Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Übungsaufgaben : Analysis I

0 Elementarmathematik

1. Man finde die Schnittpunkte der Ellipse
$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$$
mit der Geraden $x - 2y + 4 = 0$.

2. Man bestimme die Parabel, die durch die Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 + 5x = 0$ mit der Geraden $x + y = 0$ geht und die y–Achse als Symmetrieachse hat.

3. Man löse
$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

4. Man löse
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos(4x).$$

5. Für welche reellen Zahlen ist die Ungleichung
$$\sin^2 x + 2\sin x > 0$$
erfüllt ?

6. Man vereinfache
$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}.$$

7. Man löse
$$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x + \log_{1/3} x = 6.$$

8. Man löse
$$\log_x 5 + \log_5 x = 2.$$

9. Man löse
$$\begin{aligned} \log_y x + \log_x y &= \frac{8}{3} \\ xy &= 16 \quad . \end{aligned}$$

10. Man beweise die Gültigkeit der Beziehung
$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ mal}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

11. Man zeige für $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die *Bernoullische Ungleichung*
$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1 Mengen, Abbildungen, Mengenfamilien

1. Man zeige die Richtigkeit folgender Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} M_1 \backslash (M_2 \cup M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cap (M_1 \backslash M_3) \\ M_1 \backslash (M_2 \cap M_3) &= (M_1 \backslash M_2) \cup (M_1 \backslash M_3) \end{aligned}$$

2. Man untersuche, ob für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 \cap (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cap M_2) \backslash (M_1 \cap M_3) \\ M_1 \cup (M_2 \backslash M_3) &= (M_1 \cup M_2) \backslash (M_1 \cup M_3) \end{aligned}$$

   gelten.

3. Man zeige, daß $(M_1 \backslash M_2) \cup M_2 = M_1$ genau dann gilt, wenn $M_2 \subset M_1$.

4. Man zeige, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} (M_1 \cup M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3) \\ (M_1 \cap M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cap (M_2 \times M_3) \\ M_2 \subset M_3 &\rightarrow M_1 \times M_2 \subset M_1 \times M_3 \end{aligned}$$

5. Man untersuche, ob folgende Teilmengen $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind.

   (a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y^2 = 9 - x^2\}$
   (b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y + 3)^2 = 2\cos 5x\}$
   (c) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \frac{x+3}{x-2}\}$
   (d) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
   (e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \sqrt{x} \ln x\}$
   (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad e^y = x^2 - x - 2\}$
   (g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = x^4 - x + 7\}$

6. Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] &\quad \text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x \\ G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) &\quad \text{mit} \quad G(x) = \sqrt{x} \\ H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} &\quad \text{mit} \quad H(x) = \ln x \\ L : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1] &\quad \text{mit} \quad L(x) = \sin 2x \end{aligned}$$

   Man ermittle $G \circ F$, $F \circ G$ und $L \circ H$ und stelle fest, ob die Produkte injektiv bzw. surjektiv sind.

7. Man untersuche jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität !

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] &\quad \text{mit} \quad F(x) = \sin^2 x \\ F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} &\quad \text{mit} \quad F(x) = e^x + 3 \\ F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} &\quad \text{mit} \quad F(x) = \cos x \\ F : \mathbb{R} \rightarrow [2, \infty] &\quad \text{mit} \quad F(x) = x^2 + 2x + 3 \\ F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) &\quad \text{mit} \quad F(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

8. Es seien Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert vermöge

$$f(m, n) := m \cdot n$$

$$g(m, n) := 2^m \cdot 3^n$$

   Sind f bzw. g injektiv, surjektiv, bijektiv ?

9. Man zeige, daß für zwei Abbildungen

$$f : A \to B \quad und \quad g : B \to C$$

folgendes gilt:

(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv;

(b) $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Rightarrow g$ injektiv;

(c) $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv.

10. Man zeige, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, und gebe die entsprechende Bijektion explizit an !

11. Man zeige:

(a) 2 beliebige Intervalle (a, b) und (c, d), wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, haben die gleiche Mächtigkeit.

(b) Das Intervall $(-1, 1)$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.

12. Man zeige:

Eine Menge M ist genau dann unendlich, wenn sie eine echte Teilmenge gleicher Mächtigkeit besitzt.
Hinweis: Falls M unendlich, so Ausgang von einer Zerlegung der Form $M = A \cup (M \setminus A)$, A abzählbar.

13. (a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionswerten $f(1)$ und $f(n)$.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Abbildung mit $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß dann $f(x^n) = nf(x)$ für alle $n, x \in \mathbb{N}$ gilt.

2 Reelle Zahlen, Komplexe Zahlen

1. Es seien

$$a_n := \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 \quad b_n := \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, daß $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl liegt im Durchschnitt aller Intervalle?

2. Durch Anwendung der Rechengesetze für endliche Summen zeige man:

$$2 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = a_1 b_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1}) b_\nu + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu (b_\nu + b_{\nu+1}) + a_n b_n$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{b_1 a_1}{b_1 - b_2} + \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu \left[\frac{a_\nu}{b_\nu - b_{\nu+1}} - \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} - b_\nu} \right] - \frac{b_{n+1} a_n}{b_n - b_{n+1}}$$

falls $b_\lambda \neq b_{\lambda+1}$ für jedes λ.

