Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 16.04.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 2

15.04. – 19.04.2002

Die Lösung der Aufgaben 1 und 4, Abschnitt Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 24.04.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Lokale Extrema, Mittelwertsatz, Konvexität

1. Sei $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ stetig und in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ stetig differenzierbar. Desweiteren existiere $\lim_{x \to x_0} f'(x)$. Man zeige, daß f dann stetig differenzierbar in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ ist.
   Hinweis: Man nutze den Mittelwertsatz.

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

1. Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_k\}$ mit
$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k^2}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1].$$
   - Man untersuche die punktweise Konvergenz von $\{f_k\}$ für $k \to \infty$ und berechne den Grenzwert f.
   - Man zeige $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ gleichmäßig in $C^0([-1, 1])$.
     Hinweis: Man erweitere den zu untersuchenden Ausdruck mit dem "konjugierten Ausdruck".
   - Man zeige, daß jede der Funktionen f_k in $[-1, 1]$ stetig differenzierbar ist.
   - Konvergiert $\{f_k\}$ gegen f auch in $C^1([-1, 1])$? (Begründung !) **6 Punkte**

2. Das Polynom $\sum_{k=0}^4 a_k z^k$ soll in ein Polynom der Form $\sum_{k=0}^4 b_k (z-1)^k$ umgeformt werden, so daß
$$\sum_{k=0}^4 a_k z^k = \sum_{k=0}^4 b_k (z-1)^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
   (Verschiebung des Entwicklungspunktes). Man gebe die allgemeinen Bestimmungsgleichungen für $(b_0, \ldots, b_4)$ an. Für $(a_0, \ldots, a_4) = (1, 1, 1, 1, 1)$ löse man diese Gleichungen.

3. Für die Potenzreihe
$$\sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_0)^k$$
   existiere
$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = q < \infty.$$
   Man zeige, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich q ist.
   Hinweis: Man zeigt, daß der Konvergenzradius zum einen mindestens q ist und zum anderen höchstens q ist.

4. Die Funktion

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$$

wird Besselfunktion nullter Ordnung genannt. Man bestimme den Konvergenzradius von $J_0(x)$. Man zeige, daß $J_0(x)$ die Differentialgleichung

$$x J_0'' + J_0' + x J_0 = 0$$

erfüllt (Besselsche Differentialgleichung). **4 Punkte**

Das Riemann–Integral

1. Man zerlege das Polynom

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

in irreduzible Faktoren.
Hinweis: Es existiert eine doppelte Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Q}$
Nun berechne man die Koeffizienten a, b, c, d der Partialbruchzerlegung

$$\frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} = \frac{a}{x - x_0} + \frac{b}{(x - x_0)^2} + \frac{c + dx}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

(x_0, α, β erhält man aus dem ersten Teil der Aufgabe.)