1. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ metrische Räume sind, wenn für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abstandsfunktionen durch

$$d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}, \qquad d_\infty(x,y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|$$

gegeben sind.

Lösung: Man muß für alle drei Funktion $d_i(x,y), i \in \{1, 2, \infty\}$ die folgenden Eigenschaften zeigen:

(M1) $d_i(x,y) = 0 \iff x = y$,
(M2) $d_i(x,y) = d_i(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
(M3) $d_i(x,y) \le d_i(x,z) + d_i(z,y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

(M1) : Es gilt $d_i(x,y) = 0, i \in \{1, 2, \infty\}$ genau dann wenn $x_j = y_j, j = 1, \ldots, n$, d.h. genau dann wenn $x = y$.

(M2) : Diese Eigenschaft folgt aus $|x_j - y_j| = |y_j - x_j|$ bzw. $(x_j - y_j)^2 = (y_j - x_j)^2$.

(M3) : Der Beweis der Dreiecksungleichung ist oft der schwierigste Teil beim Beweis der Metrikeigenschaft.

• $d_1(x,y)$: Es gilt

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| = \sum_{j=1}^{n} |(x_j - z_j) + (z_j - y_j)| \\ &\overset{1)}{\le} \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j| + \sum_{j=1}^{n} |z_j - y_j| = d_1(x,z) + d_1(z,y) \end{aligned}$$

1) : Dreiecksungleichung für reelle Zahlen

• $d_2(x,y)$: Wir betrachten zunächst das Quadrat dieser Funktion

$$\begin{aligned} d_2(x,y)^2 &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left[(x_j - z_j) + (z_j - y_j)\right]^2 \\ &\overset{2)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \left[|x_j - z_j| + |z_j - y_j|\right]^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2 + 2|x_j - z_j||z_j - y_j| + |z_j - y_j|^2 \\ &\overset{3)}{\le} \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2 + |z_j - y_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - y_j|^2\right)^{1/2} \\ &\overset{4)}{=} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - y_j|^2\right)^{1/2}\right]^2 \\ &= \left[d_2(x,z) + d_2(z,y)\right]^2 . \end{aligned}$$

2) : Dreiecksungleichung für reelle Zahlen
3) : Schwarzsche Ungleichung
4) : Binomische Formel
Die Dreiecksungleichung folgt nun durch Wurzelziehen.

• $d_\infty(x,y)$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j| = \max_{1 \le j \le n} |(x_j - z_j) + (z_j - y_j)| \\ &\overset{5)}{\le} \max_{1 \le j \le n} (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|) \\ &\overset{6)}{\le} \max_{1 \le j \le n} |x_j - z_j| + \max_{1 \le j \le n} |z_j - y_j| = d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \end{aligned}$$

5) : Dreiecksungleichung für reelle Zahlen
6) : $\max_j (a_j + b_j) \le \max_j a_j + \max_j b_j$ ∎

0 Folgen in metrischen Räumen

1. Für $x \in \mathbb{R}^+$ berechne man: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - n}{x^n + n}$.

   Lösung: Da $\lim_{n\to\infty} x^n$ sich für unterschiedliche x unterschiedlich verhält, ist eine Fallunterscheidung nötig.

   1.Fall : $0 < x < 1$. Hier ist $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ und es folgt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - n}{x^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^n}{n} - 1}{\frac{x^n}{n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

   2. Fall : $x = 1$. Hier ist $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Es folgt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - n}{x^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^n}{n} - 1}{\frac{x^n}{n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

   3. Fall : $1 < x$. In diesem Fall ist $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$. Aus Beispiel 4.12 in der Vorlesung folgt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = 0.$$

   Man erhält

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - n}{x^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n}{x^n}}{1 + \frac{n}{x^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

   ■

2. Für die Folge

   $$\left(\left(\frac{n+2}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

   bestimme man im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$, ein (möglichst kleines) $n_0(\varepsilon)$ aus der Konvergenzdefinition.

