Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 17.10.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 1

15.10. – 19.10.2001 und 22.10.–26.10.2001

Die Lösung der Aufgabe 2 des Abschnittes Mengen ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 25.10.2001, schriftlich abzugeben !

Logik

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn p und q wahr sind ?

$$\begin{array}{llll} a)\ p \wedge \neg q & b)\ \neg p \wedge q & c)\ \neg(p \wedge q) & d)\ p \Rightarrow q \\ e)\ p \vee \neg q & f)\ \neg(\neg p \wedge q) & g)\ (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p & h)\ \neg(p \Rightarrow q). \end{array}$$

2. Man bilde die Negation von :
   a) Eine notwendige Bedingung dafür, daß zwei Dreiecke kongruent sind, ist, daß sie den gleichen Flächeninhalt haben.
   b) Zu jedem Mann gibt es mindestens eine Frau, die ihn nicht liebt.

3. $Z(x, y)$ sei eine Aussageform. Man bilde die Negation von

$$a) \forall x \forall y : Z(x,y), \quad b)\ \forall x \exists y : Z(x,y) \quad c)\ \exists x \forall y : Z(x,y) \quad d)\ \exists x \exists y : Z(x,y).$$

4. Man gebe die Wahrheitstafeln folgender Aussageverbindungen an :
   a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,
   b) $(p \vee q) \wedge (\neg(r \vee q))$.

   Wie können die Aussagen vereinfacht dargestellt werden ?

5. Mit Hilfe von Wahrheitstafeln zeige man die de Morganschen Regeln :
   a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,
   b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Mengen

1. Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen. Man zeige die Richtigkeit folgender Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} M_1 \backslash (M_2 \cup M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cap (M_1 \backslash M_3), \\ M_1 \backslash (M_2 \cap M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cup (M_1 \backslash M_3). \end{aligned}$$

2. Man untersuche, ob für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 \cap (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cap M_2) \backslash (M_1 \cap M_3), \\ M_1 \cup (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cup M_2) \backslash (M_1 \cup M_3). \end{aligned}$$

   gelten. **5 Punkte**

3. Man zeige, daß $(M_1 \backslash M_2) \cup M_2 = M_1$ genau dann gilt, wenn $M_2 \subset M_1$.

4. Man zeige, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}(M_1 \cup M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3),\\ (M_1 \cap M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cap (M_2 \times M_3),\\ M_2 \subset M_3 &\rightarrow M_1 \times M_2 \subset M_1 \times M_3.\end{aligned}$$

Abbildungen

1. Man untersuche, ob folgende Teilmengen $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind.
   (a) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y^2 = 9 - x^2\}$
   (b) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (y+3)^2 = 2\cos 5x\}$
   (c) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = \frac{x+3}{x-2}\}$
   (d) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = \sqrt{x^2-4}\}$
   (e) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = \sqrt{x}\ln x\}$
   (f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; e^y = x^2 - x - 2\}$
   (g) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = x^4 - x + 7\}$

2. Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad &\text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x\\ G : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad &\text{mit} \quad G(x) = \sqrt{x}\\ H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad &\text{mit} \quad H(x) = \ln x\\ L : \mathbb{R} \to [-1,+1] \quad &\text{mit} \quad L(x) = \sin 2x\end{aligned}$$

   Man ermittle $G \circ F$, $F \circ G$ und $L \circ H$ und stelle fest, ob die Produkte injektiv bzw. surjektiv sind.

3. Man untersuche jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität !

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad &\text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x\\ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &\text{mit} \quad F(x) = e^x + 3\\ F : [0,\pi] \to \mathbb{R} \quad &\text{mit} \quad F(x) = \cos x\\ F : \mathbb{R} \to [2,\infty) \quad &\text{mit} \quad F(x) = x^2 + 2x + 3\\ F : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad &\text{mit} \quad F(x) = \sqrt{x}\end{aligned}$$

4. Es seien Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert vermöge

$$f(m,n) := m \cdot n$$

$$g(m,n) := 2^m \cdot 3^n$$

   Sind f bzw. g injektiv, surjektiv, bijektiv ?

Die Übungsserien findet man auch im Internet unter
http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/~home/john/LEHRE/lehre.html