Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 6.12.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 8
10.12. – 14.12.2001

Die Lösung der Aufgabe 2 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 13.12.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im $\mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige, daß

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda\, a_k) = \lambda \left(\lim_{k\to\infty} a_k \right)$$

gilt.

2. Man berechne die Grenzwerte der Folgen

   a) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

   b) $c_n = n \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{b}{n}\right)} \right)$.

5 Punkte

3. Mit Hilfe von Satz 7.12 zeige man, daß für eine beliebige Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) die Beziehung

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

gilt.

4. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert a. Weiterhin seien M_1 und M_2 Konstanten.

   a) Man zeige, daß aus

$$M_1 \leq a_k \leq M_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

   die Beziehung

$$M_1 \leq a \leq M_2$$

   folgt.

b) Man finde ein konkretes Beispiel dafür, daß trotz

$$M_1 < a_k < M_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

nicht die Beziehung

$$M_1 < a < M_2$$

gilt.

5. Man zeige, daß die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \le 2 \right\}$$

in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt.

6. Man beweise die folgenden Aussagen oder man finde ein Gegenbeispiel.

a) Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, dann konvergiert auch die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die durch

$$h_k = \max(f_k, g_k) \qquad k \in \mathbb{N}$$

definiert ist.

b) Wenn für die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_k = a_{k+1} - a_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

eine Nullfolge ist, dann konvergiert Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wenn für die Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$d_k = c_{k+1} - c_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

die Beziehung

$$|d_k| \le \frac{1}{k(k+1)}$$

gilt, dann konvergiert die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.