Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. M. Specovius–Neugebauer
Dr. V. John

Magdeburg, den 30.06.2000

Klausur zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall. Eine Funktion f heißt Lipschitz stetig (L–stetig) in I, falls eine Konstante $L < \infty$ existiert, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

a) Sei $f \in C^1([a, b])$ mit $\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = M$, wobei in den Randpunkten die einseitige Ableitung gemeint ist. Welche Eigenschaften hat f ? Warum existiert das Maximum von f' in I ? Man zeige, daß f L–stetig ist mit $L = M$.

b) Wann ist eine Funktion gleichmäßig stetig ? Man zeige: ist f in I L–stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig. **6 Punkte**

2. Sei

$$f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 0\}.$$

Man berechne die kritischen Stellen, ihre Funktionswerte und ihren Typ.
6 Punkte

3. Man untersuche das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

auf Konvergenz. **2 Punkte**

4. Man zeige, zum Beispiel mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 11x$$

im Intervall $[0, 1]$ genau eine Lösung besitzt. **4 Punkte**

5. Man bestimme die Länge der Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x = a\cos^3\phi, \quad y = a\sin^3\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a > 0.$$

(ein Bogen einer Astroide) **5 Punkte**

6. Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt. Man bestimme den Gradienten der Abbildung

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \to \langle x^0, x \rangle^2, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ ist. **2 Punkte**

7. Man überprüfe, ob das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme gegebenenfalls die Stammfunktionen.
3 Punkte

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte.