Freie Universität Berlin

Masterarbeit

Stokes-Darcy vs. Brinkman

Ein numerischer Vergleich

Autor
Frank Rehfeld
(5152609)

Betreuer
Prof. Dr. Volker John
Dr. Alfonso Caiazzo

19. Januar 2021

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Frank Rehfeld

Berlin, den 19. Januar 2021

Zusammenfassung

In der Anwendung finden sich sowohl in naturwissenschaftlichen, als auch in industriellen Bereichen, gekoppelte Flüsse, die sowohl in Gebieten, in denen der Fluss durch poröse Medien fließt, als auch in Gebieten des freien Fluss, stattfinden. Um diese Flüsse zu simulieren, gibt es verschiedene mathematische Modelle, die in dieser Arbeit teilweise verglichen werden sollen. Klassischerweise werden Strömungen linear viskoser, newtonscher Flüssigkeiten und Gase mit den Navier-Stokes Gleichungen modelliert, die jedoch in den Gebieten mit porösen Medien im Allgemeinen keine Anwendung finden. In diesen Bereichen wird das Darcy-Gesetz verwendet, das eine spezielle Lösung der Navier-Stokes Gleichungen darstellt.
Eine Variante, kombinierte Strömungen zu simulieren, ist ein Domain Decomposition Ansatz. Hierbei wird das Strömungsgebiet in zwei Teilgebiete zerlegt, die jeweils einen Strömungsbereich darstellen. Auf den Teilgebieten werden die Strömungen jeweils mit den Navier-Stokes Gleichungen, beziehungsweise dem Darcy Gesetz simuliert, wobei die Ergebnisse eines Gebiets jeweils über Kopplungsbedingung die Randwerte für die Simulation auf dem anderen Teilgebiet vorgeben. Über eine Iteration dieses Vorgehens wird die Strömung auf dem gesamten Gebiet simuliert.
Die zweite Variante zur Strömungssimulation ist die Brinkman-Gleichung, die eine Mischung aus den Navier-Stokes Gleichungen und dem Darcy-Gesetz ist. Hierbei wird die Strömung sowohl im porösen Bereich, als auch im Bereich des freien Fluss gleichzeitig simuliert. Die Kopplung der beiden Strömungsbereiche findet hierbei in der Wahl der Randbedingungen Einfluss.
In dieser Arbeit wird die Entwicklung beider Modelle im Abschnitt 2 dargestellt und anhand ausgewählter Beispiele ein numerischer Vergleich auf Basis von Finite Elementen Methoden in Abschnitt 4 durchgeführt. Die hierfür notwendigen Grundlagen werden in Abschnitt 3 eingeführt. Zum Abschluss werden in Abschnitt 5 die Ergebnisse noch einmal zusammen gefasst und ein Ausblick auf weitere interessante Ansätze aus dem Bereich der Strömungssimulation in porösen Medien gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Physikalische Grundlagen 1
1.2 Mathematische Grundlagen 3

2 Modellierung von Flüssen durch poröse Medien **5**
2.1 Die Stokes Gleichungen 5
2.2 Die Darcy Gleichungen 10
2.3 Kopplungen 13
2.4 Die Brinkman Gleichungen 14

3 Schwache Formulierungen und Finite Elemente Diskretisierung **17**
3.1 Dimensionslose Gleichungen 17
3.2 Schwache Formulierungen 19
3.3 Diskretisierte Formulierung 35

4 Numerische Experimente **38**
4.1 Beispiele aus Kategorie 2 38
4.2 Beispiel aus Kategorie 3 40
4.3 Vergleichende Ergebnisse 41

5 Zusammenfassung und Ausblick **54**

A Appendix 1 - Funktionalanalytische Grundlagen **56**

B Appendix 2 - Weitere Daten **62**
B.1 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.1 62
B.2 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.2 71
B.3 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.3 75

Literaturverzeichnis **77**

Abbildungsverzeichnis

1 Skizze der mathematischen Modellierung . . . 3
2 George Gabriel Stokes . . . 5
3 Skizze des durchgeführten Experiments . . . 11
4 Henry Philibert Gaspard Darcy . . . 11
5 Henri Coenraad Brinkman . . . 15
6 Erweiterung von Ω_f im Fall $\Gamma_{f,D} \neq \delta\Omega_f$ . . . 27
7 Verwendetes Gebiet für Beispiele der Kategorie 2 . . . 38
8 Verwendetes Gebiet und Gitter für Beispiel der Kategorie 3 . . . 41
9 Exakte Lösung $(\mathbf{u}_{sol}, p_{sol}, \varphi_{sol})^T$ von Beispiel 1 für $k = \nu = 1$ und $r = 3$ . . . 42
10 Simulationen und Fehler im Druck für Beispiel 1 für $K = \nu = 1$ und $r = 3$ . . . 43
11 Fehler der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation für Beispiel 1 in Abhängigkeit von k . . . 44
12 Fehler der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation für Beispiel 1 in Abhängigkeit von k . . . 45
13 Fehler $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1 . . . 45
14 Fehler p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1 . . . 46
15 Fehler der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation für Beispiel 1 in Abhängigkeit von r . . . 46
16 Exakte Lösung $\mathbf{u}_{sol}$ und Simulation $\mathbf{u}$ von Beispiel 1 . . . 47
17 Exakte Lösung $(\mathbf{u}_{sol}, p_{sol}, \varphi_{sol})^T$ von Beispiel 2 für $k = \nu = 1$ und $r = 3$ . . . 48
18 Simulationen und Fehler im Druck für Beispiel 3 für $r = 3$ . . . 49
19 Fehler der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation für Beispiel 2 in Abhängigkeit von r . . . 50
20 $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ bzw. p_{err} für die Stokes-Darcy Simulation (links) und Brinkman Simulation (rechts) von Beispiel 2 . . . 51
21 Exakte Lösung $\mathbf{u}_{sol}$ und Simulation $\mathbf{u}$ von Beispiel 1 . . . 51
22 Stokes-Darcy Simulation und Brinkman Simulation von p für Beispiel 3 für $r = 3$ 52
23 Stokes-Darcy Simulation und Brinkman Simulation von $\mathbf{u}$ für Beispiel 3 für $r = 3$ 53
24 Differenz zwischen den Druckfeldern der Stokes-Darcy und der Brinkman Simulation für Beispiel 3 und $r = 3$ . . . 53
25 Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1 - Teil 1 . . . 62
26 Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1 - Teil 2 . . . 63
27 Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1 - Teil 1 . . . 64
28 Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1 - Teil 2 . . . 65
29 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1 - Teil 1 . . . 66
30 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1 - Teil 2 . . . 67
31 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 1 - Teil 1 . . . 68
32 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 1 - Teil 2 . . . 69
33 Fehler der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation für Beispiel 1 in Abhängigkeit von r . . . 70
34 Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 2 . 71
35 Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 2 . . . 72
36 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 2 . . . 73

37 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 2 74
38 Weitere Plots von $(p, \varphi)^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 3 . . . 75
39 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 3 75
40 Weitere Plots von p für die Brinkman Simulation von Beispiel 3 76
41 Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 3 76

Tabellenverzeichnis

1 Porösität und Permeabilität für verschiedene Medien 2
2 Dynamische und kinematische Viskosität verschiedener Fluide 2
3 Größen und Einheiten des Massenerhalts 6
4 Größen und Einheiten des Impulserhalts 9
5 Größen und Einheiten der Darcy Gleichungen 13
6 Größen und Einheiten der Brinkman Gleichungen 15
7 Gittergrößen im Beispiel 1 für verschiedene Verfeinerungsgrade 43

1 Einführung

Mit dem Begriff „Poröse Medien“ sind Materialien gemeint, die aus einer festen Matrix mit einem verbundenen Leerraum bestehen (vgl. [16]). Die Verbundenheit des Leerraums ermöglicht es dem Fluid, durch das Medium hindurch zu strömen. Je nachdem, wie viele Fluide das Medium durchströmen, wird von einem Ein- oder Mehrphasenfluss gesprochen. Diese Arbeit wird sich jedoch auf Einphasenflüsse beschränken.
Klassische Anwendungsfelder für diese Art von Strömungen sind Wasserströmungen im Uferbereich oder Flussbetten. Im Bereich des Bioingenieurwesens finden sich Beispiele wie der Transport von Stoffen mit dem Blutfluss durch poröse Membranen in Oxygenatoren oder Dialysegeräten. In der Industrie finden sich poröse Medien häufig in Bereichen, in denen Fluide gefiltert werden müssen, beispielsweise bei Ölfiltern.

1.1 Physikalische Grundlagen

Zuerst werden die physikalischen Eigenschaften definiert, die genutzt werden, um das Problem zu beschreiben.

1.1.1 Allgemeine Materialeigenschaften

Definition (Homogenität)
Ein Medium $M \subset \mathbb{R}^n$ wird homogen bezüglich der Eigenschaft P genannt, wenn P unabhängig von der räumlichen Variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist.

Definition (Isotropie)
Ein Medium $M \subset \mathbb{R}^n$ wird isotrop bezüglich der Eigenschaft P genannt, wenn P unabhängig von der Richtung ist.

1.1.2 Eigenschaften poröser Medien

Definition (Sättigung)
Die Sättigung S_f beschreibt das Verhältnis aus dem vom Fluid f eingenommenen Volumen und dem verfügbaren Leerraum.

$$S_f = \frac{V_f}{V_e} \in [0, 1].$$

In dieser Arbeit wird $S_f = 1$ angenommen.

