Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 12.06.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 9

10.06. – 14.06.2002

Die Lösungen der Aufgaben 4 und 6 sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 19.06.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema

1. Welche der folgenden Mengen sind konvex:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}, \\ B &= [0,1]^2 \setminus [0,1/2)^2, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \le 1 \wedge \neg(y = 0 \wedge x \ge 0)\}? \end{aligned}$$

2. Man zeige: Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen aus $\mathbb{R}^n$ ist eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$.

3. Konvexität in Funktionenräumen kann man analog zur Konvexität in $\mathbb{R}^n$ definieren:
Eine Menge A des Funktionenraumes B heißt konvex, falls mit je zwei Funktionen $a, b \in A$ auch die Gesamtheit der Funktionen $\lambda a + (1-\lambda)b$, $\lambda \in [0,1]$, in A liegt.
Wir betrachten den Raum $C^0([a,b])$. Man zeige, daß

$$A = \{f \in C^0([a,b]) \ : \ \|f\|_{C^0([a,b])} \le 1\}$$

eine konvexe Menge in $C^0([a,b])$ ist.

4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x^{(0)} \in G$ ein lokales Maximum von f. Man zeige, daß dann $\mathrm{Hess} f(x^{(0)})$ negativ semidefinit ist.
Hinweis: Indirekter Beweis mit Taylorreihe. Dazu zeige man, daß aus $a^T Hess\ f(x) \cdot a > 0$ folgt, daß ein $\lambda > 0$ unabhängig von der Länge von a so existiert, so daß $a^T Hess\ f(x) \cdot a > \lambda \|a\|^2$. **4 Punkte**

5. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Die Funktion f wird konvex in G genannt, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in G$, $x_0 \ne x_1$ und für $t \in (0,1)$ gilt

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1).$$

(Definition analog zu $n = 1$).
Man zeige, daß f konvex in G ist genau dann, wenn Hess $f(x)$ für alle $x \in G$ positiv semidefinit ist.
Hinweis: Man führe die Behauptung auf den bekannten Sachverhalt in einer Dimension zurück (Satz 13.13). Dazu zeige man, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jede normierte Richtung a gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x) = a^T Hess\ f(x) \cdot a.$$

6. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b}$$

mit $a, b, x, y, z > 0$. Man zeige, daß f im Definitionsbereich konvex ist. Dann bestimme man alle lokalen Extremstellen und ihre Art. **6 Punkte**

Die 2. Leistungskontrolle findet am Donnerstag, dem 27.06.2002, im Raum 05/211 von 13 - 15 Uhr statt. Es wird um pünktliches Erscheinen gebeten (einige Minuten vor 13.15 Uhr).
Die mündlichen Prüfungen werden vom 30.07. – 01.08.2002 abgenommen.