Kapitel 11

Lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

Bemerkung 11.1 Motivation. Bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen gibt es notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von lokalen Extrema:

- Sei $f\ :\ (a,b) \to \mathbb{R}$ in (a,b) stetig differenzierbar. Besitzt $f(x)$ in $\xi \in (a,b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(\xi) = 0$, Satz von Fermat[1], siehe Analysis I.
- Seien $f\ :\ (a,b) \to \mathbb{R}$ in (a,b) zweimal stetig differenzierbar, $\xi \in (a,b)$ und $f'(\xi) = 0$. Ist ξ ein lokales Minimum (beziehungsweise lokales Maximum), so gilt $f''(\xi) \ge 0$ (beziehungsweise $f(\xi) \le 0$), siehe Analysis I. Ist umgekehrt $f''(\xi) > 0$ (beziehungsweise $f''(\xi) < 0$), so ist ξ ein striktes lokales Minimum (striktes lokales Maximum).

In diesem Abschnitt werden ähnliche Aussagen im Fall skalarwertiger Funktionen mehrerer Variabler hergeleitet. □

Definition 11.2 (Strikte) Lokale Minima und Maxima. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\ :\ D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $\boldsymbol{\xi} \in D$ heißt lokales Minimum (beziehungsweise lokales Maximum), falls eine Umgebung $U \subset D$ existiert mit $f(\boldsymbol{\xi}) \le f(\mathbf{y})$ (beziehungsweise $f(\boldsymbol{\xi}) \ge f(\mathbf{y})$) für alle $\mathbf{y} \in U$. Tritt Gleichheit nur für $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}$ auf, heißt $\boldsymbol{\xi}$ striktes lokales Minimum (beziehungsweise striktes lokales Maximum). □

Für mehrdimensionale Definitionsbereiche gibt es ein analoges notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums.

Satz 11.3 Notwendige Bedingung für lokale Extrema. *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\ :\ D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in D. Hat $f(\mathbf{x})$ in $\boldsymbol{\xi} \in D$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$.*

Beweis: Für beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist

$$\varphi(t) := f(\boldsymbol{\xi} + t\mathbf{v})$$

in einer Umgebung von $t = 0$ erklärt und dort stetig differenzierbar. Ferner besitzt $\varphi(t)$ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Mit dem Satz von Fermat und der Kettenregel, Satz 10.23, gilt mit $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + t\mathbf{v}$

$$0 = \varphi'(0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial x_i}{\partial t} = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{v}.$$

[1] Pierre de Fermat (Ende 1607 oder Anfang 1608 – 1665)

Da dies für beliebige $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ gilt, ist $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$. ∎

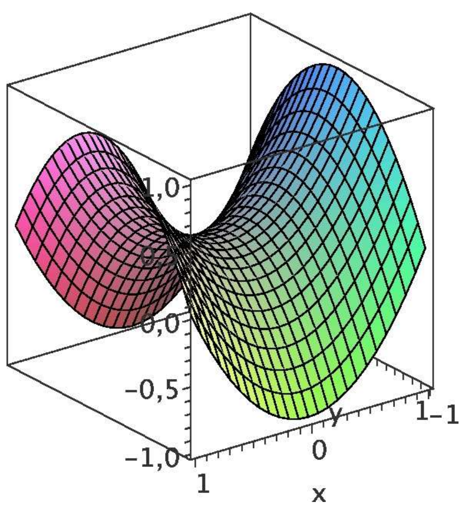
Bemerkung 11.4 Notwendige Bedingung für lokale Extrema.

