Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 07.05.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 4

06.05. – 10.05.2002

Die Lösung der Aufgaben 5, 6 und 7 sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 15.05.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Das Riemann–Integral

1. Man zeige, daß für das Oberintegral gilt

$$\int_a^{*b} (f+g)(x)dx \leq \int_a^{*b} f(x)dx + \int_a^{*b} g(x)dx.$$

2. Aus der Vorlesung ist folgender Sachverhalt bekannt (Satz 15.23 (b)): Sind f und g beide Riemann–integrierbar und gilt $f(x) = g(x)$ auf einer dichten Teilmenge $D \subset [a,b]$ für alle $x \in D$, so folgt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

   Man folgere daraus, daß $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ in $[0,1]$ nicht Riemann–integrierbar ist.

3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar. Man beweise

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

   mit Hilfe

   - der Riemannschen oder Ober–/Untersumme,
   - der Dreiecksungleichung,
   - der Stetigkeit des Betrages.

4. Man beweise den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, f stetig in $[a,b]$, und $g(x) \geq 0$ in $[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so daß

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

5. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Desweiteren gebe es einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Man zeige, daß dann

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

   Hinweis: Mittelwertsatz. **5 Punkte**

6. Man berechne
$$\int_a^b e^x dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$
mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion und begründe den Lösungsweg. **2 Punkte**

7. Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Man berechne $\|f\|_{L^p}$ für $1 \le p < \infty$ und $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$. **3 Punkte**