Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 09.01.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 11

14.01. – 18.01.2002

Die Lösung der Aufgabe 1, Abschnitt Konvergenz von Reihen, und der Aufgabe 2, Abschnitt Stetige Abbildungen und Funktionen, sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 17.01.2002, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Konvergenz von Reihen

1. Mit Hilfe der Eulerschen Identität

   $$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

   und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

   $$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w) \forall\ w, z \in \mathbb{C}$$

   leite man Additionstheoreme für $\sin(z+w)$ und $\cos(z+w)$ her. **3 Punkte**

2. Mit Hilfe der Reihendarstellung der Winkelfunktionen beweise man

   $$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{C}.$$

   Hinweis: Die Herleitung ist analog zum Beweis von Folgerung 9.19. Sie dient der Übung des Rechnens mit Reihen und des binomischen Lehrsatzes. Die Lösung dieser Aufgabe wird aus Zeitgründen in der Übung nicht besprochen.

3. Gegeben sei die Menge $\{a_{i,k}\ :\ i, k \in \mathbb{N}\}$ definiert durch

   $$a_{ik} = \begin{cases} 0 & i \le k \\ 1 & i > k. \end{cases}$$

   Man berechne

   $$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{i\to\infty} a_{ik}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{ik}\right).$$

Stetige Abbildungen und Funktionen

1. Man untersuche die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, auf Stetigkeit im Punkte $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0, \end{cases} \\
f_3(x) &= \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hinweis: Für $f_2(x), f_3(x)$ nehme man die Reihendarstellung der Sinus– bzw. der Exponentialfunktion und verfahre wie im Stetigkeitsbeweis für die Exponentialfunktion.

2. Man finde alle Stetigkeitsstellen der Dirichletschen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \neq \mathbb{Q}. \end{cases}
$$

2 Punkte

3. Man gebe ein Beispiel dafür an, daß das Bild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht offen sein muß.
Hinweis: Man betrachte beispielweise eine periodische Funktion.

4. Banachscher Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Lipschitz stetige Funktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Man zeige:

   a) Die Fixpunktgleichung
   $$f(x) = x$$
   hat genau eine Lösung $\xi \in [a, b]$.

   b) Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, die durch die Vorschrift
   $$x_{k+1} = f(x_k)$$
   gebildet wird, konvergiert gegen ξ und es gilt
   $$|x_k - \xi| \leq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{1 - L} \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

Hinweis: Man zeige zunächst die Beziehungen

$$|x - y| \leq \frac{1}{1 - L} \left(|x - f(x)| + |y - f(y)|\right) \quad \forall x, y \in [a, b]$$

und

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

Damit kann man zeigen, daß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge ist. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes und die Abschätzung aus Aufgabe b) sind einfache Konsequenzen dieser beiden Abschätzungen.