Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 30.01.2002

Leistungskontrolle Nr. 2 zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	erreichte Punkte
1	4	
2	6	
3	10	
4	4	
5	14	
6	4	
7	6	
8	4	
9	4	
10	8	
Summe	64	

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man berechne
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right).$$
4 Punkte

2. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion mit Lipschitzkonstante L und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ wird mit Hilfe der Vorschrift
$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k \geq 0,$$
erzeugt. Man zeige, daß
$$|x_{k+1}-x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$
gilt.
Hinweis: vollständige Induktion. **6 Punkte**

3. Man bestimme Häufungspunkte, $\liminf_{n\to\infty}$, $\limsup_{n\to\infty}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge
$$x_n = \frac{1}{2}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
10 Punkte

4. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Man zeige: gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \geq k_0$ gilt
$$1 \leq \sqrt[k]{a_k},$$
so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent. **4 Punkte**

5. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^n,$$
4 Punkte
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!},$$
4 Punkte
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\log(n+1) - \log(n)\right].$$
6 Punkte

Hinweis: In der letzten Reihe forme man zuerst den allgemeinen Summanden um.

6. Man untersuche die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{7n}$$
auf absolute Konvergenz. **4 Punkte**

7. Man untersuche die Funktion
$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$
auf Stetigkeit im Punkt $x = 0$. **6 Punkte**

8. Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + 3y^4 + 2xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$. **4 Punkte**

9. Man untersuche, ob die Funktion
$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5\cos(2\pi x) + 13x - e^x$$
im Intervall $[0,1]$ den Funktionswert 16 annimmt. **4 Punkte**

10. Man formuliere folgende Sätze:
    - den Satz über Umordnung absolut konvergenter Reihen,
    - den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,
    - den Mittelwertsatz der Differentialrechnung,
    - den Satz über Minimum und Maximum für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

8 Punkte