann, da Z nicht mehr innere Punkte besitzt. Für alle anderen Teilintervalle $[y_{j-1},y_j]$ gilt, dass dies auch Teilintervalle von $Z+Z'$ sind, da sie keine inneren Knoten von Z enthalten. Somit ergeben diese Teilintervalle in $S_*(f,Z')$ und $S_*(f,Z'+Z)$ dieselben Beiträge.

Indem man über alle Teilintervalle von Z' summiert, und dabei im Falle der ersten Situation die Ungleichung (3.1) – (3.2) von oben nutzt, erhält man $S_*(f,Z')\le S_*(f,Z'+Z)$. Nutzt man die Ungleichung (3.2) – (3.3), so ergibt sich $S_*(f,Z'+Z)\le S_*(f,Z')+2K(k-1)\delta(Z')$. ■

Folgerung 3.9 Monotonie von Unter– und Obersumme. *Seien Z eine Zerlegung von I und $\tilde Z$ eine Verfeinerung von Z. Dann gilt*

$$S_*(f,Z)\le S_*(f,\tilde Z),$$

das heißt, die Untersumme wächst monoton beim Verfeinern. Analog fällt die Obersumme monoton beim Verfeinern

$$S^*(f,Z)\ge S^*(f,\tilde Z).$$

Beweis: Das folgt aus $\tilde Z=\tilde Z+Z$ und Lemma 3.8. ■

Folgerung 3.10 *Seien Z und Z' irgendwelche Zerlegungen von I, dann gilt*

$$S_*(f,Z)\le S_*(f,Z+Z')\le S^*(f,Z+Z')\le S^*(f,Z').$$

Beweis: Die erste und dritte Ungleichung folgen aus Lemma 3.8. Die zweite Ungleichung gilt, weil das Infimum immer kleiner oder gleich dem Supremum ist. ■

Definition 3.11 Ober– und Unterintegral. Man nennt

$$\int_a^b {}_*f(x)\;dx:=\sup\{S_*(f,Z)\ :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

Unterintegral von $f(x)$ auf $[a,b]$. Analog heißt

$$\int_a^b {}^*f(x)\;dx:=\inf\{S^*(f,Z)\ :\ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

Oberintegral von $f(x)$ auf $[a,b]$. □

Bemerkung 3.12 Zum Unter– und Oberintegral.

- Die Wohldefiniertheit von Unter– und Oberintegral basiert zum einen auf der Beschränktheitsvoraussetzung an $f(x)$ und zum anderen auf der Existenz von Infimum und Supremum beschränkter Mengen. Die zweite Eigenschaft gilt auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, das heißt dass jede Cauchy–Folge reeller Zahlen auch einen Grenzwert in den reellen Zahlen besitzt.
- Es gelten

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx \in [-K(b-a), K(b-a)], \quad \int_a^b {}^*f(x)\ dx \in [-K(b-a), K(b-a)].$$

□

Satz 3.13 Zum Unter– und Oberintegral. *Es gilt stets*

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx \le \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

Beweis: Sei Z eine beliebige Zerlegung von I. Wegen Folgerung 3.10 ist $S_*(f, Z)$ untere Schranke der Menge $\{S^*(f, Z')\ :\ Z' \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$, also für alle Zerlegungen Z' gilt

$$S_*(f, Z) \le \left\{S^*(f, Z')\ :\ Z' \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\right\}.$$

Nimmt man das Infimum bezüglich Z' auf beiden Seiten der Ungleichung, dann bleibt die Ungleichung erhalten und es ergibt sich

$$S_*(f, Z) \le \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

Diese Ungleichung gilt für alle Zerlegungen Z. Nun kann man das Supremum auf beiden Seiten der Ungleichung nehmen, woraus folgt

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx \le \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

■

Definition 3.14 Riemann–integrierbare Funktion, Riemann–Integral. Seien $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion $f(x)$ wird genau dann Riemann–integrierbar auf $[a, b]$ genannt, wenn

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx = \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

In diesem Falle nennt man

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

das Riemann–Integral von $f(x)$ auf $[a, b]$. Die Menge der Riemann–integrierbaren Funktionen wird mit

$$R([a, b]) := \{f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}\ :\ f(x) \text{ ist (beschränkt und) Riemann–integrierbar}\}$$

bezeichnet. □

Bemerkung 3.15 Zum Riemann–Integral.

- Die Integrationsvariable kann man willkürich nennen:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(\gamma)\ d\gamma.$$

- Im Falle umgekehrter Intervallgrenzen setzt man

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Damit kann man später bei Regeln wie der Substitutionsregel auf Fallunterscheidungen verzichten.

□

Beispiel 3.16 Zum Riemann–Integral.

1. Es sei $f(x) = c = \text{const}$ auf $[a,b]$, dann folgt

$$S_*(f,Z) = S^*(f,Z) = \sum_{i=0}^{k-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b-a).$$

Das bedeutet, $f(x)$ ist integrierbar mit $\int_a^b f(x)\ dx = c(b-a)$.

2. Es sei $\xi \in [a,b]$. Dann ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi, \\ 1 & x = \xi, \end{cases}$$

Riemann–integrierbar. Für jede Zerlegung Z gilt nämlich

$$S_*(f,Z) = 0, \quad 0 < S^*(f,Z) \le 2\delta(Z).$$

Falls ξ ein Knoten ist, wird der Wert 1 als Supremum auf zwei Intervallen der Zerlegung angenommen. Es folgt $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, da $\delta(Z)$ beliebig klein gewählt werden kann.

