Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 23.05.2002

Leistungskontrolle Nr. 1 zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	erreichte Punkte
1	8	
2	7	
3	6	
4	6	
5	8	
6	15	
7	4	
8	8	
9	3	
10	6	
Summe	71	

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man bestimme den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\sqrt{k+1}}{2k+1} z^{k-1}$$

und untersuche die Konvergenz in den Punkten $-\rho$ und ρ. **8 Punkte**

2. Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

   - Was bedeutet es, daß f in I Lipschitz–stetig ist ?
   - Was bedeutet es, daß f in I gleichmäßig stetig ist ?
   - Man zeige, ist f in I Lipschitz–stetig, so ist f in I auch gleichmäßig stetig. **7 Punkte**

3. Wir betrachten die Funktionenfolge $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{x}{k}\right).$$

Man untersuche die punktweise Konvergenz für festes $x \in \mathbb{R}$ von $\{f_k(x)\}$ für $k \to \infty$. Konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig in einem gegebenen kompakten Intervall $[a, b]$? Konvergiert die Funktionenfolge auch gleichmäßig in $\mathbb{R}$? **6 Punkte**

4. Konvergiere $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ in einem Intervall I gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, daß $\{\varphi \circ f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in I gegen $\varphi \circ f$ konvergiert. **6 Punkte**

5. Seien Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und f eine auf $[a, b]$ definierte beschränkte Funktion. Man definiere die Begriffe Untersumme, Obersumme und Riemannsche Summe von f bezüglich Z. Man definiere mit diesen Begriffen die Riemann–Integrierbarkeit von f. **8 Punkte**

6. Man berechne

$$\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx,$$

5 Punkte

$$\int \sin(2x) \exp(-3x) dx,$$

5 Punkte

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}.$$

5 Punkte

7. Man bestimme $p > 1$, so daß

$$\int_1^p \frac{dx}{x} = \int_1^p \log(x) dx.$$

4 Punkte

8. Man berechne $\| \sin(x)\|_{C^0([0,2\pi])}$, $\| \sin(x)\|_{C^1([0,2\pi])}$, $\| \sin(x)\|_{L^1([0,2\pi])}$ und $\| \sin(x)\|_{L^2([0,2\pi])}$. **8 Punkte**

9. Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ Riemann–integrierbar und sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die Funktion $F_u(x)$ ist durch

$$F_u(x) = \int_x^b f(t) dt$$

gegeben. Man berechne die erste Ableitung von $F_u(x)$. **3 Punkte**

10. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \le 0$ für alle $x \in [a, b]$. Desweiteren gebe es einen Punkt $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) < 0$. Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, daß dann

$$\int_a^b f(x) dx < 0.$$

6 Punkte