Definition (Porösität)
Die Porösität ϕ beschreibt das Verhältnis aus verfügbaren Leerraum und dem Gesamtvolumen.

$$\phi = \frac{V_f}{V} \in [0, 1].$$

Definition (Permeabilität)
Die Permeabilität $\mathbb{K}$ bezeichnet die Durchlässigkeit eines porösen Mediums $M \subset \mathbb{R}^n$ für ein Fluid f. Je höher die Permeabilität, desto geringer ist der Flusswiderstand. Sie wird im Allgemeinen als Tensor modelliert und hat für Fluide, die bezüglich $\mathbb{K}$ isotrop sind, die Form $\mathbb{K} = k\mathbb{I}$. Nach [7] wird k durch

$$k = \frac{c d^2 \phi^3}{(1-\phi)^2}$$

Tabelle 1: Porösität und Permeabilität für verschiedene Medien

Medium	Porösität	Permeabilität $[m^2]$
Erdboden	0,45 - 0,54	$2{,}9 \cdot 10^{-11}$ - $1{,}4 \cdot 10^{-9}$
Kalkstein	0,04 - 0,10	$2 \cdot 10^{-13}$ - $4{,}5 \cdot 10^{-11}$
Sand	0,37 - 0,50	$2 \cdot 10^{-9}$ - $1{,}8 \cdot 10^{-8}$
Sandstein	0,08 - 0,38	$5 \cdot 10^{-14}$ - $3 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 2: Dynamische und kinematische Viskosität verschiedener Fluide

Fluid	dynamische Viskosität	kinematische Viskosität
Blutplasma	$1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Pa s	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Pa s
Luft	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa s	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Pa s
Wasser	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Pa s	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Pa s

bestimmt, wobei c eine Konstante ist und d die durchschnittliche Korngröße von M ist. Somit gibt sich als SI-Einheit der Permeabilität m^2. Gebräuchlicher ist jedoch die Einheit

$$1\,D = 9{,}87 \cdot 10^{-13}\,m^2$$

beziehungsweise μD.

Einige Werte der Porösität und Permeabilität verschiedener Medien sind in der Tabelle 1 gelistet. Für weitere Werte siehe [3] und [16].

1.1.3 Eigenschaften von Fluiden

Definition (Kompressibilität)
Ein Fluid wird kompressibel genannt, wenn die Dichte ρ abhängig vom Druck p ist. Andernfalls wird das Fluid inkompressibel genannt.

Definition (Viskosität)
Die Viskosität eines Fluids beschreibt ihren Widerstand gegen Deformation durch mechanische Belastung. Nach Newtons Viskositätsgesetz wird der viskose Belastungstensor $\mathbb{V}$ im allgemeinen Fall bestimmt durch

$$\mathbb{V} = 2\mu\mathbb{D}(u) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot u). \tag{1.1.1}$$

Hierbei bezeichnet $\mu[Pa\,s]$ die dynamische Viskosität und $\xi[Pa\,s]$ die Volumenviskosität oder zweite Viskosität.
Fluide, die dieses Gesetz erfüllen, werden newtonsche Fluide genannt.
Die kinematische Viskosität $\nu\left[m^2/s\right]$ beschreibt das Verhältnis zwischen der dynamischen Viskosität μ und der Dichte ρ.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{1.1.2}$$

Einige Werte der dynamischen und kinematischen Viskosität sind in der Tabelle 2 aufgelistet.
Neben den definierten Größen wird im Bereich der Flüsse durch poröse Medien die effektive Viskosität genutzt, die teilweise auch als Brinkman-Viskosität bezeichnet wird. Für die effektive Viskosität gibt es verschiedenste Definitionsansätze, die teilweise auf die Arbeit von

Einstein zurück gehen. Dieser definierte diese als

$$\mu_{\text{eff}} = \mu\left(1 + \frac{5}{2}(1-\phi)\right).$$

1.2 Mathematische Grundlagen

1.2.1 Modellierung des Gebiets

Zur mathematischen Modellierung wird das betrachtete Gebiet als Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand $\delta\Omega = \Gamma$ betrachtet. Diese Menge Ω besteht aus den beiden Teilmengen Ω_f und Ω_p für die gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega_f} \cup \overline{\Omega_p} &= \overline{\Omega} \\
\Omega_f \cap \Omega_p &= \emptyset \\
\overline{\Omega_f} \cap \overline{\Omega_p} &= \Gamma_I.
\end{aligned}$$

Ω_f beschreibt den Teilbereich, in dem das Fluid F frei fließen kann und Ω_p entsprechend den Teilbereich, in dem das Fluid das poröse Medium M durchfließt.

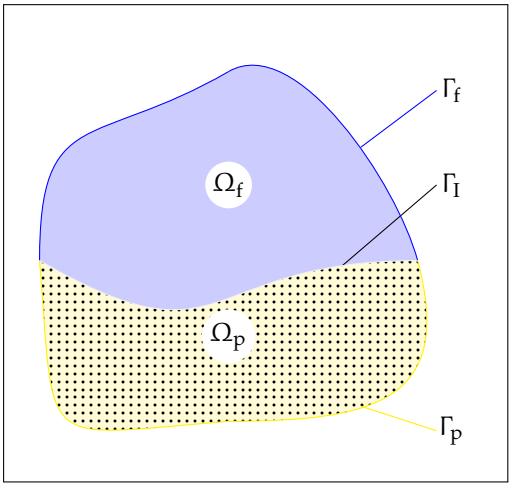

Abbildung 1: Skizze der mathematischen Modellierung

1.2.2 Verschiedene Ableitungsbegriffe

Definition 1.1 (Totales Differential)
Sei $\phi(\mathbf{x}(t), t)$ ein Skalarfeld auf $V \subset \mathbb{R}^3$. Dann wird das totale Differential definiert als

$$\frac{d}{dt}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\phi \frac{d}{dt}\mathbf{x}.$$

Theorem 1.1: Satz von Gauß

Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein kompaktes Volumen mit stückweise glatten Rand $S = \delta V$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ beschreibe den Einheitsnormalenvektor und $\chi(\mathbf{x}, t)$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_V \nabla \cdot \chi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_S \chi \cdot \mathbf{n} dA.$$

Beweis. Siehe [20] Theorem 1.2.2. □

Theorem 1.2: Reynoldsches Transporttheorem

Sei $V(t) \subset \mathbb{R}^3$ ein zeitabhängiges Volumen und $\chi(\boldsymbol{x}, t)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \chi(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}\chi(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} + \int_{\delta V(t)} (\chi \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})(s, t) dA. \tag{1.2.1}$$

Beweis. Siehe [20] Theorem 1.3.1. □

2 Modellierung von Flüssen durch poröse Medien

Dieses Kapitel stellt die Modellierung von Flüssen durch poröse Medien mittels verschiedener Modellierungsansätze dar. Der erste präsentierte Ansatz ist die Stokes-Darcy Kopplung. Hierfür werden die beiden Teilbereiche Ω_f und Ω_p separat modelliert und mittels einer geeigneten Kopplungsbedingung auf Γ_I miteinander verbunden. Als Zweites werden die Brinkman Gleichungen präsentiert, für die ein Zerlegen des Gebiets nicht mehr nötig ist und für die somit einfacher zu implementierende Algorithmen genutzt werden können.

2.1 Die Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen stellen ein mathematisches Modell zur Simulation von Strömungen linear-viskoser newtonscher Fluide dar. Sie erweitern die Euler-Gleichungen um Terme zur Betrachtung der Viskosität.

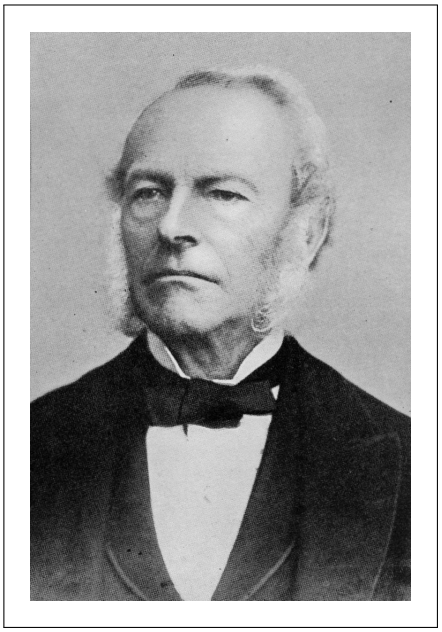

Abbildung 2: George Gabriel Stokes, *13. August 1819, † 1. Februar 1903

2.1.1 Der Massenerhalt

Zentrale Bedeutung bei der Simulation von Flüssen inkompressibler Fluide hat der Erhalt der transportierten Masse. Durch diesen entsteht eine Bedingung an das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$.

Hierfür wird das Kontrollvolumen $V(t) \subseteq \Omega_f$ zum Zeitpunkt t betrachtet, in dem das Fluid F die Dichte $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ annimmt. Mit dieser gegebenen Größe lässt sich die Masse $m(t)$ des Fluids in V durch Integration bestimmen. Es gilt

$$m(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Der Massenfluss aus $V(t)$ heraus geschieht über den Rand $\delta V(t)$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}$ und wird ebenfalls mithilfe eines Integrals bestimmt. Der Abfluss zum Zeitpunkt t ist

$$\frac{d}{dt} m(t) = -\int_{\delta V(t)} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(s, t) dA.$$

Somit ergibt sich durch Zusammenfügen der beiden Gleichungen mithilfe der Theoreme 1.1 und 1.2

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\
&= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\delta V(t)} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(s, t) dA \\
&= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho v)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Tabelle 3: Größen und Einheiten des Massenerhalts

Zeichen	Größe	SI-Einheit
m	Masse	kg
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeit	m/s
ρ	Dichte	kg/m^3

Somit ergibt sich durch den Erhalt der Masse

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right) (\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 0.$$

Nachdem keine Bedingungen an das Kontrollvolumen $V(t)$ gestellt wurden, gelten die getroffenen Aussagen für beliebige $V(t)$, was zur Folge hat, dass der Integrand verschwinden muss. Somit ergibt sich die Erhaltungsform der Kontinuitätsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \right) (\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T], x \in \Omega_f.$$

Anschließend wird das Reynoldsche Transporttheorem verwendet. Es ergibt sich somit

$$\left(\frac{d}{dt} \rho - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \rho \right) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

was aufgrund der Inkompressibilität des Fluids, also der Bedingung $\rho(\boldsymbol{x}, t) = \mathit{const}$, zur Bedingung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{2.1.1}$$

der so genannten Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes führt.

2.1.2 Der Impulserhalt

Neben dem Massenerhalt ist der Impulserhalt die zweite zentrale Komponente in der Strömungssimulation linear-viskoser newtonscher Fluide. Hierbei wird der Impuls als physikalische Größe auf dem Kontrollvolumen $V(t) \subseteq \Omega_f$ betrachtet. Diese lässt sich bestimmen durch

$$I(t) = \int_{V(t)} (\rho \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x}.$$

Analog zum Massenerhalt in $V(t)$ wird der Impulserhalt durch Theorem 1.2 formuliert als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} + \int_{\delta V(t)} (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})(s, t) dA \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}) \right) (\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Anmerkung (Zweites Newtonsches Gesetz)
Das zweite Newtonsche Gesetz beschreibt die zeitliche Änderung des Impuls. Original fomuliert lautet es in [15]

> *Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

Die zeitliche Änderung des Impuls eines Körpers entspricht also den resultierenden Kräften, die auf den Körper wirken. Daher wird dieses Gesetz auch Impulssatz genannt.

Es gilt also

$$\frac{d}{dt}I(t) = F(t) = \int_{V(t)} f_{net}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}, \tag{2.1.3}$$

wobei $f_{net}(\boldsymbol{x}, t)$ die Kraftdichte in $V(t)$ beschreibt.

Die Kombination aus (2.1.3) und (2.1.2) ergibt somit

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\right)(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int_{V(t)} f_{net}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}$$

oder nach Anwendung der Produktregel

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{v} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right)(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int_{V(t)} f_{net}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}.$$

Aus Abschnitt 2.1.1 ist bekannt, dass für inkompressible Fluide mit $\rho(\boldsymbol{x}, t) = \mathit{const}$ gilt:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

und somit entfallen in (2.1.2) diverse Terme. Die vereinfachte Gleichung lautet dann

$$\int_{V(t)} \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right)(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int_{V(t)} f_{net}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}. \tag{2.1.4}$$

Da erneut keine Anforderungen an das Gebiet $V(t)$ gestellt wurden, erhält man das Erhaltungsgesetz

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right)(\boldsymbol{x}, t) = f_{net}(\boldsymbol{x}, t) \quad \forall t \in (0, T], x \in \Omega_f. \tag{2.1.5}$$

Die resultierenden Kräfte f_{net} werden aufgeteilt in die externen und internen Kräfte. Die externen Kräfte umfassen hierbei beispielsweise die Gravitation, Auftrieb und ähnliche von außen wirkende Kräfte. Diese Kräfte wirken auf ein Fluidelement $V(t)$ und werden bestimmt durch

$$\int_{V(t)} f_{ext}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}.$$

Zu den internen Kräften zählen alle Kräfte, die ein Fluidelement auf sich selbst ausübt. Beispiele hierfür sind Druckkräfte oder der Reibungswiderstand, der zwischen Fluidelementen wirkt. Im Gegensatz zu den externen Kräften wirken diese Kräfte auf die Oberfläche eines Volumenelements $V(t)$, haben also die Form

$$\int_{\delta V(t)} \boldsymbol{t}(s, t)dA. \tag{2.1.6}$$

Hierbei wird $\boldsymbol{t}$ als Cauchyscher Spannungstensor bezeichnet und hängt nach [13, Abschnitt 2.2] linear von $\boldsymbol{n}$ ab, hat also die Form

$$\boldsymbol{t} = \mathbb{S}\boldsymbol{n} \tag{2.1.7}$$

mit $\mathbb{S}$ als 3×3 Tensor, der alle internen Kräfte darstellt.

Das Einsetzen von (2.1.7) in (2.1.6) ergibt mit Anwendung von Theorem 1.1

$$\begin{aligned}\int_{\delta V(t)} \mathbf{t}(s,t)dA &= \int_{\delta V(t)} (\mathbb{S}\cdot\mathbf{n})(s,t)dA \\ &= \int_{V(t)} \nabla\cdot\mathbb{S}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

wobei die Divergenz eines Tensors zeilenweise definiert wird

$$\nabla\cdot\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}s_{11} + \frac{\partial}{\partial y}s_{12} + \frac{\partial}{\partial z}s_{13} \\ \frac{\partial}{\partial x}s_{21} + \frac{\partial}{\partial y}s_{22} + \frac{\partial}{\partial z}s_{23} \\ \frac{\partial}{\partial x}s_{31} + \frac{\partial}{\partial y}s_{32} + \frac{\partial}{\partial z}s_{33} \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Kräfteaufteilung in (2.1.4) ein und nutzt erneut, dass es keine Forderungen an $V(t)$ gibt, erhält man analog zu (2.1.5)

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right)(\mathbf{x},t) = (\nabla\cdot\mathbb{S} + f_{ext})(\mathbf{x},t) \quad \forall t\in(0,T], x\in\Omega_f. \tag{2.1.8}$$

Der Tensor $\mathbb{S}$ wird weiter zerlegt durch

$$\mathbb{S} = \mathbb{V} - P\mathbb{I},$$

wobei $\mathbb{V}$ als viskoser Spannungstensor bezeichnet wird und P den Druck beschreibt. $\mathbb{V}$ hat, wie in Abschnitt 1.1 Gleichung (1.1.1) die Form

$$\mathbb{V} = 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + \left(\zeta - \frac{2\mu}{3}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbb{I} \tag{2.1.9}$$

mit

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T}{2}.$$

Für inkompressible Fluide ergibt sich also, aufgrund von $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$,

$$\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) - P\mathbb{I} \tag{2.1.10}$$

und somit durch Einsetzen in (2.1.8) mit $\nabla\cdot(P\mathbb{I}) = \nabla P$ und $\nu = \mu/\rho$,

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} - 2\nu\nabla\cdot\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{x},t) = f_{ext}(\mathbf{x},t) \quad \forall t\in(0,T], x\in\Omega_f. \tag{2.1.11}$$

Aufgrund der Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit kann der viskose Term umformuliert werden. Es gelten:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) &= \Delta\boldsymbol{v} \\ \nabla\cdot\left(\nabla\boldsymbol{v}^T\right) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = 0\end{aligned}$$

und somit

$$-2\nu\nabla\cdot\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = -\nu\Delta\boldsymbol{v}.$$

Tabelle 4: Größen und Einheiten des Impulserhalts

Zeichen	Größe	SI-Einheit
f_{ext}	externe Kräfte	$kg \cdot m/s^2$
I	Impuls	$kg \cdot m/s$
P	Druck	$kg/m \cdot s^2$
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeit	m/s
ν	kinematische Viskosität	m^2/s
ρ	Dichte	kg/m^3

Somit stellt das System

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\frac{P}{\rho}\right)(\boldsymbol{x},t) = f_{ext}(\boldsymbol{x},t) \quad \forall t \in (0,T], x \in \Omega_f \tag{2.1.12}$$

eine zu (2.1.11) äquivalente Formulierung des Impulserhalts dar.
Die Ergebnisse aus den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 führen schließlich zu den Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\frac{P}{\rho}\right)(\boldsymbol{x},t) &= \frac{f_{ext}}{\rho}(\boldsymbol{x},t) \text{ in } (0,T]\times\Omega_f \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) &= 0 \qquad\quad \text{in } (0,T]\times\Omega_f.\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Dieses Gleichungssystem kann durch verschiedene Annahmen weiter vereinfacht werden. In dieser Arbeit werden die folgenden Forderungen als erfüllt angenommen:

— der betrachtete Fluss ist stationär, also $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$,

— der viskose Transport dominiert die Konvektion, die nichtlinearen Konvektionsterme können also vernachlässigt werden.

Diese Annahmen führen zu einem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(\nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p)(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}_f(\boldsymbol{x}) \text{ in } \Omega_f \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 \qquad \text{in } \Omega_f,\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

genannt Stokes-Gleichungen in Laplace-Form.
Alternativ können die Stokes-Gleichungen auch in der Cauchy-Spannungstensorform formuliert werden. Hierfür wird die anfängliche Formulierung (2.1.10) des Cauchyschen Spannungstensors verwendet und das System nimmt die Form

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(-2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + p\mathbb{I})(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}_f(\boldsymbol{x}) \text{ in } \Omega_f \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 \qquad \text{in } \Omega_f\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

oder

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p) &= \boldsymbol{f}_f(\boldsymbol{x}) \text{ in } \Omega_f \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 \qquad \text{in } \Omega_f\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

an.

2.1.3 Randbedingungen für die Stokes Gleichungen

Die in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 erarbeiteten Stokes-Gleichungen müssen für die Lösbarkeit noch mit Randbedingungen ausgestattet werden. Hierbei werden drei verschiedene

Arten von Randbedingungen unterschieden. Außerdem gibt es Anforderungen an den Rand $\delta\Omega_f$:

— $\overline{\Gamma_{f,D}} \cup \overline{\Gamma_{f,N}} = \delta\Omega_f \setminus \Gamma_I =: \Gamma_f$

— $\Gamma_{f,D} \cap \Gamma_{f,N} = \emptyset$.

Dirichlet-Randbedingungen sind vorgegebene Funktionswerte auf einem Teil des Randes. Der Teil des Randes, auf dem Funktionswerte vorgeschrieben werden, wird mit $\Gamma_{f,D} \subseteq \Gamma_f$ bezeichnet. Es gilt formal also für eine vorgegebene Funktion $\boldsymbol{v}_D$:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_D(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{f,D}.$$

In der Anwendung wird im Allgemeinen nur der homogene Fall $\boldsymbol{v}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ auf ganz Γ_f behandelt, der als Haftbedingung oder No-slip Bedingung bekannt ist.
Neumann-Randbedingungen schreiben auf einem Teil $\Gamma_{f,N} \subseteq \Gamma_f$ des Randes die Werte für die Normalableitung einer Funktion vor. Für gegebenes $\boldsymbol{g}_f$ gilt

$$\boldsymbol{n}_f \cdot \mathcal{S}(\boldsymbol{v}, p) = \boldsymbol{g}_f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{f,N}.$$

Die beiden beschriebenen Randbedingungen können auch als Linearkombination genutzt werden. Es entstehen so genannte Robin-Randbedingungen, bei denen eine Linearkombination aus Funktionswert und Wert der Normalenableitung vorgegeben wird. So wird für gegebene Skalare α, β und eine Funktion $\boldsymbol{v}_R$ auf $\Gamma_{f,R} \subseteq \Gamma_f$ gefordert

$$\alpha\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \beta\boldsymbol{n}_f \cdot \nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_R(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{f,R}.$$

Anmerkung
In dieser Arbeit werden lediglich Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen behandelt.

