Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. M. Specovius–Neugebauer
Dr. V. John

Magdeburg, den 10.11.2000

Klausur zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei
$$f(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} - x^2 + 16y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 0\}.$$
Man berechne die kritischen Stellen, ihre Funktionswerte und ihren Typ.
6 Punkte

2. Man untersuche das Integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$
auf Konvergenz. **2 Punkte**

3. Man bestimme die Länge der Kurve mit der Parameterdarstellung
$$x = a\sin^3\phi, \quad y = a\cos^3\phi, \quad \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad a > 0.$$
5 Punkte

4. Man überprüfe, ob das Vektorfeld
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3y^2 + 5y + 1 \\ 2x^4y + 5x + 2 \end{pmatrix}$$
ein Gradientenfeld in $\mathbb{R}^2$ ist und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion.
3 Punkte

5. Man zeige, zum Beispiel mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Gleichung
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 20x$$
im Intervall $[0,1]$ genau eine Lösung besitzt. **4 Punkte**

6. Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt. Man bestimme den Gradienten der Abbildung

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \to \langle x^0, x \rangle^2, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ ist. **2 Punkte**

7. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall. Eine Funktion f heißt Lipschitz stetig (L–stetig) in I, falls eine Konstante $L < \infty$ existiert, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

a) Sei $f \in C^1([a, b])$ mit $\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = M$, wobei in den Randpunkten die einseitige Ableitung gemeint ist. Warum existiert das Maximum von f' in I ? Man zeige, daß f L–stetig ist mit $L = M$.

b) Wann ist eine Funktion gleichmäßig stetig ? Man zeige: ist f in I L–stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig. **6 Punkte**

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte.