4 Folgen in metrischen Räumen

4.1 Berechnung von Grenzwerten

1. Für $x \in \mathbb{R}_+$ berechne man: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$.

2. Man berechne die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad c_n = n\left(1 - \sqrt{(1-\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n})}\right).$$

3. Für die Folge

$$\left(\left(\frac{n+2}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

bestimme man in den metrischen Räumen $(\mathbb{R}^2, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ ein (möglichst kleines) $n_0(\varepsilon)$ aus der Konvergenzdefinition.

4. Man berechne die folgenden Grenzwerte von Folgen komplexer Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2in^3 - n^4}{n^4 + 3in^2 - 1} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^3+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n - 7n^2}{(n+1)^2 - 8n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu n^\nu}{\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu n^\nu} \quad \text{mit} \quad a_m, b_k \neq 0, a_i, b_i \in \mathbb{C}.$$

5. Man berechne die Grenzwerte der Folgen $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von in der Vorlesung bewiesenen Grenzwerten:

$$x_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - 2n, \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

6. Man zeige, daß die durch

$$a_1 := 1 \qquad a_{n+1} := \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

gegebene Folge (a_n) konvergiert und ermittle den Grenzwert.

7. Man untersuche die Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_1 = 2$$

auf Konvergenz. Man kann folgenden Lösungsweg wählen:

   1. Man zeige $x_n^2 - 2 \geq 0$.
   2. Man untersuche (x_n) auf Monotonie.
   3. Man schließe auf die Existenz eines Grenzwertes und bestimme anschließend dessen Wert.

8. Man bestimme Häufungspunkte, liminf, limsup, sup und inf der Folgen:

$$x_n = \frac{1}{2}(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad x_n = \left(\frac{(-1)^n - 1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} (1 - \frac{1}{n})$$

4.2 Allgemeine Konvergenzuntersuchungen

9. Man untersuche durch Anwendung geeigneter Konvergenzkriterien folgende reelle Zahlenfolgen auf Konvergenz:
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

10. Man beweise:

    1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$
    2. $\left(\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

11. Sei (E, d) ein diskreter metrischer Raum (vgl. Aufgabe 4 des Abschnittes "Metrische Räume"). Man zeige, daß eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in E genau dann konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl n_0 derart gibt, daß
$$a_i = a_j, \qquad \forall i, j \geq n_0$$
gilt, d.h., wenn die Folge ab einem Index n_0 konstant ist.

12. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im metrischen Raum (X, d). Dann ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in folgendem Sinne: Es gibt ein $x_0 \in X$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung
$$d(x_0, a_k) < M$$
gilt, d.h., alle a_k liegen in der Kugel um x_0 mit dem Radius M.

13. Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Weiterhin definieren wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

    1. Man bestimme einen einfachen Ausdruck für s_n.
    2. Man bestimme den Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

14. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert a. Weiterhin seien M_1 und M_2 Konstanten.

    1. Man zeige, daß aus
    $$M_1 \leq a_k \leq M_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$
    die Beziehung
    $$M_1 \leq a \leq M_2$$
    folgt.
    2. Man finde ein konkretes Beispiel dafür, daß trotz
    $$M_1 < a_k < M_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$
    nicht die Beziehung
    $$M_1 < a < M_2$$
    gilt.

15. Man beweise die folgenden Aussagen oder man finde ein Gegenbeispiel.

    1. Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, dann konvergiert auch die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die durch
    $$h_k = \max(f_k, g_k) \qquad k \in \mathbb{N}$$
    definiert ist.

2. Wenn für die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_k = a_{k+1} - a_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

eine Nullfolge ist, dann konvergiert Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wenn für die Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$d_k = c_{k+1} - c_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

die Beziehung

$$|d_k| \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

gilt, dann konvergiert die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

5 Stetige Abbildungen

5.1 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

1. Man untersuche mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definition folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$ auf Stetigkeit!

   1. $f(x) = |x|$
   2. $f(x) = x \cos \dfrac{x}{2\pi}$ falls $x \neq 0,\ f(0) = 0$
   3. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
   4. $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$

2. Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit in allen Punkten aus $\mathbb{R}$!

   1. $$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ 3x & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & x \geq 1 \end{cases}$$
   2. $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

3. Unter Verwendung von Grenzwertsätzen, binomischen Formeln, der Zerlegung in Linearfaktoren u. ä., berechne man folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{2+x} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} \qquad \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^n - a^n}{x}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

Die Regel von Bernoulli–l'Hospital soll nicht angewandt werden !

Hinweis: Man kann folgenden Grenzwert als bekannt voraussetzen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5.2 Reellwertige Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen

4. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^4 + 5x^2y^2 + 3x^2y + xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$.

5. Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x_1^2+x_2^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1^2+x_2^2 = 0 \end{cases}$$

stetig ist.
Hinweis: Die Stetigkeit im Koordinatenursprung erhält man durch geeignete Abschätzungen von $f(x_1,x_2)$ oder durch Übergang zu Polarkoordinaten.

6. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Man ermittle (falls er existiert) den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in M} f(x,y)$$

1. für $M = \{t\binom{1}{1},\ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$,
2. für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ y = x^2\}$,
3. für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < x^2\}$.

5.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

7. Ist die Menge aller Nullstellen einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, offen und abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen?

8. Man gebe ein Beispiel dafür an, daß das Bild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht offen sein muß.
Hinweis: Man betrachte beispielweise eine periodische Funktion.

9. Man untersuche die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ im Intervall $(0,1)$ auf Beschränktheit, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

10. Es sei E eine unendliche Menge, die mit der diskreten Metrik versehen ist, d.h.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei M eine unendliche Teilmenge von E. Man zeige, daß M zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt ist.

11. Man zeige, eine monoton wachsende Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen.
Hinweis: Zuerst überlege man sich, welche Art von Unstetigkeitsstellen eine monotone Funktion überhaupt besitzen kann.