3. Die Dirichlet[3]sche Sprungfunktion ist definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Manchmal ist die Festlegung der Funktionswerte auch umgekehrt. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und der Dichtheit von $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ist für jede Zerlegung Z

$$S_*(f,Z) = 0, \quad S^*(f,Z) = 1.$$

Somit ist $f(x)$ nicht Riemann–integrierbar.
Mit allgemeineren Integrierbarkeitsbegriffen, zum Beispiel dem Lebesque–Integral, kann diese Funktion integriert werden und das Integral hat den Wert 1.

□

Bemerkung 3.17 Zum Nachweis der Integrierbarkeit ist Definition 3.14 unpraktikabel, da Ober– und Unterintegral mittels aller Zerlegungen bestimmt werden müssen. Ein etwas praktikables Kriterium liefert der folgende Satz. □

Satz 3.18 Kriterium für Integrierbarkeit. *Sei $\{Z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ irgendeine Folge von Zerlegungen mit $\delta(Z_l) \to 0$ für $l \to \infty$. Dann gelten*

$$\lim_{l\to\infty} S_*(f,Z_l) = \int_a^b {}_*f(x)\ dx, \quad \lim_{l\to\infty} S^*(f,Z_l) = \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

Dies gilt unabhängig von der Zerlegungsfolge $\{Z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$!

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

Beweis: Man kann sich überlegen, dass

$$S^*(f,Z_l) = -S_*(-f,Z_l), \quad \int_a^b {}^* f(x)\, dx = -\int_a^b {}_*(-f(x))\, dx,$$

siehe Beweis von Lemma 3.8. Deshalb reicht es, den Satz für das Unterintegral zu beweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Auf Grund der Definition des Unterintegrals mittels Supremum existiert eine Zerlegung Z_0 von $I = [a,b]$ mit (k_0+1) Teilungspunkten, so dass

$$\int_a^b {}_* f(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2} \le S_*(f,Z_0) \le \int_a^b {}_* f(x)\, dx. \tag{3.4}$$

Lemma 3.8, linke Ungleichung, mit $Z_0 = Z'$ und $Z_l = Z$ ergibt

$$S_*(f,Z_0) \le S_*(f,Z_0+Z_l). \tag{3.5}$$

Vertauscht man die Rollen, $Z_0 = Z$ und $Z_l = Z'$ und wendet die rechte Ungleichung an, dann erhält man

$$S_*(f,Z_0+Z_l) \le S_*(f,Z_l) + 2(k_0-1)K\delta(Z_l).$$

Da $\delta(Z_l) \to 0$, gibt es einen Index l_0, so dass für alle $l \ge l_0$ gilt

$$2(k_0-1)K\delta(Z_l) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

da weder K noch k_0 von Z_l abhängen. Das bedeutet für $l \ge l_0$

$$S_*(f,Z_0+Z_l) \le S_*(f,Z_l) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad S_*(f,Z_0+Z_l) - \frac{\varepsilon}{2} \le S_*(f,Z_l).$$

Einsetzen von (3.4) und (3.5) liefert für alle $l \ge l_0$

$$\int_a^b {}_* f(x)\, dx - \varepsilon \le S_*(f,Z_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le S_*(f,Z_0+Z_l) - \frac{\varepsilon}{2} \le S_*(f,Z_l) \le \int_a^b {}_* f(x)\, dx.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zeigt

$$\lim_{l\to\infty} S_*(f,Z_l) = \int_a^b {}_* f(x)\, dx.$$

■

Beispiel 3.19 Zum Kriterium für Integrierbarkeit. Betrachte $I = [0,b]$, $f(x) = x$ und eine äquidistante Zerlegung in $k \in \mathbb{N}$ Intervalle

$$Z_k \ : \ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_j = j\frac{b}{k} < \ldots < x_k = b, \quad \delta(Z_k) = \frac{b}{k}.$$

Es sind

$$\begin{aligned} S_*(f,Z_k) &= \sum_{j=1}^k \left((j-1)\frac{b}{k}\right)\frac{b}{k} = \frac{b^2}{k^2}\sum_{j=1}^k (j-1) = \frac{b^2}{k^2}\sum_{j=0}^{k-1} j = \frac{b^2}{k^2}\left(\frac{1}{2}k(k-1)\right) \\ &= \frac{b^2}{2}\frac{k^2-k}{k^2} = \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Für feiner werdende äquidistante Zerlegungen folgt

$$\lim_{k\to\infty} S_*(f,Z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{b^2}{2}.$$

Analog gilt

$$\lim_{k\to\infty} S^*(f,Z_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \left(j\frac{b}{k}\right)\frac{b}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{b^2}{k^2}\sum_{j=1}^k j = \lim_{k\to\infty} \frac{b^2}{k^2}\left(\frac{1}{2}k(k+1)\right) = \frac{b^2}{2}.$$

Aus Satz 3.18 folgt

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx = \frac{b^2}{2} = \int_a^b {}^*f(x)\ dx.$$

Nach Definition 3.14 ist die Funktion $f(x) = x$ in $[0, b]$ Riemann–integrierbar mit

$$\int_a^b x\ dx = \frac{b^2}{2}.$$

□

Satz 3.20 Riemannsches Integrabilitätskriterium. *Seien* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt. Dann ist die Funktion* $f(x)$ *genau dann Riemann–integrierbar, wenn eine Folge* $\{Z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *von Zerlegungen von* $[a, b]$ *existiert mit* $\lim_{l\to\infty} \delta(Z_l) = 0$*, so dass*

$$\lim_{l\to\infty} (S^*(f, Z_l) - S_*(f, Z_l)) = 0.$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes beruht auf Satz 3.18.