Somit ergibt sich mit den Ergebnissen aus den Abschnitten 2.1.1 bis 2.1.3 das System

Problem 2.1: Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathcal{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \boldsymbol{f}_f(\boldsymbol{x}) && \text{in } \Omega_f \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 && \text{in } \Omega_f \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v}_D && \text{auf } \Gamma_{f,D} \\ \boldsymbol{n}_f \cdot \mathcal{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \boldsymbol{g}_f(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{f,N}. \end{aligned}$$

2.2 Die Darcy Gleichungen

Die Darcy Gleichungen sind ein Modell zur Modellierung von laminaren, inkompressiblen, gesättigten Flüssen newtonscher, viskoser Fluide durch poröse Medien auf makroskopischer Skala.
In [9] befasste sich der französische Ingenieur H. Darcy unter anderem mit der Filtrationsrate von Wasser durch Sandschichten. Hierfür nutzte er die in Abb. 3 skizzierte Versuchsandordnung. Hierfür wurde in einem zylindrischen Gefäß zwischen zwei Filtern eine Sandschicht mit Höhe L_s eingesetzt. Über den Zufluss konnte Wasser oberhalb der Sandschicht zugeführt werden und floß über den Abfluss wieder ab, um in einem Auffangbehälter aufgefangen zu werden. Sowohl am Zu-, als auch am Abfluss waren Nanometer montiert, die über eine

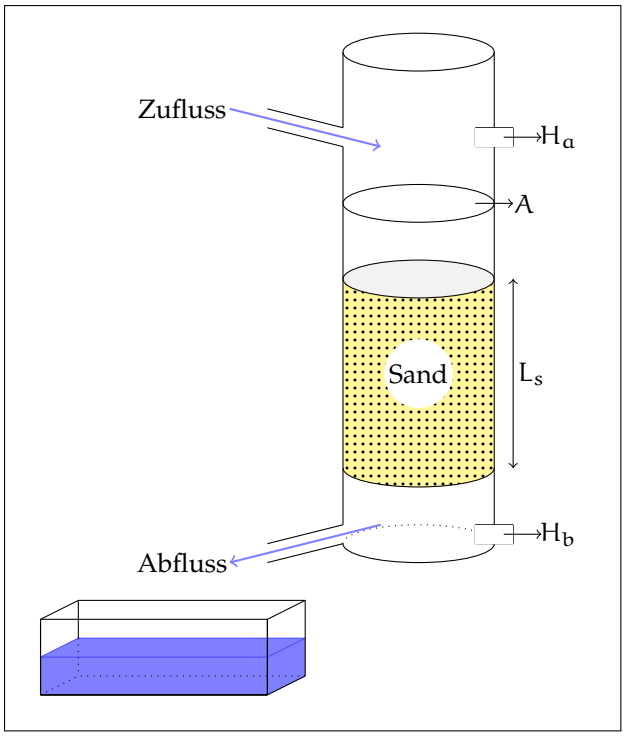

Abbildung 3: Skizze des durchgeführten Experiments

Quecksilbersäule der Höhe H_a, H_b den Druck an der jeweiligen Stelle anzeigten. Nun wurde über den Zufluss ein definierter Druck auf die obere Kammer gegeben und die Wassermenge V_W, die innerhalb einer bestimmten Zeit abfloss mittels des Auffangbehälters gemessen. Über diese Messungen bestimmte Darcy die Abflussrate Q des Wassers.
In seinen Versuchen machte Darcy drei essentielle Erkenntnisse zu den Abhängigkeiten von Q.

I. Die Abflussrate Q verhält sich proportional zur Differenz zwischen den beiden gemessenen Quecksilbersäulen:

$$Q \propto \Delta H := H_a - H_b. \tag{2.2.1}$$

II. Die Abflussrate Q verhält sich invers proportional zur Stärke L_s der Sandschicht:

$$Q \propto \frac{1}{L_s}. \tag{2.2.2}$$

III. Die Abflussrate Q verhält sich proportional zur Querschnittsfläche A des Zylinders:

$$Q \propto A. \tag{2.2.3}$$

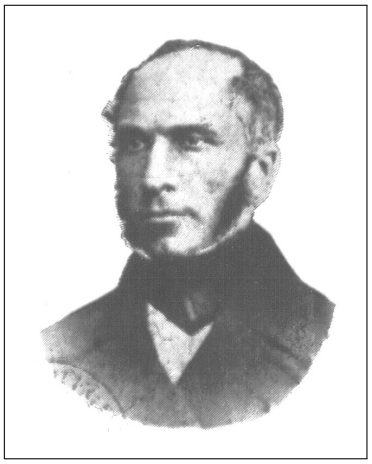

Abbildung 4: Henry Philibert Gaspard Darcy,
*10. Juni 1803, † 3. Januar 1858

Die Gleichungen (2.2.1) bis (2.2.3) ergeben schließlich eine Gleichung für die Abflussrate Q

$$Q = KA\frac{\Delta H}{L_s}, \tag{2.2.4}$$

wobei K (hydraulische Durchlässigkeit) eine Konstante zur Charakteristik des Fluids und des porösen Mediums ist. Über die Abflussrate Q wird die Darcy-Geschwindigkeit u definiert als

$$u := \frac{Q}{A}. \tag{2.2.5}$$

Das Einsetzen von (2.2.5) in (2.2.4) ergibt

$$u = K\frac{\Delta H}{L_s}. \tag{2.2.6}$$

Nach [1] gilt außerdem für die Permeabilität $\mathbb{K}$ die Gleichung

$$\mathbb{K} = K\frac{\mu}{\rho g} \tag{2.2.7}$$

mit der dynamischen Viskosität μ und der Fluiddichte ρ. Weiterhin kann das hydraulische Potential H in zwei Teile aufgeteilt werden. Es gilt:

$$H := \frac{\varphi}{\rho g} + z. \tag{2.2.8}$$

Hierbei stellt der erste Term die Druckenergie dar und der zweite Term die potentielle Energie. Einsetzen von (2.2.7) und (2.2.8) in (2.2.6) ergibt somit

$$u = \frac{\mathbb{K}}{\mu}\left(\frac{\varphi_a - \varphi_b}{L_s} + \frac{\rho g(z_a - z_b)}{L_s}\right)$$

oder unter der Annahme $z_a = z_b$

$$u = \frac{\mathbb{K}}{\mu}\frac{\Delta\varphi}{L_s}.$$

Um die, bisher eindimensionalen, Beobachtungen in ein zwei- bzw. dreidimensionales System zu überführen, wird die skalare Größe Darcy Geschwindigkeit in eine vektorwertige Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix}$$

umformuliert. Somit ergibt sich das mehrdimensionale System

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbb{K}}{\mu}\nabla\varphi(\mathbf{x}). \tag{2.2.9}$$

Mit einem Quellterm $f_p \in L^2(\Omega_p)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbb{K}}{\mu}\nabla\varphi(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{in } \Omega_p \\ \nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= f_p(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega_p. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Diese Form ist als gemischte Darstellung der Darcy Gleichungen bekannt. Durch die Bildung der Divergenz der ersten Gleichung und Einsetzen der zweiten Gleichung wird die häufiger genutzte Form

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\mathbb{K}}{\mu}\nabla\varphi(\mathbf{x})\right) = f_p(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega_p \tag{2.2.11}$$

erzeugt. Definition von Randbedingungen auf Γ_p führt schließlich, zusammen mit den Ergeb-

Tabelle 5: Größen und Einheiten der Darcy Gleichungen

Zeichen	Größe	SI-Einheit
A	Querschnittsfläche	m^2
$H, H_a, H_b, \Delta H$	Quecksilbersäule	m
$\mathbb{K}$	Permeabilität	m^2
L_s	Schichtstärke	m
$\varphi, \varphi_a, \varphi_b$	Druck	$kg/m \cdot s^2$
Q	Abflussrate	m^3/s
$u, \mathbf{u}$	Darcy-Geschwindigkeit	m/s
μ	dynamische Viskosität	$kg/m \cdot s$
ρ	Dichte	kg/m^3

nissen aus Abschnitt 2.2, zu dem System

Problem 2.2: Darcy Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \right) &= f_p(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega_p \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi_D(\mathbf{x}) \text{ auf } \Gamma_{p,D} \\ -\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_p &= \varphi_N(\mathbf{x}) \text{ auf } \Gamma_{p,N}. \end{aligned}$$

2.3 Kopplungen

Um die beiden Teilprobleme mit einer Domain Decomposition Methode zu lösen und hierbei eine physikalisch sinnvolle Lösung zu generieren, werden Kopplungsbedingungen zwischen den beiden Lösungen benötigt.
Da $\mathbf{n}_p$ und $\mathbf{n}_f$ die jeweiligen auswärts gerichteten Einheitsnormalenvektor an Γ_p bzw. Γ_f beschreiben, gilt auf Γ_I, dass $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_p$. Eine der einfachsten Bedingungen zur Beschreibung einer permeablen Grenzschicht Γ_I ist die Stetigkeit der Normalengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_f = -\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_p \quad \mathbf{x} \in \Gamma_I \tag{2.3.1}$$

oder äquivalent

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_p \quad \mathbf{x} \in \Gamma_I. \tag{2.3.2}$$

Eine weitere Bedingung auf Γ_I ist laut [14] die Erhaltung der Normalenkräfte. Auf Ω_f werden die Volumenkräfte durch den in (2.1.10) definierten Tensor $\mathbb{S}$ beschrieben. Auf Ω_p hingegen wirkt lediglich der Darcy-Druck φ in Richtung von g auf das Volumen. Somit ergibt sich die Bedingung

$$-\mathbf{n}_f \cdot \mathbb{S}(\mathbf{v}, p) \cdot \mathbf{n}_f = \varphi g. \tag{2.3.3}$$

