Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Übungsaufgaben : Analysis I

0 Elementarmathematik

0.1 Schnittpunkte

1. Man finde die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$$

mit der Geraden $x - 2y + 4 = 0$.

2. Man bestimme die Parabel, die durch die Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 + 5x = 0$ mit der Geraden $x + y = 0$ geht und die y–Achse als Symmetrieachse hat.

0.2 Winkelfunktionen

3. Man löse

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

4. Man löse

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos(4x).$$

5. Für welche reellen Zahlen ist die Ungleichung

$$\sin^2 x + 2 \sin x > 0$$

erfüllt ?

6. Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin(x + y)$ und $\cos(x + y)$ leite man Additionstheoreme für

a) $\sin(3x)$ als Funktion von $\sin x$,

b) $\tan(2x)$ als Funktion von $\tan x$

her.

0.3 Logarithmen

7. Man vereinfache

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}.$$

8. Man löse

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x + \log_{1/3} x = 6.$$

9. Man löse

$$\log_x 5 + \log_5 x = 2.$$

10. Man löse

$$\begin{aligned} \log_y x - \log_x y &= \frac{8}{3} \\ xy &= 16 \quad . \end{aligned}$$

0.4 Vollständige Induktion

11. Man beweise die Gültigkeit der Beziehung

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ mal}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

12. Man zeige für $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

13. Man zeige mit vollständiger Induktion, daß für ganze nichtnegative Zahlen n der Ausdruck

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

14. Man beweise mit vollständiger Induktion, daß für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{s} a^{n-s}b^s + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n,$$

der sogenannte binomische Satz, gilt.

1 Mengen, Abbildungen, Mengenfamilien

1.1 Gleichheit von Mengen

1. Man zeige die Richtigkeit folgender Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} M_1 \backslash (M_2 \cup M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cap (M_1 \backslash M_3) \\ M_1 \backslash (M_2 \cap M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cup (M_1 \backslash M_3) \end{aligned}$$

2. Man untersuche, ob für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 \cap (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cap M_2) \backslash (M_1 \cap M_3) \\ M_1 \cup (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cup M_2) \backslash (M_1 \cup M_3) \end{aligned}$$

gelten.

3. Man zeige, daß $(M_1 \backslash M_2) \cup M_2 = M_1$ genau dann gilt, wenn $M_2 \subset M_1$.

4. Man zeige, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} (M_1 \cup M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3) \\ (M_1 \cap M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cap (M_2 \times M_3) \\ M_2 \subset M_3 &\rightarrow M_1 \times M_2 \subset M_1 \times M_3 \end{aligned}$$

1.2 Abbildungen

5. Man untersuche, ob folgende Teilmengen $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind.

   1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y^2 = 9 - x^2\}$
   2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y+3)^2 = 2\cos 5x\}$
   3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \frac{x+3}{x-2}\}$
   4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \sqrt{x^2 - 4}\}$

5. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \quad y = \sqrt{x} \ln x\}$
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \quad e^y = x^2 - x - 2\}$
7. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \quad y = x^4 - x + 7\}$

6. Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad & \text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x \\ G : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad & \text{mit} \quad G(x) = \sqrt{x} \\ H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad & \text{mit} \quad H(x) = \ln x \\ L : \mathbb{R} \to [-1,+1] \quad & \text{mit} \quad L(x) = \sin 2x \end{aligned}$$

Man ermittle $G \circ F$, $F \circ G$ und $L \circ H$ und stelle fest, ob die Produkte injektiv bzw. surjektiv sind.

7. Man untersuche jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität !

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad & \text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x \\ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad & \text{mit} \quad F(x) = e^x + 3 \\ F : [0,\pi] \to \mathbb{R} \quad & \text{mit} \quad F(x) = \cos x \\ F : \mathbb{R} \to [2,\infty] \quad & \text{mit} \quad F(x) = x^2 + 2x + 3 \\ F : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad & \text{mit} \quad F(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

8. Es seien Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert vermöge

$$f(m,n) := m \cdot n$$

$$g(m,n) := 2^m \cdot 3^n$$

Sind f bzw. g injektiv, surjektiv, bijektiv ?

9. Man zeige, daß für zwei Abbildungen

$$f : A \to B \quad \textit{und} \quad g : B \to C$$

folgendes gilt:

1. $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv;
2. $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv;
3. $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

10.
1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionswerten $f(1)$ und $f(n)$.
2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Abbildung mit $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß dann $f(x^n) = nf(x)$ für alle $n, x \in \mathbb{N}$ gilt.

1.3 Mächtigkeit von Mengen

11. Man zeige, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, und gebe die entsprechende Bijektion explizit an !

12. Man zeige:

1. 2 beliebige Intervalle (a,b) und (c,d), wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, haben die gleiche Mächtigkeit.
2. Das Intervall $(-1,1)$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.

13. Man zeige:

Eine Menge M ist genau dann unendlich, wenn sie eine echte Teilmenge gleicher Mächtigkeit besitzt.
Hinweis: Falls M unendlich, so Ausgang von einer Zerlegung der Form $M = A \cup (M \setminus A)$, A abzählbar.