$\Longrightarrow$ $f(x)$ sei Riemann–integrierbar. Auf Grund der Definition von Ober– und Unterintegral und Integrierbarkeit findet man zu jedem $l \in \mathbb{N}$ Zerlegungen $Z_l^{(1)}$, $Z_l^{(2)}$ mit

$$\int_a^b f(x)\ dx - \frac{1}{l} \le S_*\left(f, Z_l^{(1)}\right) \overset{\text{Folg. 3.10}}{\le} S^*\left(f, Z_l^{(2)}\right) \le \int_a^b f(x)\ dx + \frac{1}{l}.$$

Betrachte nun noch die äquidistante Zerlegung $Z_l^{(3)}$ mit $\delta(Z_l^{(3)}) = (b - a)/l$. Definiere $Z_l = Z_l^{(1)} + Z_l^{(2)} + Z_l^{(3)}$. Es gilt

$$\delta(Z_l) \le \delta(Z_l^{(3)}) = \frac{b-a}{l} \to 0 \quad \text{für } l \to \infty.$$

Nach Folgerung 3.9 (Monotonie) gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx - \frac{1}{l} \le S_*\left(f, Z_l\right) \le S^*\left(f, Z_l\right) \le \int_a^b f(x)\ dx + \frac{1}{l}.$$

Es folgt

$$S^*\left(f, Z_l\right) - S_*\left(f, Z_l\right) \le \int_a^b f(x)\ dx + \frac{1}{l} - \left(\int_a^b f(x)\ dx - \frac{1}{l}\right) = \frac{2}{l} \to 0 \quad \text{für } l \to \infty.$$

Damit ist eine Zerlegungsfolge konstruiert, welche die Behauptung des Satzes erfüllt.

$\Longleftarrow$ Existiere der im Satz angegebene Grenzwert. Nach Satz 3.18 sind

$$\int_a^b {}^*f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S^*(f, Z_l), \qquad \int_a^b {}_*f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S_*(f, Z_l).$$

Nach Voraussetzung ist

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx = \int_a^b {}^*f(x)\ dx,$$

was gerade die Definition der Riemann–Integrierbarkeit von $f(x)$ ist. ■

Bemerkung 3.21 Der wichtige Punkt des Riemannschen Integrabilitätskriteriums ist, dass man nur noch eine Folge von Zerlegungen mit der angegebenen Eigenschaft finden muss. Aber auch das ist im allgemeinen noch zu viel Arbeit. Deshalb wird jetzt gezeigt, dass ganze Klassen „vernünftiger" Funktionen, nämlich monotone Funktionen und stetige Funktionen, Riemann–integrierbar sind. Zur Untersuchung stetiger Funktionen muss noch der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit eingeführt werden. □

Satz 3.22 Riemann–Integrierbarkeit monotoner Funktionen. *Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann–integrierbar.*

Beweis: Wegen

$$\int_a^b {}^*(-f(x))\,dx = -\int_a^b {}_*f(x)\,dx, \quad \int_a^b {}_*(-f(x))\,dx = -\int_a^b {}^*f(x)\,dx$$

kann man annehmen, dass $f(x)$ monoton wachsend ist.

Offensichtlich gilt für alle $x \in [a,b]$, dass $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Damit ist $f(x)$ insbesondere beschränkt. Nach Satz 3.20 reicht es, eine Folge äquidistanter Zerlegungen von $[a,b]$ zu betrachten. Sei also

$$Z : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j = j\frac{b-a}{k} + a < \ldots < x_k = b, \quad \delta(Z) = \frac{b-a}{k}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} S^*(f,Z) - S_*(f,Z) &= \sum_{j=1}^{k}\left(f(x_j)\frac{b-a}{k}\right) - \sum_{j=1}^{k}\left(f(x_{j-1})\frac{b-a}{k}\right) \\ &= \frac{b-a}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} f(x_j) - \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\right) \\ &= \delta(Z)\,(f(b) - f(a)) \to 0 \quad \text{falls } \delta(Z) \to 0. \end{aligned}$$

Das Riemannsche Integrabilitätskriterium zeigt die Riemann–Integrierbarkeit von $f(x)$. ■

Definition 3.23 Gleichmäßige Stetigkeit. Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, x' \in I$ gilt

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 3.24 Zur gleichmäßigen Stetigkeit. In der Mathematik heißt eine Eigenschaft gleichmäßig, wenn sie unabhängig von irgendetwas gilt. Die Stetigkeit einer Funktion ist zunächst eine lokale Eigenschaft, dass heißt $f(x)$ ist in x_0 stetig, wenn man für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x_0)$ findet, so dass aus

$$|x - x_0| < \delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

folgt. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet nun, dass die Funktion im gesamten Intervall stetig ist und man das δ unabhängig vom betrachteten Punkt wählen kann. Das bedeutet, es gibt ein δ mit

$$\delta(x) \le \delta \quad \forall\, x \in I.$$

□

Beispiel 3.25 Gleichmäßig stetige Funktionen.

1. Sei $f(x)$ Lipschitz[4]–stetig mit Konstante $L > 0$, das heißt es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \le L\,|x - x_0| \quad \forall\, x, x_0 \in I.$$

Dann ist $f(x)$ auch gleichmäßig stetig, denn für $|x - x_0| < \varepsilon/L$ folgt

$$|f(x) - f(x_0)| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

[4] Rudolf Lipschitz (1832 – 1903)

2. Betrachte $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Diese Funktion ist nicht Lipschitz–stetig. Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a+b \le a + 2\sqrt{ab} + b.$$

Daraus folgt für $x > x_0$, mit $a+b = x$, $a = x_0$, $b = x - x_0$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \le \sqrt{x - x_0}$$

Analog folgt für $x < x_0$ mit $a + b = x_0$, $a = x$, $b = x_0 - x$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right| = \sqrt{x_0} - \sqrt{x} \le \sqrt{x_0 - x}.$$

Fasst man diese Ungleichungen zusammen, gilt damit

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \le \sqrt{|x - x_0|}.$$

Wählt man $\delta = \varepsilon^2$ dann folgt aus $|x - x_0| < \delta$, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Die Funktion ist also gleichmäßig stetig.

