Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 23.04.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 3

22.04. – 26.04.2002

Die Lösung der Aufgaben 2 und 3 sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 08.05.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Das Riemann–Integral

1. Es bezeichne $[y]$ den ganzzahligen Anteil von y. Man berechne

$$a) \quad \int_0^1 \frac{[kx]}{k} dx,\ k \in \mathbb{N}, \quad b) \quad \int_0^1 \frac{[kx^2]}{k} dx,\ k \in \mathbb{N}.$$

   Für $k \in \{1, 2\}$ gebe man die konkreten Integralwerte an.

2. Man untersuche die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ im Intervall $(0, 1)$ auf Beschränktheit, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit. **4 Punkte**

3. Seien $f(x) = 1/x$ und $\varepsilon > 0$.
   - Ist $f(x)$ in $[\varepsilon, 1]$ integrierbar ? (Begründung !)
   - Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = 1/k$. Man zerlege

$$\left[\frac{1}{k}, 1\right] = \bigcup_{l=1}^{k-1} \left[\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$$

     und gebe eine Formel für die Untersumme $s(Z_k, f)$ bezüglich dieser Zerlegung Z_k an.
   - Was läßt sich aus dem Verhalten der Untersummen für

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$$

     folgern ?

   6 Punkte

4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$. Bei der Rotation von f um die x–Achse entsteht ein sogenannter Rotationskörper. Eine Formel zur Volumenberechnung von Rotationskörpern kann man mit Unter– und Obersummen von Volumina von Kreiszylindern herleiten, wobei die Herleitung analog ist zur Herleitung des bestimmten Integrales.

- Es sei bekannt, daß das Volumen eine Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h gleich $V_z = \pi r^2 h$ ist (Grundfläche mal Höhe). Man leite damit eine Berechnungsformel für das Volumen des von f erzeugten Rotationskörpers her.

  Sei $[a, b] = [0, H]$ und $f(x) = \alpha x$. Welcher Rotationskörper wird von f erzeugt und wie groß ist sein Volumen ?

5. Seien $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit nicht negativen Gliedern. Die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei konvergent und die Folge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Man zeige

$$\limsup_{k\to\infty} a_k b_k = \lim_{k\to\infty} a_k \limsup_{k\to\infty} b_k.$$