Eine dritte Kopplungsbedingung betrifft die Tangentialkomponenten der Fluidgeschwindigkeiten auf Γ_I. Ein klassischer Ansatz hierfür war

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \tau_j = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_I$$

mit $(\tau_j)_{j=1}^{d-1}$ als Familie linear unabhängiger Einheitstangentialvektoren an Γ_I. Durch G. S. Beavers und D. D. Joseph wurde in [2] ein weiterer Ansatz präsentiert. Die zentrale Annahme

ihrer Arbeit ist, dass die Differenz zwischen der Schlupfgeschwindigkeit des freien Fluids und der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit im porösen Bereich proportional zur Scherrate des freien Fluids ist. Diese Annahme wurde durch sie experimentell bekräftigt und Aussagen zur Proportionalitätskonstante getätigt. Laut ihrer Experimente hängt die Konstante linear von der Quadratwurzel der Permeabilität ab. Eine zentrale Aussage der Arbeit ist, dass

$$\tau_j \cdot \partial_n \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K}}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \cdot \tau_j \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_I \tag{2.3.4}$$

wobei α_{BJ} eine dimensionslose Konstante in Abhängigkeit von der Struktur des porösen Mediums ist.
P. G. Saffman veröffentlichte in [18] weitere Überlegungen zur, von Beavers und Joseph entwickelten, Kopplungsbedingung. Das Hauptergebnis seiner Arbeit war, dass die Größe $\boldsymbol{u}$ deutlich kleiner als alle anderen betrachteten Größen ist und von daher in (2.3.4) vernachlässigt werden kann. Somit ergab sich die Formulierung

$$\tau_j \cdot \partial_n \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \tau_j \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_I \tag{2.3.5}$$

oder anders formuliert

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \tau_j + \alpha \tau_j \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f = 0. \tag{2.3.6}$$

Die Ergebnisse der Abschnitte 2.1 bis 2.3 führen schließlich zu einem System

Problem 2.3: Stokes-Darcy Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \boldsymbol{f}_f(\boldsymbol{x}) && \text{in } \Omega_f \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 && \text{in } \Omega_f \\
\nabla \cdot \left(\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\boldsymbol{x}) \right) &= f_p(\boldsymbol{x}) && \text{in } \Omega_p \\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v}_D && \text{auf } \Gamma_{f,D} \\
\boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \boldsymbol{g}_f(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{f,N} \\
\varphi(\boldsymbol{x}) &= \varphi_D(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{p,D} \\
-\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_p &= \varphi_N(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{p,N} \\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_f &= \frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_p && \text{auf } \Gamma_I \\
-\boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \varphi g && \text{auf } \Gamma_I \\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \tau_j + \alpha \tau_j \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f &= 0 && \text{auf } \Gamma_I,
\end{aligned}$$

das als Stokes-Darcy Gleichungen bekannt ist.

2.4 Die Brinkman Gleichungen

1949 wurde vom niederländischen Physiker H.C. Brinkman seine Arbeit [4] veröffentlicht, in der er sich mit dem von Darcy entwickelten Modell auseinandersetzte. Er passte das Modell an und entwickelte somit die so genannten Brinkman Gleichungen.

Anmerkung
Ab dieser Stelle wird der Einfachheit halber der Fall $\mathbb{K} = k\mathbb{I}$ betrachtet.

Sein Hauptkritikpunkt war das Fehlen des viskosen Spannungstensors, was dazu führt, dass das Modell lediglich für geringe Werte von k gute Approximationen ergibt. Als Lösung für

Tabelle 6: Größen und Einheiten der Brinkman Gleichungen

Zeichen	Größe	SI-Einheit
p	Druck	$kg/m \cdot s^2$
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeit	m/s
μ_{eff}	effektive dynamische Viskosität	$kg/m \cdot s$

diese Problematik empfiehlt er, die Darcy-Gleichungen (2.2.9) zu

$$\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) - \mu_{eff} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.4.1}$$

mit $\sigma := \mu k^{-1}$ abzuändern.
Im Falle eines kleinen k, also $k \to 0$, stellt (2.4.1) eine Approximation der Darcy-Gleichungen dar, da der Dämpfungsterm den viskosen Spannungstensor dominiert. L. Blank benennt dies in [3] als Darcy-Limit. Für $k \to \infty$ approximiert (2.4.1) die Gleichung zum Impulserhalt aus Abschnitt 2.1.2, von daher wird dieser Fall Stokes-Limit genannt.
Wie bereits in den vorigen Abschnitten, werden auch für die Brinkman Gleichungen Bedingungen an das Fluid gestellt. Somit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) - \mu_{eff} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

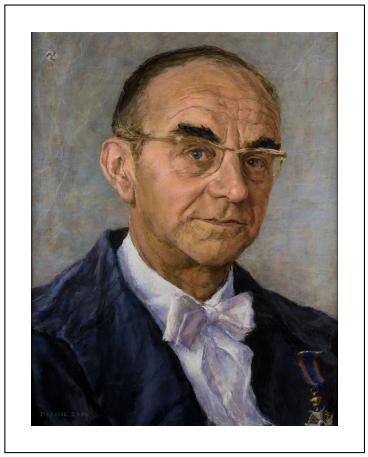

Abbildung 5: Henri Coenraad Brinkman,
*30. März 1908, † 11. Februar 1961

Anmerkung
Diese Arbeit behandelt nur Fälle, in denen die Koeffizienten σ und μ_{eff} stückweise konstant sind.

Aufgrund der Annahme an μ_{eff} ist (2.4.2) analog zu

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) - 2\nabla \cdot (\mu_{eff} \mathbb{D}(\mathbf{u})) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Werden analog zu Abschnitt 2.1.3 Randbedingungen definiert, so ergibt sich das als Brinkman Gleichungen bekannte System

Problem 2.4: Brinkman Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) - \mu_{eff} \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) && \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_N(\mathbf{x}) && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Anmerkung
Diese Arbeit betrachtet zwei verschiedene Fälle für die Randbedingungen.

$$\mu_{eff} > 0: \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ auf } \delta\Omega \tag{2.4.4a}$$

$$\mu_{eff} = 0: \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \delta\Omega. \tag{2.4.4b}$$

3 Schwache Formulierungen und Finite Elemente Diskretisierung

Dieses Kapitel zeigt auf, wie die Lösungen für die in Kapitel 2 entwickelten Modelle mithilfe von Finite Elemente Methoden numerisch approximiert werden können. Hierfür wird betrachtet, wie die Gleichungen in eine dimensionslose Form überführt werden und wie eine schwache Formulierung dieser dimensionslosen Form aufgestellt wird. Außerdem werden verschiedene Ansätze für iterative Domain Decomposition Verfahren für die Stokes-Darcy Gleichungen präsentiert.

3.1 Dimensionslose Gleichungen

Wie aus den Tabellen 3 bis 6 erkennbar ist, beschreiben alle erarbeiteten Modelle Strömungen in ihrer physikalischen Ausprägung. Um diese nun numerisch lösbar zu gestalten, ist es vonnöten, die Gleichungen ohne physikalische Einheiten auszudrücken. Hierfür werden Referenzgrößen für die verschiedenen physikalischen Dimensionen definiert und diese genutzt, um das System in ein dimensionsloses System umzuformen.

3.1.1 Die dimensionslosen Stokes Gleichungen

Um die Stokes Gleichungen dimensionslos zu gestalten, werden eine charakteristische Geschwindigkeit V und eine charakteristische Länge L definiert. Diese werden genutzt, um die dimensionslosen Variablen

$$\hat{\boldsymbol{v}} := \frac{\boldsymbol{v}}{V}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} := \frac{\boldsymbol{x}}{L}$$

zu definieren. Es ergeben sich also die Gleichheiten

$$\boldsymbol{v} = V\hat{\boldsymbol{v}}, \quad \boldsymbol{x} = L\hat{\boldsymbol{x}}.$$

Diese Gleichheiten werden genutzt, um (2.1.14) in

$$\begin{aligned} -2\nabla \cdot \frac{\nu}{VL}\mathbb{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \nabla \frac{p}{\rho V^2}(\boldsymbol{x})\mathbb{I} &= \frac{L}{\rho V^2} f_f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

umzuformen. Nun werden die Größen

$$\hat{p} := \frac{p}{\rho V^2}, \quad \hat{f}_f := \frac{L}{\rho V^2} f_f, \quad Re := \frac{VL}{\nu}$$

definiert. Somit ergibt sich die dimensionslose Form

Problem 3.1: Dimensionslose Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{2}{Re}\nabla \cdot \mathbb{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \nabla \hat{p}(\boldsymbol{x})\mathbb{I} &= \hat{f}_f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

mit der dimensionslosen Kennzahl Re, die Reynolds-Zahl genannt wird.