- Ein Punkt $\boldsymbol{\xi} \in D$ mit $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ heißt auch stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$.
- Bei der Suche nach stationären Punkte muss man im Allgemeinen ein nichtlineares System von n Gleichungen mit n Unbekannten lösen.
  Betracht zum Beispiel die Funktion
  $$f(x, y) = e^{xy} + x^2 \sin y.$$
  Das zu lösende System zum Finden stationärer Punkte lautet
  $$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \sin y \\ xe^{xy} + x^2 \cos y \end{pmatrix}.$$
  Das sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Ähnlich wie bei Funktionen einer Variablen kann man hierbei Fixpunkt–Interationsverfahren, beispielsweise das Newton–Verfahren, einsetzen.
- Analog wie in einer Dimension ist nicht jeder stationäre Punkt ein lokales Extremum.

□

Beispiel 11.5 Sattelpunkt. Betrachte die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$



Die stationären Punkte erfüllen die Gleichung

$$\mathbf{0} = \nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der einzige stationäre Punkt. Allerdings existieren in jeder Umgebung um diesen stationären Punkt Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2),$$

zum Beispiel

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^2 > f(0,0) = 0 \quad \text{für } x \neq 0, \\ f(0,y) &= -y^2 < f(0,0) = 0 \quad \text{für } y \neq 0. \end{aligned}$$

Solche stationären Punkte nennt man Sattelpunkte.

□

Zur Klassifikation stationärer Punkte gibt es auch ein Analogon zum skalaren Fall.

Satz 11.6 Klassifikation stationärer Punkte. *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\boldsymbol{\xi} \in D$ sowie $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$. Dann gelten:*

i) Notwendige Bedingungen. Besitzt $f(\mathbf{x})$ in $\boldsymbol{\xi}$ ein lokales Minimum (beziehungsweise lokales Maximum), so ist die Hesse–Matrix $Hf(\boldsymbol{\xi})$ positiv semidefinit (beziehungsweise negativ semidefinit).

ii) Hinreichende Bedingungen.

a) Ist $Hf(\boldsymbol{\xi})$ positiv definit (beziehungsweise negativ definit), so besitzt $f(\mathbf{x})$ in $\boldsymbol{\xi}$ ein striktes lokales Minimum (beziehungsweise striktes lokales Maximum).

b) Ist $Hf(\boldsymbol{\xi})$ indefinit, so ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Sattelpunkt, das heißt in jeder Umgebung $U \subset D$ existieren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in U$ mit $f(\mathbf{y}) < f(\boldsymbol{\xi}) < f(\mathbf{z})$.

Beweis: *i).* Sei $\boldsymbol{\xi}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein lokales Minimum. Für $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach dem Satz von Taylor, Satz 10.40,

$$0 \le f(\boldsymbol{\xi} + \varepsilon\mathbf{v}) - f(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon\mathbf{v}^T \underbrace{\nabla f(\boldsymbol{\xi})}_{\mathbf{0}\text{ nach Vor.}} + \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{v}^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta\varepsilon\mathbf{v})\varepsilon\mathbf{v}$$

mit $\theta \in (0,1)$. Also ist $\mathbf{v}^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta\varepsilon\mathbf{v})\mathbf{v} \ge 0$. Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt

$$0 \le \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{v}^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta\varepsilon\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}^T Hf(\boldsymbol{\xi})\mathbf{v}.$$

Da $\mathbf{v}$ beliebig war, ist $Hf(\boldsymbol{\xi})$ somit positiv semidefinit.

ii, a). Sei $Hf(\boldsymbol{\xi})$ positiv definit. Da $f(\mathbf{x})$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist $Hf(\mathbf{x})$ auch in einer hinreichend kleinen Kugelumgebung $B(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ mit Radius ε und Mittelpunkt $\boldsymbol{\xi}$ positiv definit. Für $\mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{\xi}\}$ gilt also nach dem Satz von Taylor

$$f(\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{\xi}) = \underbrace{(\nabla f(\boldsymbol{\xi}))^T}_{=0}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}))(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}_{>0} > 0,$$

mit $\theta \in (0,1)$. Da $\mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{\xi}\}$ beliebig war, folgt aus $f(\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{\xi}) > 0$, dass $\boldsymbol{\xi}$ ein striktes lokales Minimum ist.

