Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John
DM G. Matthies

Magdeburg, 2. November 2001

Musterlösungen

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis II
Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

1 Aufgaben zur Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle a differenzierbar. Man beweise:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Folgt aus der Existenz des Grenzwertes die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle a?

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] + [f(a) - f(a-h)]}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Voraussetzung existieren beide Grenzwerte und es ist

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= f'(a) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} &\overset{h=-\bar{h}}{=} \lim_{\bar{h}\to 0} \frac{f(a) - f(a+\bar{h})}{-\bar{h}} = \lim_{\bar{h}\to 0} \frac{f(a+\bar{h}) - f(a)}{\bar{h}} = f'(a) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (1) = \dfrac{1}{2}(f'(a) + f'(a)) = f'(a).$

Die Existenz des Grenzwertes impliziert nicht die Differenzierbarkeit von f an der Stelle a, zum Beispiel: $f(x) = |x|$, $a = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \frac{h-h}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} = 0.$$

Aber: $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $a = 0$ **nicht** differenzierbar. ■

2. Man berechne den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x^x.$$

Lösung: Sei $f(x) = x^x \quad \to \quad \ln f(x) = x \ln x = g(x)$.

Betrachte $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Bernoulli-l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x}x^2 = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0.$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{g(x)} = e^0 = 1.$$ ∎

3. Man zeige, daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

Lösung: Es gilt:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} x \sin\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ $\quad$, da $\sin\frac{1}{x}$ beschränkt und $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\left(x \sin\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x \sin\tfrac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

Anmerkung: Bernoulli-l'Hospital kann angewendet werden, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert!

Die Existenz dieses Grenzwertes ist nicht immer gegeben.

4. Man berechne $y = \frac{dy}{dx}$ für die implizit gegebenen Funktion $(x+y)e^y + x - 3 = 0$.

Lösung : Nach x ableiten liefert:

$$\begin{aligned} (1+y')e^y + (x+y)y'e^y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad y'(e^y + (x+y)e^y) + e^y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad y' &= -\frac{e^y+1}{e^y(1+x+y)} \end{aligned}$$

∎

5. Man berechne $y = \frac{dy}{dx}$ für die Funktion $y = x^x$.

Hinweis: Zunächst die Gleichungen logarithmieren, zur Ableitung von $\ln y(x)$ *die Kettenregel verwenden.*

Lösung:

$$\begin{array}{rrcll} & \ln y & = & \ln x^x & = \; x \ln x \\ \overset{differenzieren}{\Rightarrow} & \frac{y'}{y} & = & \ln x + \frac{x}{x} & = \; \ln x + 1 \\ \Rightarrow & y' & = & y(\ln x + 1) & = \; x^x(\ln x + 1) \end{array}$$

<u>allgemein:</u> $\quad y = f(x)^{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = g(x) \ln f(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right)$$

∎

2 Aufgaben zur Integralrechnung in $\mathbb{R}$

1. Die Funktion f sei stetig in $[a,b]$, es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Man beweise, daß $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gelten muß.

Lösung: indirekter Beweis:
Sei $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)dx = 0$ und es gibt ein $z \in (a,b)$ mit $f(z) = y > 0$.
Da f stetig ist, gibt es um z eine Umgebung $(z-\delta, z+\delta) \subset (a,b)$ mit $\delta > 0$, in der $f(x) \geq \frac{1}{2}y$.
Für das Integral ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{z-\delta} f(x)dx + \int_{z-\delta}^{z+\delta} f(x)dx + \int_{z+\delta}^b f(x)dx \\
&\geq 0 + 2\delta \cdot \frac{y}{2} + 0 \\
&= \delta \cdot y \neq 0 \qquad \text{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn die Funktion f an den Endpunkten a oder b des Intervalls einen Funktionswert besitzt, der größer als Null ist, dann muß im obigen Beweis eine einseitige Umgebung betrachtet werden.

■

2. Man ermittle, für welche $x > 0$

$$\int_2^x \frac{dt}{4t - t^2} = -\frac{1}{4}\ln 3$$

gilt?

