Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 11.12.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 9

17.12. – 21.12.2001

Die Lösung der Aufgabe 4 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 20.12.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Konvergenz und Vollständigkeit in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}$

1. Man zeige, daß die durch
$$a_1 := 1 \qquad a_{n+1} := \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$
gegebene Folge (a_n) konvergiert und ermittle den Grenzwert.

2. Für $x \in \mathbb{R}_+$ berechne man: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$. Hierbei ist $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$.

3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit dem Grenzwert 0 und sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Man zeige, daß dann
$$\lim_{k\to\infty} (a_k c_k) = 0.$$

4. Man bestimme Häufungspunkte, $\liminf\limits_{n\to\infty}, \limsup\limits_{n\to\infty}, \sup\limits_n$ und $\inf\limits_n$ der Folge:
$$x_n = \left(\frac{(-1)^n - 1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$
5 Punkte

5. Man zeige, daß für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ aus den beiden Aussagen *"In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy–Folge konvergent."* und *"Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt."* (Archimedische Eigenschaft) das Vollständigkeitsaxiom *"Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$."* folgt.

6. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen und es gelte nicht gleichzeitig
$$\limsup_{k\to\infty}(a_k) = \infty \,, \limsup_{k\to\infty}(b_k) = -\infty \quad \text{oder} \quad \limsup_{k\to\infty}(a_k) = -\infty \,, \limsup_{k\to\infty}(b_k) = \infty.$$
Man zeige, daß dann
$$\limsup_{k\to\infty}(a_k + b_k) \le \limsup_{k\to\infty}(a_k) + \limsup_{k\to\infty}(b_k).$$
Man gebe ein Beispiel an, bei dem die Gleichheit nicht gilt.