ii), b). Sei nun $Hf(\boldsymbol{\xi})$ indefinit. Dann existieren Eigenwerte λ_1, λ_2 von $Hf(\boldsymbol{\xi})$ mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ gelten also

$$\mathbf{v}^T Hf(\boldsymbol{\xi})\mathbf{v} > 0, \quad \mathbf{w}^T Hf(\boldsymbol{\xi})\mathbf{w} < 0.$$

Wie eben zeigt man, dass es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\xi} + \varepsilon\mathbf{v}) - f(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\varepsilon\mathbf{v})^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta_1\varepsilon\mathbf{v})\varepsilon\mathbf{v} > 0, \\ f(\boldsymbol{\xi} + \varepsilon\mathbf{w}) - f(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\varepsilon\mathbf{w})^T Hf(\boldsymbol{\xi} + \theta_2\varepsilon\mathbf{w})\varepsilon\mathbf{w} < 0 \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$. Somit ist $\boldsymbol{\xi}$ Sattelpunkt von $f(\mathbf{x})$. ■

Bemerkung 11.7 Implikationen. Nach Satz 11.6 gelten folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\xi} \text{ lokales Minimum} \arrow[d, Rightarrow] & \boldsymbol{\xi} \text{ striktes lokales Minimum} \arrow[l, Rightarrow] \\
Hf(\boldsymbol{\xi}) \text{ positiv semidefinit} & Hf(\boldsymbol{\xi}) \text{ positiv definit} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Keine Implikation ist umkehrbar! □

Beispiel 11.8 Betrachte die Funktion

$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x-1) \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der stationären Punkte setzt man den Gradienten zu Null. Insbesondere ist die zweite Komponente Null. Diese kann nur Null sein, wenn einer der Faktoren Null ist.

1. Fall. $x - 1 = 0$. Damit folgt $x = 1$. Einsetzen in die erste Komponente liefert $y^2 + 5 = 0$. Diese Gleichung besitzt keine reelle Lösung.

2. Fall. $y = 0$. Einsetzen in die erste Komponente ergibt $x(3x + 2) = 0$. Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2/3$.

Es gibt also 2 stationäre Punkte

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

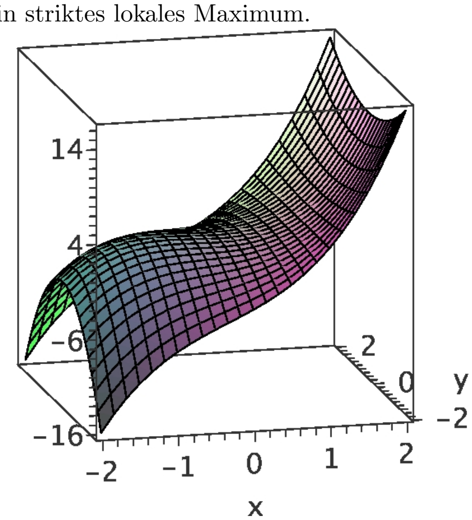
Zu ihrer Klassifikation wird noch die Hessematrix

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$$

ausgewertet

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Hf(-2/3,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrix ist indefinit, also ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Sattelpunkt. Die zweite Matrix ist negativ definit, also ist $\boldsymbol{\eta}$ ein striktes lokales Maximum.



□

Kapitel 12

Kurven und Bogenlänge

Bemerkung 12.1 Motivation. Der Begriff der Kurve in der Ebene oder im Raum spielt in den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, Technik (Robotik) und der Informatik (Computergrafik) eine tragende Rolle.

