Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 22.11.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 6
26.11. – 30.11.2001

Die Lösung der Aufgabe 3 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 29.11.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Komplexe Zahlen

1. Man bestimme alle komplexen Zahlen $z = a + b\,i$, für die
$$z^2 = 5 + 12\,i$$
gilt.

Metrische Räume

2. Sei E eine beliebige, nichtleere Menge. Weiterhin sei
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$
Man zeige, daß (E,d) ein metrischer Raum ist. (Dieser Raum wird als diskreter metrischer Raum bezeichnet.)

3. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Abbildung
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$
wobei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d)$ ein metrischer Raum ist. Für $n = 2$ und die euklidische Norm $\|.\|_2$ skizziere man die offenen Kugeln mit den Radius 1 um $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (1/2, 0)$, $z_3 = (0, 3/4)$ und $z_4 = (2,2)$ an.

5 Punkte

4. Sei (E, d) ein metrischer Raum und $a > 0$ eine beliebige Konstante. Man zeige, daß (E, d^*) mit
$$d^*(x,y) := \frac{d(x,y)}{a + d(x,y)}$$
ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Zum Beweis der Dreiecksungleichung ist Aufgabe 1 zu den reellen Zahlen von Serie 3 hilfreich.

5. Zeige man, daß die Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^n$ den gleichen Offenheitsbegriff liefern, d. h., wenn eine Menge bei der Verwendung der einen Norm offen ist, dann ist sie auch bei der Verwendung einer der anderen Normen offen.
Hinweis: Man benutze Hilfssatz 5.4.

6. Man gebe ein Beispiel (z.B. Intervalle in $\mathbb{R}$) dafür an, daß der Durchschnitt von beliebig vielen offenen Menge nicht offen sein muß.

7. Man zeige, daß der Rand ∂M einer Menge M abgeschlossen ist und daß für das Innere M^O von M die Beziehung $M^O = M \setminus \partial M$ gilt.