3.1.2 Die dimensionslosen Darcy Gleichungen

Es werden eine charakteristische Geschwindigkeit U, Druck Φ und Länge L definiert, um die Darcy Gleichungen dimensionslos zu gestalten. Mithilfe dieser Größen werden dimensionslose Variablen

$$\hat{\boldsymbol{v}} := \frac{\boldsymbol{v}}{V}, \quad \hat{\varphi} := \frac{\varphi}{\Phi}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} := \frac{\boldsymbol{x}}{L}$$

definiert und (2.2.10) kann mit $\sigma = \mu k^{-1}$ (siehe (2.4.1)) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \sigma U \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \nabla \frac{\Phi}{L} \hat{\varphi}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{U}{L} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= f \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Die Definition der Größen

$$\hat{\sigma} := \sigma \frac{LU}{\Phi}, \qquad \hat{f} := \frac{L}{\Phi} f,$$

und Division von (3.1.2) durch $\frac{P}{L}$ ergibt eine dimensionslose Darstellung als

Problem 3.2: Dimensionslose gemischte Darstellung der Darcy Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= 0 \quad \text{ in } \Omega \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Analog zur dimensionsbehafteten Herleitung lässt sich auch für den dimensionslosen Fall eine zweite Form der Darcy Gleichungen herleiten. Hierfür wird die erste Gleichung in 3.2 durch σ geteilt und anschließend die Divergenz gebildet. Nun kann die zweite Gleichung eingesetzt werden und es ergibt sich

Problem 3.3: Dimensionslose Darcy Gleichung

$$-\hat{\sigma}^{-1} \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \text{ in } \Omega.$$

3.1.3 Die dimensionslosen Brinkman Gleichungen

Als charakteristische Größen werden in den Brinkman Gleichungen eine charakteristische Geschwindigkeit U, sowie ein charakteristischer Druck P und Länge L definiert. Mit diesen Größen können dimensionslose Variablen

$$\hat{\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad \hat{p} := \frac{p}{P}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} := \frac{\boldsymbol{x}}{L}$$

definiert werden. Mit diesen Definitionen ergibt sich für die dimensionsbehafteten Variablen die Umformung

$$\boldsymbol{u} = U \hat{\boldsymbol{u}}, \quad p = P \hat{p}, \quad \boldsymbol{x} = L \hat{\boldsymbol{x}},$$

was zu einer Umformulierung des Problems (2.4.3) in die Form

$$\begin{aligned} \sigma U \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \hat{\nabla} \frac{P}{L} \hat{p}(\hat{\boldsymbol{x}}) - 2 \hat{\nabla} \cdot \left(\mu_{\text{eff}} \frac{U}{L^2} \mathbb{D}(\hat{\boldsymbol{u}}) \right) &= \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega \\ \frac{U}{L} \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= 0 \text{ in } \Omega \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

führt.
In [3] wird weiterhin aufgeführt, wie mit der Definition von

$$\hat{\mu}_{\text{eff}} := \mu_{\text{eff}} \frac{U}{LP}, \qquad \hat{\sigma} := \sigma \frac{LU}{P}, \qquad \hat{f} := \frac{L}{P} f,$$

die dimensionslose Form

Problem 3.4: Dimensionslose Brinkman Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\nabla}\hat{p}(\hat{\mathbf{x}}) - 2\nabla \cdot (\hat{\mu}_{\text{eff}} \mathbb{D}(\hat{\mathbf{u}})) &= \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ in } \Omega \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \quad \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

erreicht wird.

Anmerkung
Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Weiteren bei allen Gleichungen auf den Hut zur Kennzeichnung der dimensionslosen Größen verzichtet.

3.2 Schwache Formulierungen

Die schwache Lösungstheorie stellt eine Erweiterung der klassischen Lösungstheorie dar. Sie ermöglicht es, Lösungen von Differentialgleichungsproblemen zu finden, die schwächere Regularitätsanforderungen erfüllen. Des Weiteren legt sie die Grundlage für die Finite Elemente Methode, die zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen genutzt wird. Zentraler Punkt dieser Theorie ist die partielle Integration.
Diese wird genutzt, um eine Differentialgleichung in ihre schwache Form zu überführen. Hierfür wird die Differentialgleichung mit einer geeigneten Testfunktion multipliziert, anschließend über das betrachtete Gebiet integriert und die Ableitungen zweiter Ordnung mithilfe der partiellen Integration zu Ableitungen erster Ordnung umgeformt. Entscheidend hierbei ist die Wahl der Testfunktionen, da diese bestimmte Anforderungen erfüllen müssen. Eine zentrale Rolle übernehmen hierbei die in Abschnitt A eingeführten Sobolev-Räume.
Die gewählten Randbedingungen werden auf verschiedene Art in die schwache Formulierung integriert. Randbedingungen, die direkt in die schwache Formulierung eingearbeitet werden können, werden natürliche Randbedingungen genannt, wohingegen Randbedingungen, die einen Einfluss auf die Wahl des Funktionenraums für die Ansatz- und die Testfunktionen haben, wesentliche Randbedingungen genannt werden.

3.2.1 Schwache Formulierung der Stokes-Darcy Kopplung (Neumann-Neumann)

Zuerst wird, [21] folgend, die Herleitung, sowie die Existenz einer Lösung für die Neumann-Neumann-Kopplung dargestellt. Gegeben sind die Stokes-Darcy Gleichungen

Problem 3.5: Stokes-Darcy Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \mathbf{f}_f(\boldsymbol{x}) && \text{in } \Omega_f && (3.2.1a)\\
\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= 0 && \text{in } \Omega_f && (3.2.1b)\\
-\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi(\boldsymbol{x})\right) &= f_p(\boldsymbol{x}) && \text{in } \Omega_p && (3.2.1c)\\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v}_D && \text{auf } \Gamma_{f,D} && (3.2.1d)\\
\boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) &= \mathbf{g}_f(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{f,N} && (3.2.1e)\\
\varphi(\boldsymbol{x}) &= \varphi_D(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{p,D} && (3.2.1f)\\
-\frac{k}{\mu}\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_p &= \varphi_N(\boldsymbol{x}) && \text{auf } \Gamma_{p,N} && (3.2.1g)\\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_f &= \frac{k}{\mu}\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_p && \text{auf } \Gamma_I && (3.2.1h)\\
-\boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f &= \varphi g && \text{auf } \Gamma_I && (3.2.1i)\\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \alpha\boldsymbol{\tau}_j \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f &= 0 && \text{auf } \Gamma_I && (3.2.1j)
\end{aligned}
$$

Zur Überführung der Stokes-Darcy Gleichungen in die schwache Formulierung werden zuerst die folgenden Funktionenräume für die Testfunktionen genutzt. Hierbei finden die Dirichlet-Randbedingungen (3.2.1d) und (3.2.1f) teilweise Anwendung, so dass sich die Räume

$$
\begin{aligned}
V_f &= \left(\mathcal{D}_{\Gamma_{f,D}}(\Omega_f)\right)^d := \left\{\boldsymbol{v} \in (\mathcal{D}(\Omega_f))^d \colon v|_{\overline{\Gamma_{f,D}}} = 0\right\}\\
Q_f &= C^\infty(\Omega_f)\\
Q_p &= \mathcal{D}_{\Gamma_{p,D}}(\Omega_p) := \left\{\varphi \in \left(\mathcal{D}(\Omega_p)\right) \colon \varphi|_{\overline{\Gamma_{p,D}}} = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

ergeben.

Nun wird (3.2.1a) mit $\boldsymbol{w} \in V_f$ multipliziert und über Ω_f integriert. Es ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_f} -\nabla \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_f} -2\nabla \cdot \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&\quad + \int_{\Omega_f} \nabla p(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&= \int_{\Omega_f} \mathbf{f}_f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

Die beiden Teilintegrale der linken Seite in (3.2.2) werden nun separat betrachtet. Für das Druckintegral gilt mit Anwendung der Produktregel und Theorem 1.1, dass

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_f} \nabla p(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (p\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&= \int_{\delta\Omega_f} (p\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}dA - \int_{\Omega_f} p(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&= \int_{\Gamma_I} (p\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}dA + \int_{\Gamma_{f,N}} (p\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}dA\\
&\quad - \int_{\Omega_f} p(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

da die Testfunktion $\boldsymbol{w}$ auf einer Umgebung von $\Gamma_{f,D}$ verschwindet. Für das Geschwindigkeitsintegral wird partielle Integration genutzt und weiterhin der Fakt, dass $\mathbb{D}(\boldsymbol{v})$ symmetrisch ist.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_f} -2\nabla\cdot\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= -\int_{\delta\Omega_f} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dA + \int_{\Omega_f} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &= -\int_{\Gamma_I} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dA - \int_{\Gamma_{f,N}} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dA\\ &\quad + \int_{\Omega_f} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Einsetzen von (3.2.3) und (3.2.4) in (3.2.2) ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_f} f_f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_f} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_{\Omega_f} p(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &\quad -\int_{\Gamma_I} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f - (p\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}_f dA\\ &\quad -\int_{\Gamma_{f,N}} 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f - (p\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}_f dA.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Außerdem gilt

$$2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = 2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\mathbb{D}(\boldsymbol{w})$$

und somit

$$2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) - p\nabla\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{S}(\boldsymbol{v},p):\mathbb{D}(\boldsymbol{w}). \tag{3.2.6}$$

(3.2.4) und (3.2.6) ergeben, dass die schwache Formulierung von (3.2.1a) die Form

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p),\mathbb{D}(\boldsymbol{w}))_0 - (\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w})_{0,\Gamma_{f,N}} - (\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w})_{0,\Gamma_I} = (f_f,\boldsymbol{w})_0 \tag{3.2.7}$$

hat. Für das Skalarprodukt auf Γ_I wird die Testfunktion $\boldsymbol{w}$ in Normalen- und Tangentialkomponenten zerlegt. Es gilt, dass

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)\boldsymbol{n}_f + \sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)\boldsymbol{\tau}_i$$

und

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w})_{0,\Gamma_I} = (\boldsymbol{n}_f\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} + \sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{\tau}_i\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I}. \tag{3.2.8}$$

Einsetzen der Kopplungsbedingungen (3.2.1i) und (3.2.1j) ergibt schließlich

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{w})_{0,\Gamma_I} = -(\varphi g,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I}. \tag{3.2.9}$$

Die Randbedingung (3.2.1e) wird anschließend in den Randterm eingesetzt und führt zu

$$(\mathbb{S}(\boldsymbol{v},p),\mathbb{D}(\boldsymbol{w}))_0 + (\varphi g,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I} = (f_f,\boldsymbol{w})_0 + (\boldsymbol{g}_f,\boldsymbol{w})_{0,\Gamma_{f,N}}. \tag{3.2.10}$$

Für (3.2.1b) ist das Überführen in die schwache Formulierung deutlich unkomplizierter. Mul-

tiplikation mit $q \in Q_f$ und Integration über Ω_f ergibt als schwache Formulierung

$$\int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, q)_0 = 0. \tag{3.2.11}$$