Neben der Berechnung von Flächen und Volumina ist die Definition und Ermittlung der Länge von Kurven eine weitere wichtige Anwendung der Integralrechnung. □

Definition 12.2 Parametrisierte Kurve. Eine (parametrisierte) Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} c \ : \ [a,b] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (c_1(t), \ldots, c_n(t))^T := \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deren Komponentenfunktionen $c_1, \ldots, c_n \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind. □

Definition 12.3 Differenzierbare Kurve, C^1–Kurve, Spur. Die Kurve $c(t)$ heißt differenzierbar beziehungsweise stetig differenzierbar oder C^1–Kurve, wenn alle Komponentenfunktionen $c_i(t)$ differenzierbar beziehungsweise stetig differenzierbar sind. Man definiert

$$\dot{c}(t) := \left(\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t), \ldots, \frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}(t) \right)^T.$$

Das Bild $c([a,b])$ heißt Spur von $c(t)$. □

Beispiel 12.4 C^1–Kurven.

1. Eine Ellipse mit Halbachsen a und b ist durch

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

definiert, siehe Abbildung 12.1. Aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt die Spurgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

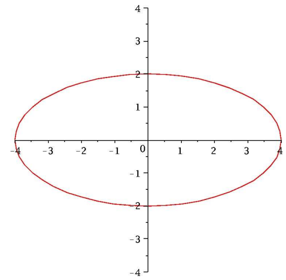


Abbildung 12.1: Ellipse mit $a = 4$ und $b = 2$.

2. Eine Zykloide, siehe Abbildung 12.2, ist eine sogenannte Rollkurve. Man lässt einen Kreis auf der x–Achse abrollen und betrachtet die Bahn eines Randpunktes dieses Kreises. Die Parameterdarstellung der Zykloiden ist

$$x(t) = t - \sin(t), \quad y(t) = 1 - \cos(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das ist eine Überlagerung der Bewegung des Mittelpunktes $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ und einer Kreisbewegung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$ im Uhrzeigensinn.

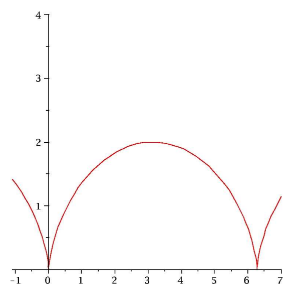


Abbildung 12.2: Zyklodide für Kreis mit Radius 1.

3. Eine Schraubenlinie in $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)^T, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben, siehe Abbildung 12.3. Das ist die Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der $x-y$–Ebene und einer linearen Bewegung in z–Richtung. □

Definition 12.5 Parameterwechsel, Umparametrisierung. Sind $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve $\tilde{c}(\tau) := c(h(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, dieselbe Spur und denselben Durchlaufsinn wie $c(t)$. Man nennt $t = h(\tau)$ einen Parameterwechsel oder eine Umparametrisierung. □

Bemerkung 12.6 Zum Parameterwechsel.

- Kurven, die durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

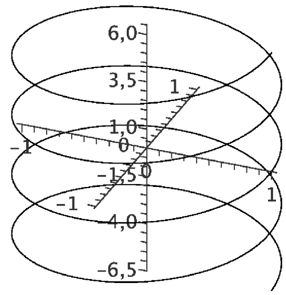


Abbildung 12.3: Schraubenlinie mit $r = 1$ und $h = 1/2$.

- Ist $c(t)$ stetig differenzierbar, so werden nur stetig differenzierbare Funktionen $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $h'(\tau) > 0$ als Parameterwechsel zugelassen (C^1–Parameterwechsel).
- Verschiedene Kurvenparametrisierungen können zur selben Spur führen, sich aber im Durchlaufsinn unterscheiden. Ein Beispiel dafür sind die folgenden Parametrisierungen des Einheitskreises

$$c_1(t) = (\cos t, \sin t)^T,\ t \in [0, 2\pi], \quad \text{und} \quad c_2(t) = (\cos t, -\sin t)^T,\ t \in [0, 2\pi].$$

□

Bemerkung 12.7 Approximation der Bogenlänge einer Kurve. Betrachte einen Kreis mit Radius $r > 0$. Um den Kreisumfang zu approximieren, kann man einbeschriebene regelmäßige 2^n-Ecke, $n \geq 2$, das heißt geschlossene Polygonzüge, betrachten. Ihre Umfänge S_n wachsen monoton in n und sind beispielsweise durch den Umfang eines umbeschriebenen Quadrats nach oben beschränkt. Dann existiert $\sup_{n \in \mathbb{N}}(S_n) = \lim_{n \to \infty} S_n$. Dieser Wert definiert den Kreisumfang.

