Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Magdeburg, den 05.05.2000

Klausur zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man berechne den Grenzwert der Folge
$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$
1 Punkt

2. Man zeige: Eine stetige Funktion
$$f : [a,b] \to [a,b]$$
hat mindestens einen Fixpunkt $\xi \in [a,b]$. **3 Punkte**

3. Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz (mit Hilfe von in der Vorlesung gezeigten Konvergenzkriterien)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi} n}{(n+17)\exp(1)} \right)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
Ist die letzte Reihe absolut konvergent ? **4 Punkte**

4. Für $x \in \mathbb{R}_+$ berechne man: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$. **3 Punkte**

5. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}.$$
2 Punkte

6. Man untersuche die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ im Intervall $(0,1)$ auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit. **4 Punkte**

7. Man zeige
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$
3 Punkte