3. Man zeige, daß für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^7 = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

$$\prod_{\nu=0}^{n} \cos(2^\nu x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin x}$$

für alle $x \neq k\pi$, k ganz .

4. Man beweise die Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} {a_\nu}^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} {b_\nu}^2\right)$$

für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, \quad b_1, \ldots, b_n$.
Hinweis: Man zeige zuerst die Identität

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 = \sum_{1\leq\mu<\nu\leq n} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2 .$$

5. Man beweise für beliebige $x, y, \omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$ die Ungleichung

$$xy \leq \omega x^2 + \frac{1}{4\omega} y^2.$$

6. Man beweise für beliebiges $x \in \mathbb{R}, x > 0$ die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{2.1}$$

7. Man beweise für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Man nutze Ungleichung (2.1).

8. Man berechne $|\sqrt{2}+i| \cdot \mathrm{Re}(1+i\sqrt{3}) + \mathrm{Im}(\sqrt{3}i/\pi) \cdot \arg(-\pi\ln(3))$.

9. Für $z = -1+\sqrt{3}i$ berechne man $\overline{z}, -iz, \overline{iz}, 1/z, 1/(\overline{z^4})$.

10. Man trenne in Real– und Imaginärteil:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - \frac{i}{2}, \quad \sqrt{x+i\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } 0 \leq x \leq 1.$$

11. Man ermittle $(1+\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))^6$.

12. Für welche komplexe Zahl z gilt

$$|z| + z - 4i - 8 = 0 \quad ?$$

13. Für welche z ist der Ausdruck $z/(1+z^2)$ reell ?

14. Man ermittle sämtliche Lösungen der Gleichungen

$$z^4 + 1 = 0, \quad z - i\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = 0.$$

15. Welche Gebiete bzw. Kurven werden durch folgende Bedingungen in der Gaußschen Zahlenebene festgelegt :

$$|z| \leq 1, \quad |z-1| > 2, \quad z\overline{z} = 1, \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{2},$$

$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1, \quad |\mathrm{Re}(z)| \cdot |\mathrm{Im}(z)| = 1?$$

16. Für nichtleere Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$rA := \{ra \mid a \in A\}$$

Weiter vereinbaren wir die Schreibweise

$$A \geq 0 :\Leftrightarrow \forall a \in A, a \geq 0.$$

(Analog definieren wir natürlich $A > 0$, $A \leq 0$, $A < 0$.)

Nun sei zusätzlich vorausgesetzt, daß A und B beschränkte Mengen sind. Man zeige, daß dann folgende Formeln gelten:

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(b) $\sup(rA) = r \sup(A)$ für $r \geq 0$.

(c) $\sup(rA) = r \inf(A)$ für $r \leq 0$.

(d) $\sup(A \cdot B) = (\sup(A))(\sup(B))$ für $A \geq 0$ und $B \geq 0$.

(e) $\sup(A \cdot B) = (\inf(A))(\inf(B))$ für $A \leq 0$ und $B \leq 0$.

17. Für die Mengen $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit

(a) $x_n := \frac{1+(-1)^n n}{1+n}$

(b) $x_n := \sin \frac{\pi}{2n}$

bestimme man Infimum und Supremum!

3 Metrische Räume

1. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ metrische Räume sind, wenn für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abstandsfunktionen durch

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

gegeben sind.

2. Es sei E die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Man überprüfe, ob folgende Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ Abstandsfunktionen auf $\mathbb{C}$ sind:

a) $d(x, y) = |Re(x) + Re(y)|$, $x, y \in \mathbb{C}$

b) $d(x, y) = (Re(x))^2 + (Re(y))^2 + (Im(x))^2 + (Im(y))^2$

c) $d(x, y) = max(|Re(x) - Re(y)|, |Im(x) - Im(y)|)$

3. Sei (E, d) ein metrischer Raum. Man zeige, daß dann für jedes positive $a \in \mathbb{R}$ auch (E, d^*) mit

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{a + d(x, y)} \quad \forall x, y \in E$$

ein metrischer Raum ist.

4. E sei eine beliebige mindestens zweielementige Menge. Man beweise, daß durch die Festsetzung

$$d(x,y) = 0 \text{ für } x = y \text{ und } d(x,y) = 1 \text{ für } x \neq y$$

(E,d) ein metrischer Raum ('diskreter metrischer Raum') wird.

5. Man gebe auf der reellen Zahlengeraden Beispiele offener Mengen A, B derart an, daß die vier Mengen $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cap B}$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ sämtlich voneinander verschieden sind. Hierbei ist $\overline{A}$ der Abschluß von A usw.

6. (a) Man zeige, daß $(\mathbb{N}, d)$ mit $d(m,n) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ ein metrischer Raum ist.
   (b) Man zeige, daß jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}, d)$ offen ist.
   Man bestimmen weiterhin *alle* offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.