Bei einer beliebigen Kurve $c(t)$ kann man analog vorgehen, indem man diese durch einen Polygonzug approximiert. Für eine Zerlegung

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$$

von $[a, b]$ ist die Länge des Polygonzugs gegeben durch

$$L(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|_2 = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i))^2}.$$

Dabei bezeichnen $c_j(t_i)$ die c_j–Komponente der Kurve im Parameterpunkt t_i. □

Definition 12.8 Länge, Rektifizierbarkeit einer Kurve. Es bezeichne $\mathcal{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve $c(t)$ rektifizierbar und

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}$$

heißt die Länge der Kurve $c(t)$. □

Satz 12.9 Länge von C^1–Kurven. *Jede C^1–Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 \ dt.$$

Beweis: Für jede Zerlegung Z gilt

$$\begin{aligned}
L(Z) &= \sum_{i=0}^{m-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|_2 = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i))^2} \\
&\overset{\text{MWS Diff. 1D}}{=} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\dot{c}_j(\tau_i)(t_{i+1} - t_i))^2} = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\dot{c}_j(\tau_i))^2}\, (t_{i+1} - t_i) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \|\dot{c}_j(\tau_i)\|_2\, (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

mit $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Nach Voraussetzung ist $\dot{c}_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, in $[a, b]$ stetig, also insbesondere gleichmäßig stetig. Daraus folgt, dass auch die Funktion $\|\dot{c}(t)\|_2$ gleichmäßig in $[a, b]$ stetig ist, da das Quadrat, die Summe und die Wurzel positiver stetiger Funktionen stetig sind, siehe auch Beispiel 3.25. Nach Satz 3.27 existiert $\int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 \; dt$. Die Summe $L(Z)$ ist eine Riemann–Summe dieses Integrals. Da das Integral existiert, folgt

$$\lim_{\delta(Z) \to 0} L(Z) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 \; dt,$$

wobei $\delta(Z)$ die Feinheit der Zerlegung Z ist. ■

Beispiel 12.10 Kreisumfang. Eine Parametrisierung des Kreises mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ ist

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Es gelten

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}, \quad \|\dot{c}(t)\|_2 = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = r.$$

Damit folgt für den Kreisumfang

$$L(c) = \int_0^{2\pi} r \; dt = 2\pi r.$$

□

Natürlich sollte die Bogenlänge einer Kurve nicht von der konkret gewählten Parametrisierung abhängen.

Lemma 12.11 Parametrisierungsinvarianz. *Die Länge einer C^1–Kurve ist parametrisierungsinvariant.*

Beweis: Mit einem C^1–Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $h(\tau) = t$ gilt aufgrund der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
L(c \circ h) &= \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{d\tau} c\,(h\,(\tau)) \right\|_2 \; d\tau \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_\alpha^\beta \left\| \dot{c}\,(h(\tau))\, h'(\tau) \right\|_2 \; d\tau \\
&\overset{h'(\tau)>0}{=} \int_\alpha^\beta \|\dot{c}\,(h(\tau))\|_2\, h'(\tau) \; d\tau = \int_{t=a}^{t=b} \|\dot{c}(t)\|_2 \; dt = L(c).
\end{aligned}$$

Man kann $h'(\tau)$ aus der Norm herausziehen, weil dies eine skalare Funktion ist. ■