3. Betrachte $f(x) = \cos(1/x)$ in $(0, 1]$. Diese Funktion ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Sie ist allerdings nicht gleichmäßig stetig. Wähle beispielsweise $\varepsilon = 1$ und betrachte die Argumente $1/(k\pi)$ und $1/((k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$. Es sind

$$\left| f\left(\frac{1}{k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right)\right| = 2, \quad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi}\right) = 0.$$

Somit findet man für $\varepsilon = 1$ kein $\delta > 0$, so dass die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt ist. Das Problem der untersuchten Funktion sind die unendlich vielen Oszillation für $x \to 0$.

Fazit: Mit den Beispielen wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} \{f(x) \ : \ f(x) \text{ Lipschitz–stetig}\} &\subsetneq \{f(x) \ : \ f(x) \text{ gleichmäßig stetig}\} \\ &\subsetneq \{f(x) \ : \ f(x) \text{ stetig}\}. \end{aligned}$$

□

Satz 3.26 Gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. *Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes und beschränktes (kompaktes) Intervall und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(x)$ sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis: Indirekter Beweis. Angenommen, $f(x)$ sei nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass insbesondere zu jedem $\delta = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, Punkte $x_k, x_k' \in I$ existieren mit

$$\left|x_k - x_k'\right| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \left|f(x_k) - f(x_k')\right| \ge \varepsilon. \tag{3.6}$$

Da I abgeschlossen und beschränkt ist, kann man eine Teilfolge $\{x_{k_l}\}$ von $\{x_k\}$ auswählen, die gegen ein $x_0 \in I$ für $l \to \infty$ konvergiert. Da man k in (3.6) beliebig groß wählen kann, folgt auch $\{x_{k_l}'\} \to x_0$. Nach Voraussetzung ist $f(x)$ in x_0 stetig. Damit ist, unter Nutzung der Stetigkeit des Betrages,

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \left|\lim_{l\to\infty} \left(f(x_{k_l}) - f(x_{k_l}')\right)\right| = \lim_{l\to\infty} \left|f(x_{k_l}) - f(x_{k_l}')\right| \ge \varepsilon.$$

Das ist ein Widerspruch. ■

Satz 3.27 Riemann–Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(x)$ auch Riemann–integrierbar.*

Beweis: Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, Satz von Weierstraß[5]. Damit ist sie sicher beschränkt.

Nach Satz 3.26 ist $f(x)$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in [a, b]$ gilt

$$\left|x - x'\right| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sei nun $Z \ : \ a = x_0 < \ldots < x_k = b$ irgendeine Zerlegung der Feinheit $\delta(Z) < \delta$. Für beliebige $x, x' \in I_j = [x_{j-1}, x_j]$ gilt damit

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f(x') + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Insbesondere folgen

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le \inf_{x \in I_j} f(x), \quad \sup_{x \in I_j} f(x) \le f(x') + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le \inf_{x \in I_j} f(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

also

$$0 \le \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Damit erhält man für die Differenz von Ober– und Untersumme

$$\begin{aligned} 0 \quad &\le \quad S^*(f, Z) - S_*(f, Z) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \right) |I_j| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} |I_j| \\ &= \quad \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt, ist $\{Z_l\}$ irgendeine Zerlegungsfolge mit $\lim_{l \to \infty} \delta(Z_l) = 0$, so folgt

$$\lim_{l \to \infty} \left(S^*(f, Z_l) - S_*(f, Z_l)\right) = 0.$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, Satz 3.20, ist $f(x)$ Riemann–integrierbar.

■

Bemerkung 3.28 Technische Vereinfachung. Das Ziel besteht jetzt darin, eine Charakterisierung der Riemann–Integrierbarkeit ohne Supremum und Infimum der Funktion in den Teilintervallen, sondern mit beliebigen Funktionswerten aus den Teilintervallen, zu erhalten. Das erleichtert technische Untersuchungen des Riemann–Integrals. □

Definition 3.29 Riemannsche Summe. Seien $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Z \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ irgendeine Zerlegung von $[a, b]$ und $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ eine Auswahl von Stützstellen mit $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Dann versteht man unter der Riemannschen Summe bezüglich dieser Auswahl der Zerlegung und der Stützstellen

$$\sigma(f, Z, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \left(x_j - x_{j-1}\right).$$

□

Bemerkung 3.30 Riemannsche Summe.

- Wegen

$$\inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \le f(\xi_j) \le \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \quad \forall \ \xi \in [x_{j-1}, x_j]$$

folgt sofort

$$S_*(f, Z) \le \sigma(f, Z, \boldsymbol{\xi}) \le S^*(f, Z).$$

[5] Karl Weierstraß (1815 – 1897)

- Durch Grenzübergang bei dieser Ungleichungskette folgt für jede Riemann–integrierbare Funktion $f(x)$, dass für jede beliebige Zerlegungsfolge $\{Z_l\}$ mit $\delta(Z_l) \to 0$ und für jede beliebige Auswahl von Stützstellen $\boldsymbol{\xi}^{(l)} = (\xi_1^{(l)}, \ldots, \xi_k^{(l)})$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S_*(f, Z_l) = \lim_{l\to\infty} S^*(f, Z_l) = \lim_{l\to\infty} \sigma(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}_l)$$

gilt.
- Jetzt fehlt noch die umgekehrte Richtung, nämlich dass aus der Konvergenz der Riemannschen Summen die Riemann–Integrierbarkeit einer Funktion folgt.