Lösung: Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{4t-t^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-4}$

$t = 0$: $\quad -1 = A \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{4}$

$t = 4$: $\quad -1 = B \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{dt}{4t-t^2} &= \frac{1}{4}\int_2^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int_2^x \frac{dt}{t-4} \\
&= \frac{1}{4}\Big[\ln|t|\Big]_2^x - \frac{1}{4}\Big[\ln|t-4|\Big]_2^x \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2| - \frac{1}{4}\ln|x-4| + \frac{1}{4}\ln|-2| \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|
\end{aligned}$$

Es soll gelten:

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| = \int_2^x \frac{dt}{4t-t^2} = -\frac{1}{4}\ln 3$$

$$\Rightarrow \quad 3 = \left|\frac{x-4}{x}\right|$$

Fallunterscheidung:

(a) Fall: $\dfrac{x-4}{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-4}{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = 3x \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Dieser Wert liegt aber nicht im betrachteten Bereich $x > 0$

(b) Fall: $\frac{x-4}{x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{x} = -3 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = -3x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Dieser Wert liegt im Intervall

Probe:

$$\begin{aligned}
\int_2^1 \frac{dt}{4t - t^2} &= \frac{1}{4}\Big[\ln|t|\Big]_2^1 - \frac{1}{4}\Big[\ln|t-4|\Big]_2^1 \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln|1| - \ln|2| - \ln|3| + \ln|-2|\right) \\
&= -\frac{1}{4}\ln 3
\end{aligned}$$

■

3. Man berechne das folgende Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx, \qquad \text{(Subst. } x = \cos t\text{).}$$

Lösung: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$ (Subst. $x = \cos t$)

$x = \cos t \quad \Rightarrow \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$dx = -\sin t\ dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = -\sin t, \quad \text{da} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin t)(-\sin t)\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\ dt$$

setze $u = \sin t \quad \Rightarrow \quad u' = \cos t, \quad v' = \sin t \quad \Rightarrow \quad v = -\cos t$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\ dt = \big[-\sin t\ \cos t\big]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\ dt = 0 - 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1 - \sin^2 t\ dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1\ dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}$$

■

4. Sei f eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$. Die Umkehrfunktion von f sei f^{-1}. Man zeige, daß für beliebige $a, b \geq 0$, für die die beiden Integrale existieren, die Ungleichung

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \tag{2}$$

gilt. Hinweis: Eine einfache Lösung ergibt sich durch eine geometrische Interpretation der auftretenden Terme als Flächeninhalte. Welche bekannte Ungleichung erhält man für den Spezialfall $f(x) = x^{p-1}$, $p > 1$?

Lösung: Die rechte untere Fläche in Abbildung 1 (links) entspricht ersten Integral in (2). Auf Grund der Definition der Umkehrfunktion kann die linke obere Fläche mit dem zweiten Integral in (2) identifiziert werden. Wie der Abbildung 1 zu entnehmen ist, ist die Fläche des Rechtecks mit den Kantenlängen a und b kleiner oder höchtens gleich der Summe der Flächen, die den Integralen entsprechen.

Für die Funktion $f(x) = x^{p-1}$ ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = x^{1/(p-1)}$. Für die Integrale erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^a x^{p-1}\,dx &= \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a = \frac{a^p}{p} \\ \int_0^b x^{1/(p-1)}\,dx &= \frac{1}{\frac{1}{p-1}+1} x^{\frac{1}{p-1}+1} = \left.\frac{p-1}{p} x^{\frac{p}{p-1}}\right|_0^b = \frac{p-1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in unsere Ungleichung ein, dann ergibt sich die sogenannte YOUNGsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

wobei wir $q = p/(p-1)$ gesetzt haben. Die beiden Exponenten p und q genügen der Beziehung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und heißen konjugierte Exponenten. ■

5. Man bestimme den Flächeninhalt der im folgenden charakterisierten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$A \text{ ist begrenzt von } x = 2a \text{ und } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösung: Aus Symmetrie-Gründen ergibt sich die gesuchte Fläche aus der Verdoppelung der Fläche der oberen Hälfte. Durch Umstellen der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nach y ergibt sich für den oberen Teil der Kurve $y = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$ und wir erhalten

$$A = 2\int_a^{2a} b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\,dx.$$

Die Substitution $x = a\,t$ (mit $dx = a\,dt$) liefert unter Beachtung der mittransformierten Grenzen

$$A = 2\,ab\int_1^2 \sqrt{t^2 - 1}\,dt.$$

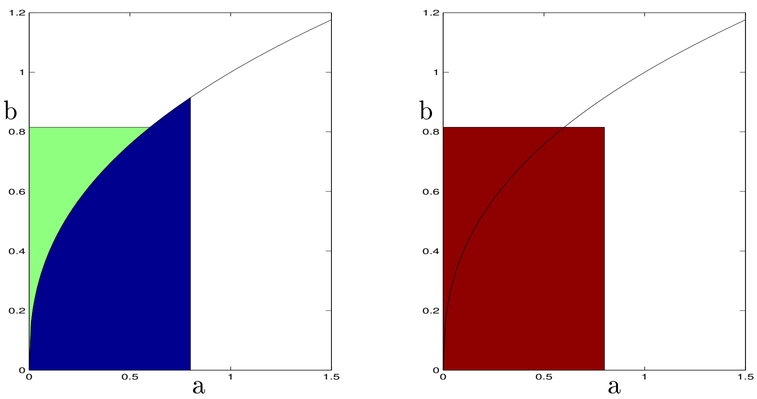

Abbildung 1: Integrale als Flächen (links), Rechteck mit den Kantenlängen a und b (rechts)

