

**Leistungskontrolle Nr. 3, Gruppe B**  
**Grundkurs Analysis**  
Studiengänge Mathematik, Technomathematik  
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

**Achtung:** Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man berechne die Grenzwerte der Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**4 Punkte**

2. Man zeige, daß die Folge  $a_n, n \geq 1$ , mit

$$a_{n+1} = \frac{30n^2 + 48n}{(6n+6)(5n+3)} a_n, \quad a_1 = \frac{4}{3}$$

konvergiert.

**3 Punkte**

3. Die Folge  $a_n, n \geq 4$ , sei gegeben durch

$$a_n = \sum_{i=4}^n \frac{1}{i}.$$

Man gebe an, ob diese Folge konvergiert oder divergiert. Man beschreibe einen Weg zum Beweis der entsprechenden Eigenschaft.

**2 Punkte**

4. Man berechne Häufungspunkte,  $\liminf$ ,  $\limsup$ ,  $\inf$  und  $\sup$  der Folge

$$a_n = \frac{2}{3} (-1)^{n+1} \left(2 + \frac{5}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

**4 Punkte**

5. Man berechne, ohne Verwendung der Regel von Bernoulli–l'Hospital, folgende Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 11x + 28}{x - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 3x^2}{(x+1)^2 - 2x}.$$

**2 Punkte**

6. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y + 3y^4 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt  $(0, 0)$ .

**2 Punkte**