Zur Formulierung der schwachen Form von (3.2.1c) wird erneut Theorem 1.1 und die Produktregel genutzt. Somit ergibt sich für eine Testfunktion $\psi \in Q_p$ mit (3.2.1g)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_p} -\left(\nabla \cdot \frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_p} \frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_{p,N}} -\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0 \cdot \psi \cdot \boldsymbol{n}_p dA \\
&\quad + \int_{\Gamma_I} -\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0 \cdot \psi \cdot \boldsymbol{n}_p dA \\
&= \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0, \nabla\psi\right)_0 + \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0 \cdot \boldsymbol{n}_p, \psi\right)_{0,\Gamma_I} \\
&\quad + \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0 \cdot \boldsymbol{n}_p, \psi\right)_{0,\Gamma_{p,N}} \\
&= \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi_0, \nabla\psi\right)_0 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_p, \psi)_{0,\Gamma_I} - (\varphi_N, \psi)_{0,\Gamma_{p,N}}.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Um die Hilbertraumtheorie zur Lösung von Operatorsystemen anwenden zu können, ist es vonnöten, als Ansatz- und Testraum einen Hilbertraum zu nutzen. Daher werden von den Räumen $\mathcal{D}_{\Gamma_{f,D}}(\Omega_f)$, $C^\infty(\Omega_f)$ und $\mathcal{D}_{\Gamma_{p,D}}(\Omega_p)$ bezüglich der H^1- beziehungsweise der L^2-Norm die Abschlüsse gebildet. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
V_f &= \left(\overline{\mathcal{D}_{\Gamma_{f,D}}(\Omega_f)}^{H^1(\Omega_f)}\right)^d =: H^1_{\Gamma_{f,D}}(\Omega_f)^d \\
Q_f &= \overline{C^\infty(\Omega_f)}^{L^2(\Omega_f)} = L^2(\Omega_f) \\
Q_p &= \overline{\mathcal{D}_{\Gamma_{p,D}}(\Omega_p)}^{H^1(\Omega_f)} =: H^1_{\Gamma_{p,D}}(\Omega_p).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als schwache Formulierung des gekoppelten Stokes-Darcy Systems

Problem 3.6: Schwache Stokes-Darcy Gleichungen

Finde zu $f_f \in L^2(\Omega_f), \boldsymbol{f}_p \in L^2(\Omega_p)$ Funktionen $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$, so dass für alle $(\boldsymbol{w}, q, \psi) \in V_f \times Q_f \times Q_p$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p), \mathbb{D}(\boldsymbol{w}))_{0,\Omega_f} + (\varphi g, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
+ \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I} = (\boldsymbol{f}_f, \boldsymbol{w})_{0,\Omega_f} + (\boldsymbol{g}_f, \boldsymbol{w})_{0,\Gamma_{f,N}} \\
(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, q)_{0,\Omega_f} = 0 \\
\left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi, \nabla\psi\right)_{0,\Omega_p} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_p, \psi)_{0,\Gamma_I} = (f_p, \psi)_{0,\Omega_p} + (\varphi_N, \psi)_{0,\Gamma_{p,N}}
\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_D$ auf $\Gamma_{f,D}$ und $\varphi = \varphi_D$ auf $\Gamma_{p,D}$.

oder mit den Definitionen der Bilinearformen

$$\begin{aligned}
a_f\colon\quad & V_f \times V_f \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}), \mathbb{D}(\boldsymbol{w}))_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I} \\
b_f\colon\quad & V_f \times Q_f \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{w}, p) \mapsto -(\nabla\cdot\boldsymbol{w}, p)_{0,\Omega_f} \\
a_p\colon & Q_p \times Q_p \to \mathbb{R} \\
& (\varphi, \psi) \mapsto \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi, \nabla\psi\right)_{0,\Omega_p}
\end{aligned}$$

und Linearformen

$$\begin{aligned}
f_f\colon\ & V_f \to \mathbb{R} \\
& \boldsymbol{w} \mapsto (\mathbf{f}_f, \boldsymbol{w})_{0,\Omega_f} + (\mathbf{g}_f, \boldsymbol{w})_{0,\Gamma_{f,N}} \\
f_p\colon & Q_p \to \mathbb{R} \\
& \psi \mapsto \left(f_p, \psi\right)_{0,\Omega_p} + (\varphi_N, \psi)_{0,\Gamma_{p,N}}
\end{aligned}$$

als Operatorsystem

Problem 3.7: Neumann-Neumann Kopplung

Finde zu $f_f \in V_f'$,$f_p \in Q_p'$ Funktionen $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ so, dass für alle $\boldsymbol{w}, q, \psi \in V_f, Q_f, Q_p$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b_f(\boldsymbol{w}, p) + (\varphi g, \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{n}_f)_{0,\Gamma_I} &= [f_f, \boldsymbol{w}]_{V_f', V_f} \\
b_f(\boldsymbol{v}, q) &= 0 \\
a_p(\varphi, \psi) - \left(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}_p, \psi\right)_{0,\Gamma_I} &= \left[f_p, \psi\right]_{Q_p', Q_p},
\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_D$ auf $\Gamma_{f,D}$ und $\varphi = \varphi_D$ auf $\Gamma_{p,D}$.

Diese Form wird als Neumann-Neumann Kopplung bezeichnet, da die Kopplungsbedingungen (3.2.1h) und (3.2.1i) als Neumann-Bedingungen in das System integriert werden.
Um die Lösbarkeitstheorie aus Anhang A anwenden zu können, ist es nötig, das Problem 3.7 in ein Operatorproblem zu überführen. Hierfür werden die Operatoren

$$\begin{aligned}
A\colon & \left(V_f \times Q_p\right) \times \left(V_f \times Q_p\right) \to \mathbb{R} \\
& ((\boldsymbol{v}, \varphi), (\boldsymbol{w}, \psi)) \mapsto a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + a_p(\varphi, \psi) - (\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}_p, \psi)_{0,\Gamma_I} + (\varphi, \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
B\colon & \left(V_f \times Q_p\right) \times Q_f \to \mathbb{R} \\
& ((\boldsymbol{v}, \varphi), q) \mapsto b_f(\boldsymbol{v}, q) \\
F\colon & V_f \times Q_p \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{v}, \varphi) \mapsto [f_f, \boldsymbol{w}]_{V_f', V_f} + \left[f_p, \psi\right]_{Q_p', Q_p} - A\Big(\Big(E_{\Gamma_{f,D}}\boldsymbol{v}_D, E_{\Gamma_{p,D}}\varphi_D\Big), (\boldsymbol{v}, \varphi)\Big)
\end{aligned}$$

definiert, wobei $E_{\Gamma_{f,D}}$ und $E_{\Gamma_{p,D}}$ die Erweiterungen der Randbedingungen $\boldsymbol{v}_D$ und φ_D sind. Somit kann Problem 3.7 zu dem Sattelpunktproblem

Problem 3.8: Neumann-Neumann Kopplung Operator Version

Finde zu $F\colon V_f \times Q_p \to \mathbb{R}$ Funktionen $(\boldsymbol{v}_0, p, \varphi_0) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ so, dass für alle $(\boldsymbol{w}, q, \psi) \in V_f \times Q_f \times Q_p$ gilt, dass

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{v}_0, \varphi_0), (\boldsymbol{w}, \psi)) + B((\boldsymbol{w}, \psi), p) &= F((\boldsymbol{w}, \psi)) \\ B((\boldsymbol{v}_0, \varphi_0), q) &= 0 \end{aligned}$$

umgeschrieben werden.
Die Lösung von Problem 3.7 ergibt sich dann durch $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + E_{\Gamma_{f,D}} \boldsymbol{v}_D$ und $\varphi = \varphi_0 + E_{\Gamma_{p,D}} \varphi_D$.
Als Hilfsmittel zum Beweis der Wohldefiniertheit von Problem 3.8 werden die folgenden Theoreme benötigt.

Theorem 3.1

Für $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d$ gilt, dass

$$\|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{d} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Siehe [13, Lemma 3.34]. □

Theorem 3.2: Korn Ungleichung

Für alle $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d$ gilt, dass

$$\|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 \leqslant C(\|\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\|_0 + \|\boldsymbol{v}\|_0),$$

wobei C unabhängig von $\boldsymbol{v}$ ist.

Anmerkung
Mit dieser Ungleichung ist es möglich, eine Ungleichung ähnlich der Poincaré Ungleichung auf $H^1_\Gamma(\Omega)^d$ zu definieren. Es gilt für eine Konstante $c > 0$, dass für alle $\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega)^d$

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 \leqslant c \|\mathbb{D}(\boldsymbol{v})\|_0.$$

Theorem 3.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Dann existiert für jedes $p \in L^2_0(\Omega)$ ein $\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)$ mit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = p$$

und

$$\|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \leqslant C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Siehe [21, Theorem 4.5.2]. □

Theorem 3.4: Wohldefiniertheit der Neumann-Neumann Kopplung

Das Operatorproblem 3.8 besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Als Beweis werden die Voraussetzungen für Brezzis Splitting Theorem (Theorem A.5) gezeigt.