Für das verbliebene Integral ist auf Grund seiner Struktur die Substitution $t = \cosh(s)$ (mit $dt = \sinh(s)\,ds$) sinnvoll. Wir erhalten nach Umrechnung der Integrationsgrenzen

$$A = 2\,ab \int\limits_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{\cosh^2(s) - 1}\,\sinh(s)\,ds = 2\,ab \int\limits_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \sinh^2(s)\,ds,$$

wobei wir die Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ausgenutzt haben. Mit Hilfe der Definition des Sinushyperbolikus

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

läßt sich das Integral zu

$$A = 2\,ab \int\limits_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{e^{2s} - 2 + e^{-2s}}{4}\,ds$$

weiter umformen. Dieses Integral ist nun leicht lösen und wir erhalten

$$A = \frac{1}{2}\,ab\left[\frac{1}{2}e^{2s} - 2s - \frac{1}{2}e^{-2s}\right]\Bigg|_{s=0}^{\ln(2+\sqrt{3})}.$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,ab\left[\frac{1}{2}e^{2\ln(2+\sqrt{3})} - 2\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}e^{-2\ln(2+\sqrt{3})}\right] - \frac{1}{2}\,ab\underbrace{\left[\frac{e^0}{2} - 0 - \frac{e^0}{2}\right]}_{=0}\\
&= \frac{1}{4}\,ab\left[(2+\sqrt{3})^2 - 4\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}\,ab\left[(2+\sqrt{3})^2 - 4\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}\,ab\left(4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4\ln(2+\sqrt{3}) - (4 - 4\sqrt{3} + 3)\right)\\
&= \frac{1}{4}\,ab\,(8\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}))\\
A &= ab\,(2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})).
\end{aligned}$$

■

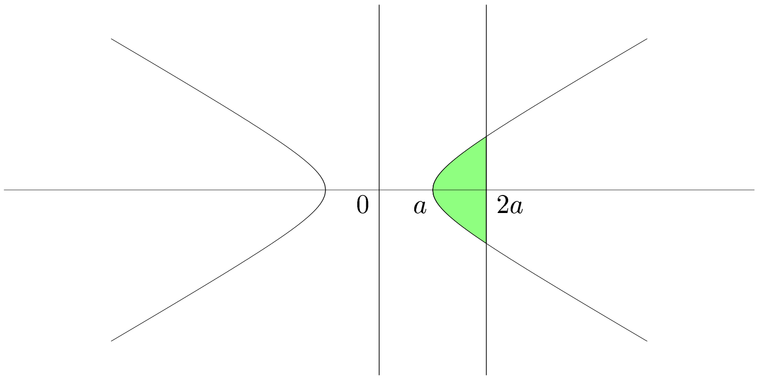

Abbildung 2: Fläche des markierten Bereiches ist zu bestimmen

3 Aufgaben zur Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

1. Man bestimme die Determinanten der Jakobi-Matrix bei der Transformation auf

   (a) Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

   (b) Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

   (c) Kugelkoordinaten: $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$

   Lösung:

   (a) Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

   (b) Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

   (c) Kugelkoordinaten: $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\vartheta \\ y_r & y_\varphi & y_\vartheta \\ z_r & z_\varphi & z_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)(-r\sin\vartheta) + (-r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta)\cos\vartheta \\ &= -r^2\sin^2\vartheta\sin\vartheta - r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta \\ &= -r^2\sin\vartheta\ . \end{aligned}$$

■

4 Aufgaben zur Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

1. Man berechne

$$\iint\limits_\Omega \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy,$$

   wobei Ω durch $x = 2,\ y = x,\ xy = 1$ begrenzt wird.

   Lösung:

$$\begin{aligned} \iint\limits_\Omega \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy &= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy \right) dx = \int\limits_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=1/x}^{y=x} dx \\ &= \int\limits_1^2 -\frac{x^2}{x} + x^3\, dx = \int\limits_1^2 -x + x^3\, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = -2 + 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2.25\,. \end{aligned}$$

■