□

Lemma 3.31 *Sei* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt. Zu jeder Zerlegung* $Z\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es Stützstellen* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ *und* $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_k)$ *derart, dass*

$$S_*(f,Z) \le \sigma(f,Z,\boldsymbol{\xi}) \le S_*(f,Z) + \varepsilon, \quad S^*(f,Z) - \varepsilon \le \sigma(f,Z,\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \le S^*(f,Z).$$

Beweis: Wir zeigen nur die Behauptung für die Obersummen, für die Untersummen verwendet man die gleiche Argumentation.

Es ist $\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ obere Schranke für $f(x)$ in $[x_{j-1}, x_j]$. Dagegen ist

$$\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

keine obere Schranke. Also existiert ein $\tilde{\xi}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit

$$\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f\left(\tilde{\xi}_j\right) \le \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x).$$

Setze nun $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_k)$. Dann ist

$$\begin{aligned} S^*(f,Z) &\ge \sigma(f,Z,\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{j=1}^{k} f\left(\tilde{\xi}_j\right)(x_j - x_{j-1}) \\ &> \sum_{j=1}^{k} \left(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right)(x_j - x_{j-1}) \\ &= S^*(f,Z) - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) = S^*(f,Z) - \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Satz 3.32 Andere Möglichkeit der Definition des Riemann–Integrals. *Sei* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt. Die Funktion ist genau dann Riemann–integrierbar, wenn für jede Folge* $\{Z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *von Zerlegungen mit* $\lim_{l\to\infty} \delta(Z_l) = 0$ *und jede zugehörige Auswahl von Stützstellen* $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$

$$\lim_{l\to\infty} \sigma\left(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right)$$

existiert. In diesem Falle gilt stets

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} \sigma\left(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right).$$

Beweis: Auf Grund von Bemerkung 3.30 ist nur zu zeigen, dass unter obigen Bedingungen die Riemann–Integrierbarkeit folgt. Es existiere also für jede Zerlegungsfolge und jede Auswahl von Stützstellen der Grenzwert der Riemannschen Summe. Nun muss gezeigt werden, dass in diesem Falle für eine Zerlegungsfolge $\{\tilde{Z}_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\delta(\tilde{Z}_l) \to 0$ gilt

$$\int_a^b {}^*f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S^*(f, \tilde{Z}_l) = \lim_{l\to\infty} S_*(f, \tilde{Z}_l) = \int_a^b {}_*f(x)\ dx. \tag{3.7}$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, Satz 3.20, ist die Funktion in diesem Falle Riemann–integrierbar. Die erste und letzte Gleichheit folgt bereits aus Satz 3.18.

Betrachte die Ungleichungen von Lemma 3.31 mit $\varepsilon = \varepsilon_l = \frac{1}{l}$ und Stützstellenauswahlen $\boldsymbol{\eta}^{(l)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}$ von $\tilde{Z}_l$ mit

$$S_*(f, \tilde{Z}_l) \le \sigma(f, \tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}) \le S_*(f, \tilde{Z}_l) + \frac{1}{l}, \quad S^*(f, \tilde{Z}_l) - \frac{1}{l} \le \sigma(f, \tilde{Z}_l, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}) \le S^*(f, \tilde{Z}_l).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b {}_*f(x)\ dx &= \lim_{l\to\infty} S_*(f, \tilde{Z}_l) \le \lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}) \le \lim_{l\to\infty} \left(S_*(f, \tilde{Z}_l) + \frac{1}{l} \right) \\ &= \lim_{l\to\infty} S_*(f, \tilde{Z}_l). \end{aligned}$$

Das bedeutet, $\lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)})$ existiert und es gilt

$$\int_a^b {}_*f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S_*(f, \tilde{Z}_l) = \lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}). \tag{3.8}$$

Analog existiert der Grenzwert für die andere Riemann–Summe und es gilt

$$\int_a^b {}^*f(x)\ dx = \lim_{l\to\infty} S^*(f, \tilde{Z}_l) = \lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}). \tag{3.9}$$

Jetzt muss noch die Gleichheit der Grenzwerte gezeigt werden. Dazu werden die Folgen $\{\tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}\}$ und $\{\tilde{Z}_l, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}\}$ im Reißverschlussverfahren zu einer einzigen Folge zusammengesetzt. Dann wird die Voraussetzung verwendet, dass die Riemannschen Summen für jede Zerlegungsnullfolge und Stützstellenauswahl, insbesondere also für die jetzt zu konstruierende, konvergieren. Setze für $l \in \mathbb{N}$

$$\{Z_{2l-1}, \boldsymbol{\xi}^{(2l-1)}\} := \{\tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}\}, \quad \{Z_{2l}, \boldsymbol{\xi}^{(2l)}\} := \{\tilde{Z}_l, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}\}.$$

Nach Voraussetzung ist die Riemannsche Summe, welche auf der so konstruierten Folge basiert, konvergent. Es existiert also

$$\lim_{l\to\infty} \sigma(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}).$$

Ist eine Folge konvergent, dann besitzen alle Teilfolgen denselben Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \boldsymbol{\eta}^{(l)}) &= \lim_{l\to\infty} (f, Z_{2l-1}, \boldsymbol{\xi}^{(2l-1)}) = \lim_{l\to\infty} (f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}) = \lim_{l\to\infty} (f, Z_{2l}, \boldsymbol{\xi}^{(2l)}) \\ &= \lim_{l\to\infty} \sigma(f, \tilde{Z}_l, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(l)}). \end{aligned}$$

Kombination mit (3.8) und (3.9) ergibt (3.7) ■

Bemerkung 3.33 Andere Möglichkeit der Definition des Riemann–Integrals.