Definition 12.12 Bogenlängenfunktion. Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Kurve. Die Funktion

$$s(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\|_2 \, d\tau, \quad t \in [a,b]$$

heißt Bogenlängenfunktion von $c(t)$. □

Bemerkung 12.13 Bedeutung der Bogenlängenfunktion. Die Bogenlängenfunktion gibt die Wegstrecke an, die man auf der Kurve zurücklegen muss, um vom Anfang der Kurve an den Punkt $c(t)$ zu gelangen. Reparametrisiert man eine Kurve mit ihrer Bogenlänge (Bogenlängenparametrisierung), so vereinfachen sich viele Formeln. □

Definition 12.14 Tangentialvektor, Tangenteneinheitsvektor. Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Kurve. Dann nennt man

$$\dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T$$

auch Tangentialvektor (Geschwindigkeitsvektor) der Kurve $c(t)$ an der Stelle t. Für $\dot{c}(t) \neq \mathbf{0}$ heißt

$$T_c(t) := \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|_2}$$

der Tangenteneinheitsvektor. □

Bemerkung 12.15 Bogenlängenparametrisierung, Krümmung. Bei Bogenlängenparametrisierung ist $\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$, das heißt $T_c(s) = \dot{c}(s)$ ist bereits Tangenteneinheitsvektor. Das erhält man aus der Ableitung von $c(t) = c(s(t))$ mittels Kettenregel

$$\dot{c}(t) = \dot{c}(s(t)) = \dot{c}(s)\dot{s}(t) = \dot{c}(s)\frac{d}{dt}\int_a^t \|\dot{c}(\tau)\|_2 \, d\tau = \dot{c}(s) \|\dot{c}(t)\|_2 .$$

Umstellen ergibt

$$\dot{c}(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|_2} \quad \Longrightarrow \quad \|\dot{c}(s)\|_2 = \frac{\|\dot{c}(t)\|_2}{\|\dot{c}(t)\|_2} = 1.$$

Aus

$$1 = \|\dot{c}(s)\|_2^2 = (\dot{c}_1(s))^2 + (\dot{c}_2(s))^2 + \ldots + (\dot{c}_n(s))^2$$

folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge s

$$0 = 2\dot{c}_1\ddot{c}_1 + 2\dot{c}_2\ddot{c}_2 + \ldots + 2\dot{c}_n\ddot{c}_n = 2\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{c}_1 \\ \vdots \\ \ddot{c}_n \end{pmatrix},$$

wobei $\cdot$ das Skalarprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Somit steht bei Bogenlängenparametrisierung der Beschleunigungsvektor $\ddot{c}(s)$ senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(s)$.

Man bezeichnet

$$N(s) := \frac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|_2}$$

als Hauptnormalenvektor von $c(t)$, und $\kappa(s) := \|\ddot{c}(t)\|_2$ als Krümmung von $c(t)$. □

Beispiel 12.16 Kreiskrümmung. Die Krümmung eines Kreises mit Radius r und dem Mittelpunkt (m_1, m_2) ist zu berechnen. Dazu wird zunächst die Bogenlängenparametrisierung des Kreises benötigt. Der Parameterbereich muss dabei von 0 bis $2\pi r$ (Umfang des Kreises) gehen. Man erhält

$$x(s) = m_1 + r\cos\frac{s}{r}, \quad y(s) = m_2 + r\sin\frac{s}{r}, \quad s \in [0, 2\pi r].$$

Es folgen

$$\dot{x}(s) = -\sin\frac{s}{r},\ \dot{y}(s) = \cos\frac{s}{r}, \quad \ddot{x}(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},\ \ddot{y}(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}.$$

Damit erhält man für die Krümmung

$$\kappa = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}.$$

□

Bemerkung 12.17 Krümmung bei allgemeinen C^1–Kurven. Allgemein gilt, dass die Krümmung den reziproken Radius des Kreises angibt, der sich an der Stelle t an die Kurve $c(t)$ anschmiegt (Schmiegkreis, auch Krümmungskreis). Der Schmiegkreis besitzt dieselbe Tangente und dieselbe Krümmung wie die Kurve an der Stelle $c(t)$. □