4 Folgen in metrischen Räumen

1. Für $x \in \mathbb{R}_+$ berechne man: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$.

2. Man berechne die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad c_n = n\left(1 - \sqrt{(1-\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n})}\right)$$

3. Für die Folge

$$\left(\left(\frac{n+2}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

bestimme man in den metrischen Räumen $(\mathbb{R}^2, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ ein (möglichst kleines) $n_0(\varepsilon)$ aus der Konvergenzdefinition.

4. Man berechne die folgenden Grenzwerte von Folgen komplexer Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2in^3 - n^4}{n^4 + 3in^2 - 1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2}{n^3 + 1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n - 7n^2}{(n+1)^2 - 8n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu n^\nu}{\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu n^\nu} \quad \text{mit} \quad a_m, b_k \neq 0, a_i, b_i \in \mathbb{C}.$$

5. Man berechne die Grenzwerte der Folgen $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von in der Vorlesung bewiesenen Grenzwerten:

$$x_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - 2n, \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

6. Man zeige, daß die durch

$$a_1 := 1 \qquad a_{n+1} := \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

gegebene Folge (a_n) konvergiert und ermittle den Grenzwert.

7. Man untersuche die Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), \quad x_1 = 2$$

auf Konvergenz. Man kann folgenden Lösungsweg wählen:

   (a) Man zeige $x_n^2 - 2 \geq 0$.
   (b) Man untersuche (x_n) auf Monotonie.

(c) Man schließe auf die Existenz eines Grenzwertes und bestimme anschließend dessen Wert.

8. Man bestimme Häufungspunkte, liminf, limsup, sup und inf der Folgen:

$$x_n = \frac{1}{2}(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad x_n = \left(\frac{(-1)^n - 1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} (1 - \frac{1}{n})$$

9. Man untersuche durch Anwendung geeigneter Konvergenzkriterien folgende reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

10. Man beweise:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{n+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

(b) $\left(\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

5 Stetige Abbildungen

1. Ist die Menge aller Nullstellen einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, offen und abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen?

2. Man untersuche mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definition folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$ auf Stetigkeit!

(a) $f(x) = |x|$

(b) $f(x) = x \cos \dfrac{x}{2\pi}$ falls $x \neq 0$, $f(0) = 0$

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$

3. Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit in allen Punkten aus $\mathbb{R}$!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ 3x & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

4. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} .$$

5. Unter Verwendung von Grenzwertsätzen, binomischen Formeln, der Zerlegung in Linearfaktoren u. ä., berechne man folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{2+x} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} \qquad \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^n-a^n}{x},\ n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$$

Hinweis: Man kann folgenden Grenzwert als bekannt voraussetzen
Die Regel von Bernoulli–l'Hospital soll nicht angewandt werden !

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

6. Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Man ermittle (falls er existiert) den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in M} f(x,y)$$

(a) für $M=\{t\binom{1}{1},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$,

(b) für $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ y=x^2\}$,

(c) für $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y<x^2\}$.

7. Es sei E eine unendliche Menge, die mit der diskreten Metrik versehen ist, d.h.

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{für } x=y\\ 1 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Sei M eine unendliche Teilmenge von E. Man zeige, daß M zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt ist.

8. Man untersuche die Funktion $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ im Intervall $(0,1)$ auf Beschränktheit, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

6 Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1. Man zeige, daß $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sin x+\cos x$ mindestens eine Nullstelle besitzt und berechne alle Nullstellen.

2. Man zeige: Eine stetige Funktion

$$f:[a,b]\to[a,b]$$

hat mindestens einen Fixpunkt $\xi\in[a,b]$, d.h. $f(\xi)=\xi$.

7 Reihen in normierten Räumen

1. Man analysiere die Reihen

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{j+1}+\sqrt{j}}\quad,\quad\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\ldots+j}$$

auf Konvergenz.

2. Man verwende das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens der folgenden Reihen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3j)!}{(2j+1)!j!6^j} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{2^{2j-1}+1} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j j!}{j^j}, \quad a>0$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu}, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 3^j j!}{j^j} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 n^k}{(2k)!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Man prüfe unter Verwendung des Konvergenzkriteriums von Leibniz die Konvergenz der Reihen mit folgenden Gliedern:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \frac{(-1)^n}{\alpha n+\beta}, (\alpha,\beta>0), \quad \frac{(-1)^n}{(n(n+3))^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

4. Man untersuche die folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

5. Man bestimme die Summe der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

6. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Man zeige: Die Reihe ist alternierend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (b) Man zeige $a_{2k} + a_{2k+1} > \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$ und beweise mit Hilfe dieser Ungleichung die Divergenz der Reihe.

   (c) Warum ist das Leibniz–Kriterium nicht anwendbar ?

7. Man bestimme die Konvergenzradien ρ der Potenzreihen und untersuche die Konvergenz in den Punkten $z=\rho$ und $z=-\rho$!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 5^{(n^2)} z^{(n^2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n^2)}}{2^{n+1} n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m}, \ m \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$$