   Lösung: Es ist

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+2}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right) = (1, 0).$$

   Die Metrik d_2 ist definiert als

   $$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

   Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist nun ein möglichst kleines n_0 mit

   $$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{n_0+2}{n_0} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{n_0}\right)^2} &< \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \\ \frac{4}{n_0^2} + \frac{1}{n_0^2} &< \varepsilon^2 \quad \Longleftrightarrow \\ \frac{5}{\varepsilon^2} &< n_0^2 \quad \Longleftrightarrow \\ \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} &< n_0. \end{aligned}$$

   Das gesucht n_0 ist die erste natürliche Zahl, die größer als $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ ist. ■

3. Man bestimme Häufungspunkte, liminf, limsup, sup und inf der Folge:

$$x_n = \frac{1}{2}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Lösung: Wegen des alternierenden Vorzeichens müssen zwei Teilfolgen getrennt betrachtet werden, und zwar die für n gerade sowie die für n ungerade.

i) n gerade, d.h. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Es sind

$$x_{2k} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2k}\right), \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \frac{1}{2}.$$

Die Teilfolge ist streng monoton fallend, da

$$\begin{aligned} x_{2k} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2k}\right) &> \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right) = x_{2(k+1)} \iff \\ \frac{1}{2k} &> \frac{1}{2(k+1)}. \end{aligned}$$

Deshalb nimmt sie ihr Supremum, was hier gleichzeitig Maximum ist, für das erste Glied an und ihr Infimum ist der Grenzwert für $k \to \infty$, d.h.

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} x_{2k} = x_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \frac{1}{2}.$$

ii) n ungerade, d.h. $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$. In diesem Falle sind

$$x_{2k-1} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right), \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -\frac{1}{2}.$$

Diese Teilfolge ist streng monoton wachsend, da

$$-\frac{1}{2k-1} < -\frac{1}{2(k+1)-1} = -\frac{1}{2k+1}.$$

Also nimmt sie ihr Infimum im ersten Glied an und ihr Supremum ist der Grenzwert für $k \to \infty$. Das Infimum ist gleichzeitig Minimum. Man hat also

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -\frac{1}{2}, \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} x_{2k-1} = x_1 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) = -1.$$

iii) Nun muß man aus den Eigenschaften der Teilfolgen die Eigenschaften der gesamten Folge ermitteln. Die Menge der Häufungspunkte von x_n ist $\{-1/2, 1/2\}$. Daraus folgt

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \max\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \min\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{2}.$$

Außerdem sind

$$\sup_n x_n = x_2 = \frac{3}{4}, \quad \inf_n x_n = x_1 = -1.$$

■

4. Man untersuche durch Anwendung geeigneter Konvergenzkriterien die folgende reelle Zahlenfolge auf Konvergenz:

$$a_n = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lösung: Wir zeigen, daß

i) a_n ist streng monoton wachsend,

ii) a_n ist nach oben beschränkt.

Nach Theorem 4.10 aus der Vorlesung folgt dann, daß a_n konvergiert.

i) a_n ist streng monoton wachsend, d.h. wir müssen $a_{n+1} > a_n$ zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} = \sum_{\nu=2}^{n+2} \frac{1}{n+\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} \\ &= \frac{1}{n+1+n+1} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

ii) a_n ist nach oben beschränkt. Für $\nu > 1$ ist

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+\nu}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} 1 = \frac{n}{n+1} < 1.$$

■

1 Stetige Abbildungen

1. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} .$$

Lösung: Für $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ sind sowohl der Zähler als auch der Nenner stetige Funktionen, wobei der Nenner nicht Null wird. Damit ist auch $f(x_1, x_2)$ eine stetige Funktion (nach Vorlesung, Folgerung 5.1).

Falls $f(x_1, x_2)$ auch in $(0,0)$ stetig ist, muß für eine beliebige Annäherung $(x_1, x_2) \to (0,0)$ gelten

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ wählen, da für $(0,0)$ der Wert 0 sowieso angenommen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1, x_2)| &= \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \left| \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |x_1| \left| \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \\ &\leq \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |x_1| \left| \frac{x_1^2 + x_2^2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \right| \\ &= \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \left| \frac{x_1}{2} \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bei dieser Abschätzung wurde die Ungleichung

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

genutzt. Also gilt

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1,x_2)| \leq 0.$$

Da, wegen des Betrages, auch

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1,x_2)| \geq 0$$

folgt nun

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1,x_2)| = 0.$$

Das heißt aber auch

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0.$$

Damit ist $f(x_1,x_2)$ in $(0,0)$ stetig. ■

2. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^4 + 5x^2y^2 + 3x^2y + xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$.