- Die eben angegebene Definition des Riemann–Integrals ist etwas komplexer als die aus Definition 3.14. Sie bietet jedoch den Vorteil, dass man sie direkt auf Funktionen verallgemeinern kann, die in einen beliebigen normierten Vektorraum abbilden.
- Im Gegensatz zu Satz 3.18 und zum Riemannschen Integrabilitätskriterium, Satz 3.20, muss man bei der alternativen Definition wirklich alle Zerlegungsfolgen und alle Stützstellenauswahlen betrachten.

- Nun kann man ohne größeren Aufwand eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften des Riemann–Integrals beweisen. Es wird so sein, dass man später kaum noch auf die Konstruktion des Integrals zurückgreifen wird, sondern fast ausschließlich diese Eigenschaften verwenden wird.

□

Satz 3.34 Linearität des Riemann–Integrals. *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx.$$

Beweis: Sei $\{Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\}$ irgendeine Folge von Zerlegungen mit $\delta(Z_l) \to 0$ und zugehörigen Stützstellen $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$. Auf Grund von Satz 3.32 gilt

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx &= \alpha \lim_{l\to\infty} \sigma\left(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right) + \beta \lim_{l\to\infty} \sigma\left(g, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right) \\ &= \lim_{l\to\infty} \left(\alpha\sigma\left(f, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right) + \beta\sigma\left(g, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right)\right) \\ &= \lim_{l\to\infty} \sigma\left(\alpha f + \beta g, Z_l, \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right). \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit wurde die Existenz des Grenzwertes verwendet, welche aus den Grenzwertsätzen folgt. Die letzte Gleichheit folgt aus der Linearität von Summen. Nach Satz 3.32 sind damit sowohl die Riemann–Integrierbarkeit als auch die Formel gezeigt. ■

Satz 3.35 Monotonie des Riemann–Integrals. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar und es gelte für alle $x \in [a, b]$ dass $f(x) \le g(x)$. Dann folgt*

$$\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx.$$

Beweis: Die Relation zwischen den Funktionen pflanzt sich direkt auf Infima/Suprema, Unter–/Obersumme, Unter–/Oberintegral und damit auf das Integral fort. ■

Satz 3.36 Abänderung der Funktion an endlich vielen Stellen. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Durch Abänderung von $f(x)$ an endlich vielen Stellen ändert sich an $\int_a^b {}^*f(x)\ dx$, $\int_a^b {}_*f(x)\ dx$ und somit an der Riemann–Integrierbarkeit und gegebenenfalls an $\int_a^b f(x)\ dx$ nichts.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion. Zunächst muss man sich überlegen, dass Abänderung an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$, etwa um $\pm\alpha$, $\alpha > 0$, nichts ändert, vergleiche auch Beispiel 3.16, 2. Bei dieser Änderung ändern sich $S_*(f, Z)$ und $S^*(f, Z)$ höchstens um $2\alpha\delta(Z)$. Da man jedoch zur Bestimmung von Unter– und Oberintegral $\delta(Z) \to 0$ betrachtet, bleiben diese gleich. Die Induktion erfolgt nach demselben Prinzip. ■

Satz 3.37 Funktionen, die auf einer dichten Teilmenge gleich sind. *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sind $f(x)$ und $g(x)$ beide Riemann–integrierbar und gilt auf einer dichten Teilmenge $D \subset [a, b]$, das heißt $\overline{D} = [a, b]$, für alle $x \in D$ dass $f(x) = g(x)$, dann folgt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ und $g(x)$ als Riemann–integrierbar vorausgesetzt wurden, reicht es zur Bestimmung der Integrale aus, eine spezielle Folge von Zerlegungen und zugehörigen Stützstellen zu betrachten. Sei

$$Z \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

irgendeine Zerlegung und betrachte in $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ den Mittelpunkt $(x_{j-1} + x_j)/2 \in \mathring{I}_j$. Dieser liegt in $\overline{D}$, also existiert eine Folge aus D, welche gegen diesen konvergiert. Insbesondere findet man ein $\xi_j \in I_j \cap D$ mit $f(\xi_j) = g(\xi_j)$. (Bild) Mit dieser Wahl hat man

$$\sigma(f, Z, \boldsymbol{\xi}) = \sigma(g, Z, \boldsymbol{\xi}).$$

Da die Riemann–Integrierbarkeit von $f(x)$ und $g(x)$ vorausgesetzt wurde, existieren die Grenzwerte der Riemannschen Summen und sie sind gleich

$$\lim_{\delta(Z)\to 0} \sigma(f, Z, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{\delta(Z)\to 0} \sigma(g, Z, \boldsymbol{\xi}).$$

Nach Satz 3.32 existieren wegen der vorausgesetzten Riemann–Integrierbarkeit die Grenzwerte sogar für jede Auswahl von Stützpunkten und es folgt aus der Gleichheit der obigen Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) \ dx = \int_a^b g(x) \ dx.$$

■

Satz 3.38 Komposition von Funktionen. *Sei $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sind $f(x)$ Riemann–integrierbar und $\varphi \ : \ f([a, b]) \to \mathbb{R}$ Lipschitz–stetig mit Konstante $L < \infty$, so ist auch $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$ Riemann–integrierbar.*

Beweis: Seien $I_j \subset [a, b]$ irgendein abgeschlossenes Teilintervall von $[a, b]$, $\{\xi_l\}$ eine Folge in I_j mit $(\varphi \circ f)(\xi_l) \to \sup_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x)$ sowie $\{\eta_l\}$ eine Folge mit $(\varphi \circ f)(\eta_l) \to \inf_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x)$. Dann ist

$$\sup_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x) - \inf_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x) = \lim_{l\to\infty} \left((\varphi \circ f)(\xi_l) - (\varphi \circ f)(\eta_l)\right).$$

