2 Reelle Zahlen, komplexe Zahlen

2.1 Reelle Zahlen

1. Es seien

$$a_n := \frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 \quad b_n := \frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, daß $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl liegt im Durchschnitt aller Intervalle?

2. Durch Anwendung der Rechengesetze für endliche Summen zeige man:

$$2\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = a_1 b_1 + \sum_{\nu=2}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1})b_\nu + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu(b_\nu + b_{\nu+1}) + a_n b_n$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{b_1 a_1}{b_1 - b_2} + \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu \left[\frac{a_\nu}{b_\nu - b_{\nu+1}} - \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} - b_\nu}\right] - \frac{b_{n+1}a_n}{b_n - b_{n+1}}$$

falls $b_\lambda \neq b_{\lambda+1}$ für jedes λ.

3. Man zeige, daß für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

$$\prod_{\nu=0}^{n} \cos(2^\nu x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}$$

für alle $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Man beweise die Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} {a_\nu}^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} {b_\nu}^2\right)$$

für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, \quad b_1, \ldots, b_n$.
Hinweis: Man zeige zuerst die Identität

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 = \sum_{1\leq\mu<\nu\leq n} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2 .$$

5. Man beweise für beliebige $x, y, \omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$ die Ungleichung

$$xy \leq \omega x^2 + \frac{1}{4\omega}y^2.$$

6. Man beweise für beliebiges $x \in \mathbb{R}, x > 0$ die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{2.1}$$

7. Man beweise für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Man nutze Ungleichung (2.1).

8. Man beweise die Ungleichungen :

   1. Für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < s$ gilt
   $$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}.$$
   2. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

9. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

   1. $|3x-2| < 5$,
   2. $\dfrac{x+4}{x-2} < x$,
   3. $x(2-x) > 1 + |x|$.

2.2 Komplexe Zahlen

10. Man berechne $|\sqrt{2}+i| \cdot \mathrm{Re}(1+i\sqrt{3}) + \mathrm{Im}(\sqrt{3}i/\pi) \cdot \arg(-\pi\ln(3))$.

11. Für $z = -1 + \sqrt{3}i$ berechne man $\overline{z}, -iz, \overline{iz}, 1/z, 1/(\overline{z^4})$.

12. Man trenne in Real– und Imaginärteil:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - \frac{i}{2}, \quad \sqrt{x+i\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } 0 \leq x \leq 1.$$

13. Man ermittle $(1+\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))^6$.

14. Für welche komplexe Zahl z gilt

$$|z| + z - 4i - 8 = 0 \quad ?$$

15. Für welche z ist der Ausdruck $z/(1+z^2)$ reell ?

16. Man ermittle sämtliche Lösungen der Gleichungen

$$z^4 + 1 = 0, \quad z - i\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = 0.$$

17. Welche Gebiete bzw. Kurven werden durch folgende Bedingungen in der Gaußschen Zahlenebene festgelegt :

$$|z| \leq 1, \quad |z-1| > 2, \quad z\overline{z} = 1, \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{2},$$
$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1, \quad |\mathrm{Re}(z)| \cdot |\mathrm{Im}(z)| = 1?$$

18. Man bestimme alle komplexen Zahlen z, für die

$$z^2 = 5 + 12\,i$$

gilt.

2.3 Infimum und Supremum

19. Für nichtleere Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$rA := \{ra \mid a \in A\}$$

Weiter vereinbaren wir die Schreibweise

$$A \geq 0 :\Leftrightarrow \forall a \in A, a \geq 0.$$

(Analog definieren wir natürlich $A > 0$, $A \leq 0$, $A < 0$.)

Nun sei zusätzlich vorausgesetzt, daß A und B beschränkte Mengen sind. Man zeige, daß dann folgende Formeln gelten:

1. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. $\sup(rA) = r \sup(A)$ für $r \geq 0$.
3. $\sup(rA) = r \inf(A)$ für $r \leq 0$.
4. $\sup(A \cdot B) = (\sup(A))(\sup(B))$ für $A \geq 0$ und $B \geq 0$.
5. $\sup(A \cdot B) = (\inf(A))(\inf(B))$ für $A \leq 0$ und $B \leq 0$.

20. Für die Mengen $M = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ mit

1. $x_n := \frac{1+(-1)^n n}{1+n}$
2. $x_n := \sin \frac{\pi}{2n}$

bestimme man Infimum und Supremum!

3 Metrische Räume

1. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ metrische Räume sind, wenn für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abstandsfunktionen durch

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

gegeben sind.

2. Es sei E die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Man überprüfe, ob folgende Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ Abstandsfunktionen auf $\mathbb{C}$ sind:

a) $d(x, y) = |Re(x) + Re(y)|$, $x, y \in \mathbb{C}$
b) $d(x, y) = (Re(x))^2 + (Re(y))^2 + (Im(x))^2 + (Im(y))^2$
c) $d(x, y) = max(|Re(x) - Re(y)|, |Im(x) - Im(y)|)$

3. Sei (E, d) ein metrischer Raum. Man zeige, daß dann für jedes positive $a \in \mathbb{R}$ auch (E, d^*) mit

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{a + d(x, y)} \quad \forall x, y \in E$$

ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Zum Beweis der Dreiecksungleichung ist Aufgabe 8 im Abschnitt "Reelle Zahlen, komplexe Zahlen" hilfreich.

4. E sei eine beliebige mindestens zweielementige Menge. Man beweise, daß durch die Festsetzung

$$d(x,y) = 0 \text{ für } x = y \text{ und } d(x,y) = 1 \text{ für } x \neq y$$

(E,d) ein metrischer Raum ('diskreter metrischer Raum') wird.

5.
   1. Man zeige, daß $(\mathbb{N}, d)$ mit $d(m,n) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ ein metrischer Raum ist.
   2. Man zeige, daß jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}, d)$ offen ist.
      Man bestimmen weiterhin *alle* offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.

6. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

wobei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d)$ ein metrischer Raum ist. Für $n = 2$ und die euklidische Norm $\|.\|_2$ skizziere man die offenen Kugeln mit den Radius 1 um $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (1/2, 0)$, $z_3 = (0, 3/4)$ und $z_4 = (2,2)$ an.