Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 18.12.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 10

07.01. – 11.01.2002

Die Lösung der Aufgabe 2 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 10.01.2002, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Konvergenz von Reihen

1. Man beweise das Wurzelkriterium. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

   i) Gibt es ein q mit $0 \le q < 1$ sowie ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \ge k_0$ gilt
   $$\sqrt[k]{a_k} \le q,$$
   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

   ii) Gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \ge k_0$ gilt
   $$1 \le \sqrt[k]{a_k},$$
   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

   Hinweis: Zum Beweis der ersten Aussage nutze man das Majorantenkriterium und die geometrische Reihe.

2. Man untersuche die folgenden Reihen, mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Kriterien, auf Konvergenz:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}.$$

5 Punkte

3. Man bestimme die Summe der Reihen
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

4. Man untersuche die folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

5. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Man zeige: Die Reihe ist alternierend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (b) Man zeige $a_{2k} + a_{2k+1} > \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$ und beweise mit Hilfe dieser Ungleichung die Divergenz der Reihe.

   (c) Warum ist das Leibniz–Kriterium nicht anwendbar ?

6. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

und daß diese Reihe nicht absolut konvergent ist. Man finde eine Umordnung der Reihe, sodaß der Reihenwert $1.5\ln(2)$ beträgt.
Hinweis: Man kann wie folgt vorgehen: Man setze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

und betrachte dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n.$$