Aus der Lipschitz–Stetigkeit von $\varphi(x)$ folgt

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f)(\xi_l) - (\varphi \circ f)(\eta_l) &= \varphi(f(\xi_l)) - \varphi(f(\eta_l)) \le L\, |f(\xi_l) - f(\eta_l)| \\ &\le L \left(\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x) \right), \end{aligned}$$

also

$$\sup_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x) - \inf_{x\in I_j} (\varphi \circ f)(x) \le L \left(\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x) \right).$$

Betrachtet man nun eine Zerlegung Z und summiert über die Teilintervalle, dann erhält man daraus

$$0 \le S^*(\varphi \circ f, Z) - S_*(\varphi \circ f, Z) \le L \left(S^*(f, Z) - S_*(f, Z)\right).$$

Da $f(x)$ Riemann–integrierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_a^b {}^*(\varphi \circ f)(x) \ dx - \int_a^b {}_*(\varphi \circ f)(x) \ dx \le L \left(\int_a^b {}^*f(x) \ dx - \int_a^b {}_*f(x) \ dx \right) \\ &= L \left(\int_a^b f(x) \ dx - \int_a^b f(x) \ dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Damit erfüllt $(\varphi \circ f)(x)$ die Definition der Riemann–Integrierbarkeit. ■

Satz 3.39 Positivteil, Potenzen, reziproke Funktion. *Mit $f(x)$ sind auch $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ (Positivteil von f(x)), $f^-(x) := \min\{-f(x), 0\}$, $|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$ und für jedes $p \geq 1$ auch $|f(x)|^p$ Riemann–integrierbar. Gilt für ein $\delta > 0$ für alle $x \in [a, b]$ dass $f(x) \geq \delta > 0$, so ist auch $1/f(x)$ Riemann–integrierbar.*

Beweis: Die Aussagen sind im wesenlichen Folgerungen von Satz 3.38:

$$\begin{array}{ll} f^+(x) & \text{betrachte } \varphi(y) = \max\{y, 0\}, \\ f^-(x) & \text{betrachte } \varphi(y) = \min\{y, 0\}, \\ |f(x)| & \text{betrachte } \varphi(y) = |y|, \\ |f(x)|^p & \text{betrachte } \varphi(y) = |y|^p. \end{array}$$

Die Lipschitz–Stetigkeit für den letzten Fall erhält man aus der Differenzierbarkeit von $\varphi(y)$. Mit $y = f(x)$, $|f(x)| \leq K$ und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhält man mit $\eta \in (y, \tilde{y})$

$$|\varphi(y) - \varphi(\tilde{y})| = |\varphi'(\eta)|\, |y - \tilde{y}| = p\, |\eta|^{p-1}\, |y - \tilde{y}| \leq pK^{p-1}\, |y - \tilde{y}|\,.$$

Die Funktion $\varphi(y) = 1/y$ ist auf $[\delta, \infty)$ Lipschitz–stetig, denn

$$|\varphi(y) - \varphi(\tilde{y})| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{\tilde{y}}\right| = \left|\frac{\tilde{y} - y}{y\tilde{y}}\right| \leq \frac{1}{\delta^2}\, |\tilde{y} - y|\,.$$

■

Bemerkung 3.40 Es gelten

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Die Aussage für die Potenz ist auch für $0 \leq p < 1$ richtig, der Beweis ist jedoch schwieriger. □

Satz 3.41 Produkte von Funktionen, Minima, Maxima. *Mit den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind auch $(fg)(x)$, $\max_{x\in[a,b]}\{f(x), g(x)\}$ und $\min_{x\in[a,b]}\{f(x), g(x)\}$ Riemann–integrierbar.*

Beweis: Man beachte

$$\left.\begin{array}{rcl} (f+g)^2(x) & = & f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x) \\ (f-g)^2(x) & = & f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) \end{array}\right\} \quad f(x)g(x) = \frac{1}{4}(f+g)^2(x) - \frac{1}{4}(f-g)^2(x),$$

und

$$\max\{f(x), g(x)\} = g(x) + (f-g)^+(x), \quad \min\{f(x), g(x)\} = f(x) - (f-g)^+(x)$$

für alle $x \in [a, b]$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.39 und der Linearität des Integrals.

■

Satz 3.42 Additivität im Integrationsintervall. *Seien $-\infty < a < b < c < \infty$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist $f(x)$ in $[a, c]$ Riemann–integrierbar, wenn $f(x)|_{[a,b]}$ und $f(x)|_{[b,c]}$ Riemann–integrierbar sind. In diesem Falle gilt*

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx.$$

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei $f(x)$ auf $[a, c]$ Riemann–integrierbar. Seien Z' irgendeine Zerlegung von $[a, b]$ und Z'' von $[b, c]$. Diese werden zu einer Zerlegung Z von $[a, c]$ zusammengesetzt. Dann gelten

$$\begin{array}{rcl} S_*(f, Z, [a, c]) & = & S_*(f, Z', [a, b]) + S_*(f, Z'', [b, c]), \\ S^*(f, Z, [a, c]) & = & S^*(f, Z', [a, b]) + S^*(f, Z'', [b, c]), \end{array}$$

woraus

$$
\begin{aligned}
0 &\le S^*(f, Z, [a, c]) - S_*(f, Z, [a, c]) \\
&= \underbrace{\big(S^*(f, Z', [a, b]) - S_*(f, Z', [a, b])\big)}_{\ge 0} + \underbrace{\big(S^*(f, Z'', [b, c]) + S_*(f, Z'', [b, c])\big)}_{\ge 0}
\end{aligned}
$$

folgt. Für $\delta(Z) \to 0$ folgen $\delta(Z') \to 0, \delta(Z'') \to 0$ und die linke Seite der Gleichung konvergiert nach Voraussetzung gegen Null, Riemannschen Integrabilitätskriterium, Satz 3.20. Damit konvergieren auch die beiden nichtnegativen Summanden auf der rechten Seite gegen Null. Ist nämlich ihre Summe kleiner als beliebiges $\varepsilon > 0$, so muss auch jeder Summand im Intervall $[0, \varepsilon)$ liegen. Damit folgt die Konverenz jeder der beiden Summanden. Nach dem gleichen Kriterium ist $f(x)$ damit sowohl auf $[a, b]$ als auch auf $[b, c]$ integrierbar.