Lösung: Falls $f(x,y)$ stetig ist, muß für *jede* Annäherung $(x,y) \to (0,0)$ gelten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Der Einfachheit halber, probiert man zuerst einfache Annäherungen, etwa auf der x–Achse ($y = 0$), der y–Achse ($x = 0$) oder der Geraden $x = y$. Wir betrachten die Annäherung auf der x–Achse. Da dort $y = 0$ ist, gilt für $x \neq 0$

$$f(x,0) = \frac{-x^4}{x^4} = -1,$$

also

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = -1.$$

Damit haben wir eine Annäherung gefunden, deren Grenzwert ungleich Null ist und $f(x,y)$ ist in $(0,0)$ unstetig. ■

2 Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Man zeige: Eine stetige Funktion

$$f : [a,b] \to [a,b]$$

hat mindestens einen Fixpunkt $\xi \in [a,b]$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $g(x) = f(x) - x$. Eine Nullstelle von $g(x)$ ist ein Fixpunkt von $f(x)$. Aus dem Definitions- und Wertebereich von f folgt

$$g(x) : [a,b] \to [a-b, b-a].$$

Da $f(x)$ und x stetig sind, ist $g(x)$ stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \geq a - a = 0 \\ g(b) &= f(b) - b \leq b - b = 0, \end{aligned}$$

da $a \leq f(a), f(b) \leq b$. Das heißt, der Funktionswert von $g(x)$ an der linken Intervallgrenze ist nicht–negativ und an der rechten Intervallgrenze nicht–positiv. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein ξ mit $g(\xi) = 0$, d.h. mit $f(\xi) = \xi$. ■

3 Reihen in normierten Räumen

1. Man verwende das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j j!}{j^j}, \quad a > 0.$$

Lösung: Sei c_j das allgemeine Reihenglied. Dann ist

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{a^{j+1}(j+1)!j^j}{(j+1)^{j+1}a^j j!} = \frac{a(j+1)}{j+1}\left(\frac{j}{j+1}\right)^j = a\frac{1}{\left(\frac{j+1}{j}\right)^j} = a\frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^j}.$$

Damit gilt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{a}{e} = \begin{cases} < 1 & \text{für } a < e \\ = 1 & \text{für } a = e \\ > 1 & \text{für } a > e. \end{cases}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe damit konvergent für $a < e$ und divergent für $a > e$. Nach Vorlesung ist $\left(\frac{j+1}{j}\right)^j < e$ für alle $j \geq 1$. Also ist im Fall $a = e$

$$\frac{1}{\left(\frac{j+1}{j}\right)^j} > \frac{1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad e\frac{1}{\left(\frac{j+1}{j}\right)^j} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c_{j+1}}{c_j} > 1.$$

Damit ist die Reihe für $a = e$ nach Quotientenkriterium divergent. ∎

2. Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

Lösung: Durch Umformung erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Da die Folge der Reihenglieder alternierend ist, empfiehlt es sich zu versuchen, die Reihenkonvergenz mit Hilfe des Leibnizkriteriums zu beweisen. Dazu muß noch gezeigt werden, daß die Folge der Absolutbeträge der Reihenglieder eine monotone Nullfolge ist. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

folgt die Nullfolgeneigenschaft. Die Monotonie folgt aus

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} &> \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = a_{n+1} \Longleftrightarrow \\ (n+1)^n(n+1)^{n+2} &> (n+2)^{n+1}n^{n+1} \Longleftrightarrow \\ (n^2+2n+1)^{n+1} &> (n^2+2n)^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Bei der Untersuchung der absoluten Konvergenz hat man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

zu betrachten. Es ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$ für alle $n \geq 1$. Demzufolge gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

d.h. die harmonische Reihe ist eine Minorante. Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ebenfalls und die betrachtete Reihe ist nicht absolut konvergent. ∎