Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Magdeburg, den 22.01.2000

Klausur zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. a) Mit vollständiger Induktion zeige man die Richtigkeit der Bernoullischen Ungleichung:
   Für $a \in \mathbb{R}, a > -1, n \in \mathbb{N}$ gilt
   $$(1+a)^n \geq 1 + na. \tag{1}$$
   b) Man charakterisiere die Menge aller (a, n), so daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt. **4 Punkte**

2. Sei
   $$x_n = \begin{cases} 1 & n = 2k, k \geq 1 \\ \dfrac{n+100}{2n} & n = 4k-1, k \geq 1 \\ -\dfrac{n+240}{4n} & n = 4k-3, k \geq 1. \end{cases}$$
   Man berechne $\inf(x_n)$, $\sup(x_n)$, $\liminf(x_n)$, $\limsup(x_n)$ und gebe die Menge der Häufungspunkte an. **5 Punkte**

3. Man untersuche
   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$
   auf Stetigkeit in $(0,0)$. **2 Punkte**

4. Im metrischen Raum (E, d) wird der Abstand eines Punktes x von der Menge M definiert durch
   $$d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y).$$
   a) Man zeige, daß für beliebige $x, y \in E$ und $M \neq \emptyset$
   $$|d(x,M) - d(y,M)| \leq d(x,y)$$

gilt.

b) Sei $M \neq \emptyset$ und M abgeschlossen in (E, d). Man zeige, daß dann

$$x \in M \Longleftrightarrow d(x, M) = 0 \tag{2}$$

gilt.

c) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß für den Fall von nicht abgeschlossenen Mengen (2) nicht notwendig gilt. **6 Punkte**

5. Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz (mit Hilfe von in der Vorlesung gezeigten Konvergenzkriterien)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 2^n}.$$

3 Punkte