$\Longleftarrow$ Die Funktion $f(x)$ sei sowohl auf $[a, b]$ als auch auf $[b, c]$ Riemann–integrierbar. Wegen Satz 3.18 kann man Zerlegungsfolgen zur Berechnung des Unter– und Oberintegrals in $[a, c]$ wählen, bei denen b als Zerlegungspunkt vorkommt. Die entsprechenden Ober– und Untersummen zerfallen in naheliegender Weise in Anteile auf $[a, b]$ und $[b, c]$. Der eine Anteil konvergiert nach Voraussetzung nach $\int_a^b f(x)\,dx$, der andere nach $\int_b^c f(x)\,dx$. Aus der Konvergenz der Anteile folgt die Konvergenz der Summe. Der Grenzwert der Summe ist nach Konstruktion gerade $\int_a^c f(x)\,dx$. ■

Satz 3.43 Dreiecksungleichung. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Entsprechendes gilt bei lediglich beschränktem $f(x)$ für Ober– und Unterintegral.

Beweis: Wegen Satz 3.39 ist $|f(x)|$ Riemann–integrierbar. Es gilt $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ für alle $x \in [a, b]$. Aus der Monotonie des Integrals, Satz 3.35, folgt

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

und damit folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.44 Standardabschätzung. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar und es sei $K \ge 0$ so, dass $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a, b]$. Dann erhält man aus der Dreiecksungleichung und der Monotonie

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b K\,dx = K(b - a).$$

Ist nun $f(x)$ zusätzlich stetig und seien $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, dann folgt direkt aus der Monotonie des Integrals

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a).$$

Damit ist

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \in [m, M],$$

ein Element des Wertebereichs von $f(x)$. Nach dem Zwischenwertsatz wird dieser Wert von $f(x)$ auch angenommen. □

Satz 3.45 Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Beweis: Siehe Bemerkung 3.44. ■

Beispiel 3.46 Mittelwertsatz der Integralrechnung. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + 3\sin(\pi x)$ im Intervall $[0,2]$. Es gilt

$$\int_0^2 f(x)\ dx = \frac{8}{3}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es in $\xi \in [0,2]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. Abbildung 3.1 zeigt, dass es sogar drei dieser Argumente gibt. Der Mittelwertsatz besagt, dass die Fläche unter der Kurve $f(x)$ mit der Rechtecksfläche $(b-a)f(\xi) = 2f(\xi)$ übereinstimmt. □

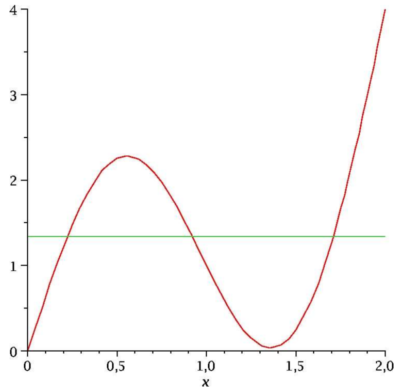

Abbildung 3.1: Illustration zu Beispiel 3.46.

Definition 3.47 Integralmittelwert mit Gewichtsfunktion. Für eine Riemann–integrierbare Funktion $g(x)$ mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ wird

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx}$$

als Integralmittelwert von $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ mit der Gewichtsfunktion $g(x)$ bezeichnet. □

Satz 3.48 Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Seien* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig, nichtnegativ und Riemann–integrierbar. Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx.$$

Beweis: Ähnlich wie Mittelwertsatz, Übungsaufgabe. ■

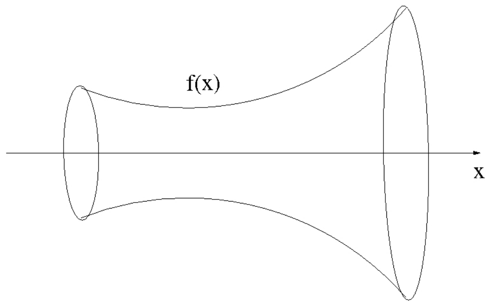

Abbildung 3.2: Rotationskörper.

Bemerkung 3.49 Anwendung des bestimmten Integrals: Volumen von Rotationskörpern. Betrachte eine Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Rotiert man diese Funktion um die x–Achse, so erhält man einen Rotationskörper, siehe Abbildung 3.2. Im Punkt $x \in [a, b]$ besitzt die Kreisfläche den Radius $f(x)$. Demzufolge hat die Kreisfläche den Inhalt $A(x) = \pi(f(x))^2$.

Das Volumen eines Rotationskörpers lässt sich nach dem Prinzip von Cavalieri[6] berechnen: Es ergibt sich durch Integration der Kreisflächeninhalte $A(x)$ in $[a, b]$

$$V = \int_a^b A(x)\ dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\ dx.$$

□

Beispiel 3.50 Kreiszylinder. Betrachte $f(x) = r$ im Intervall $[a, b]$. Die Rotation einer konstanten Funktion ergibt als Rotationskörper den Kreiszylinder. Das Volumen des Kreiszylinders ist nach der obigen Formel

$$V = \pi \int_a^b r^2\ dx = \pi r^2 (b - a),$$

also Grundfläche mal Höhe $h = b - a$. □

[6]Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647)