Im ersten Schritt wird die Stetigkeit von A und B gezeigt. Für a_f gilt mit Theorem A.1:

$$\begin{aligned}
|a_f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| &= \left|(2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{w}),\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I}\right| \\
&\leqslant \left|(2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{w}),\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))_{0,\Omega_f}\right| + \left|\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I}\right| \\
&\leqslant 2\nu\left(\frac{\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega_f}+\|\nabla\boldsymbol{w}^T\|_{0,\Omega_f}}{2}\cdot\frac{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega_f}+\|\nabla\boldsymbol{v}^T\|_{0,\Omega_f}}{2}\right) \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}(d-1)\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Gamma_I}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Gamma_I} \\
&\leqslant 2\nu\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega_f}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha}(d-1)c_f^2\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega_f}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega_f} \\
&\leqslant 2\nu\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)} + \frac{1}{\alpha}(d-1)c_f^2\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)} \\
&= \left(2\nu+\frac{1}{\alpha}(d-1)c_f^2\right)\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)} \\
&= c_{a_f}\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)},
\end{aligned}$$

und für a_p gilt:

$$\begin{aligned}
|a_p(\varphi,\psi)| &= \left|\left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi,\nabla\psi\right)_{0,\Omega_p}\right| \\
&= \frac{k}{\mu}\left|(\nabla\varphi,\nabla\psi)_{0,\Omega_p}\right| \\
&\leqslant \frac{k}{\mu}\|\nabla\varphi\|_{0,\Omega_p}\|\nabla\psi\|_{0,\Omega_p} \\
&\leqslant c_{a_p}\|\varphi\|_{H^1(\Omega_f)}\|\psi\|_{H^1(\Omega_f)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für A mit $c_A := \max\left\{c_{a_f}, c_{a_p}c_fc_p\right\}$, dass

$$\begin{aligned}
A((\boldsymbol{v},\varphi),(\boldsymbol{w},\psi)) &= a_f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + a_p(\varphi,psi) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_p,\psi)_{0,\Gamma_I} + (\varphi,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
&\leqslant c_{a_f}\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)} + c_{a_p}\|\varphi\|_{H^1(\Omega_f)}\|\psi\|_{H^1(\Omega_f)} \\
&\quad +c_fc_p\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\psi\|_{H^1(\Omega_f)} + c_fc_p\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega_f)} \\
&\leqslant c_A\left(\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)}+\|\varphi\|_{H^1(\Omega_f)}\right)\left(\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega_f)}+\|\psi\|_{H^1(\Omega_f)}\right) \\
&\leqslant 2c_A\left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{H^1(\Omega_f)}+\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega_f)}\right)^{1/2}\left(\|\boldsymbol{w}\|^2_{H^1(\Omega_f)}+\|\psi\|^2_{H^1(\Omega_f)}\right)^{1/2} \\
&= 2c_A\|(\boldsymbol{v},\varphi)\|_{H^1(\Omega_f)\times H^1(\Omega_f)}\|(\boldsymbol{w},\psi)\|_{H^1(\Omega_f)\times H^1(\Omega_f)}.
\end{aligned}$$

Für B folgt die Stetigkeit durch Anwendung von Theorem 3.1, so dass

$$|B(\boldsymbol{v},p)| = |b(\boldsymbol{v},p)| = |(\nabla\cdot\boldsymbol{v},p)| \leqslant \|\nabla\cdot\boldsymbol{v}\|_0\|p\|_{0,Q_f} \leqslant \sqrt{d}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0\|p\|_{0,\Omega_f} \leqslant \sqrt{d}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)}\|p\|_{0,\Omega_f}.$$

Um die Koerzitivität von A zu zeigen muss die Koerzitivität von a_f und a_p gezeigt werden.

Für a_f wird Theorem 3.2 mit der anschließenden Anmerkung verwendet und somit gilt

$$\begin{aligned} a_f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= (2\nu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}),\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I} \\ &\geqslant \frac{2\nu}{c}\|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{d-1}\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}_i\|^2_{0,\Gamma_I} \\ &\geqslant \alpha_f\|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega_f}. \end{aligned}$$

Für a_p folgt mit $\alpha_A := \min\{\alpha_f,\alpha_p\}$ die Koerzitivität direkt aus der Definition, da

$$a_p(\varphi,\varphi) = \left(\frac{k}{\mu}\nabla\varphi,\nabla\varphi\right)_{0,\Omega_p} = \frac{k}{\mu}\|\nabla\varphi\|^2_{0,\Omega_p} = \alpha_p|\varphi|^2_{1,\Omega_p}.$$

Mit der Koerzitivität von a_f und a_p folgt direkt die Koerzitivität von A, da

$$A((\boldsymbol{v},\varphi),(\boldsymbol{v},\varphi)) = a_f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + a_p(\varphi,\varphi) \geqslant \alpha_f\|\boldsymbol{v}\|^2_{V_f} + \alpha_p\|\varphi\|^2_{Q_p} \geqslant \alpha_A\|(\boldsymbol{v},\varphi)\|^2_{V_f\times Q_p},$$

da sich die Randterme gegenseitig aufheben.

Der Beweis für die inf-sup Bedingung von B wird nach [17, Proposition 5.3.2] und [21, Abschnitt 5.3.2.2] geführt.

Im Fall $\Gamma_{f,D} = \delta\Omega_f$ kann ein gegebenes $q \in L^2(\Omega_f)$ zerlegt werden in einen konstanten Teil

$$\overline{q} := \frac{1}{|\Omega_f|}\int_{\Omega_f} q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

und den Rest

$$\tilde{q} := q - \overline{q} \in L^2_0(\Omega_f).$$

Nach Theorem 3.3 existiert nun ein $\boldsymbol{v}_0 \in H^1_0(\Omega_f)$ mit $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = \tilde{q}$ und $\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)} \leqslant C_b\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega_f)}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega_f)}\frac{b(\boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega_f)}} &\geqslant \frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0,q)_{0,\Omega_f}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} \\ &= \frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0,\tilde{q})_{0,\Omega_f}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} + \frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0,\overline{q})_{0,\Omega_f}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} \\ &= \frac{\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega_f)}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} + \frac{(\tilde{q},\overline{q})_{0,\Omega_f}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} \\ &= \frac{\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega_f)}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} \\ &\geqslant \frac{1}{C_b}\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega_f)}, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

da $(\tilde{q},\overline{q})_{0,\Omega_f} = \overline{q}\int_{\Omega_f}\tilde{q}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$.

Wäre $\Gamma_{f,D} = \delta\Omega_f$, so könnte $L^2(\Omega_f)$ durch $L^2_0(\Omega_f)$ ersetzt werden und die Abschätzung (3.2.13) würde bereits die inf-sup Bedingung beweisen. Für $q \in L^2(\Omega_f)$ gilt jedoch lediglich $\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega_f)} = \|q\|_{L^2(\Omega_f)/\ker B^*}$ und der Beweis ist noch nicht abgeschlossen. In diesem Fall wird, wie in Abbildung 6 dargestellt, eine größeres Lipschitz-Gebiet Ω'_f betrachtet, das so gewählt wird, dass $\delta\Omega_f \cap \delta\Omega'_f = \Gamma_{f,D}$.

Auf Ω'_f wird q' als Fortsetzung von q mit 0 fortgesetzt und die obige Argumentation genutzt.

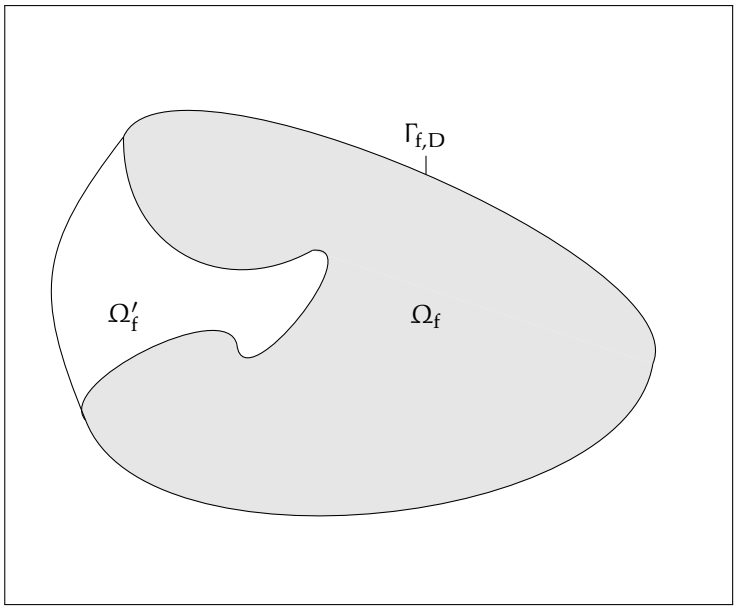

Abbildung 6: Erweiterung von Ω_f im Fall $\Gamma_{f,D} \neq \delta\Omega_f$

Somit ergibt sich mit $\Omega_f \subset \Omega_f'$ und der Dreiecks-Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0, q')_{0,\Omega_f'}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f')}} &\geqslant \frac{1}{C_b'} \|q' - \overline{q'}\|_{L^2(\Omega_f')} \\ &\geqslant \frac{1}{C_b'} \|q - \overline{q'}\|_{L^2(\Omega_f)} \\ &\geqslant \frac{1}{C_b'} \left| \|q\|_{L^2(\Omega_f)} - \|\overline{q'}\|_{L^2(\Omega_f)} \right|. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Mit der Hölder-Ungleichung kann schließlich eine Abschätzung für die Norm von $\overline{q'}$ erzielt werden. Es gilt

$$\|\overline{q'}\|^2_{L^2(\Omega_f)} = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega_f'|^2} \left(\int_{\Omega_f'} q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right)^2 = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega_f'|^2} \left(\int_{\Omega_f} q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right)^2 \leqslant \frac{|\Omega_f|^2}{|\Omega_f'|^2} \|q\|^2_{L^2(\Omega_f)}. \tag{3.2.15}$$

Einsetzen von (3.2.15) in (3.2.14) ergibt schließlich

$$\frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0, q)_{0,\Omega_f}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}} \geqslant \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0, q')_{0,\Omega_f'}}{\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f')}} \geqslant \frac{1}{C_b'} \left(1 - \frac{|\Omega_f|}{|\Omega_f'|} \right) \|q\|_{L^2(\Omega_f)},$$

da $\|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f')} \geqslant \|\boldsymbol{v}_0\|_{H^1(\Omega_f)}$.

Für das Infimum gilt mit den vorigen Überlegungen

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \sup_{v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_{H^1(\Omega_f)} \|q\|_{L^2(\Omega_f)}} \geqslant \frac{1}{C_b'} \left(1 - \frac{|\Omega_f|}{|\Omega_f'|} \right) =: \beta.$$

Da die Voraussetzungen von Theorem A.5 gezeigt wurden, folgt die Wohldefiniertheit von Problem 3.8. □

3.2.2 Schwache Formulierung der Stokes-Darcy Kopplung (Robin-Robin)

Eine andere Möglichkeit ist, die beiden Kopplungsbedingungen als Robin-Bedingungen zu integrieren. Hierfür werden Gewichtungsparameter $\gamma_f > 0$ und $\gamma_p > 0$ genutzt und die Bedingungen

$$\gamma_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f + \boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f = -\gamma_f \frac{k}{\mu} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}_f - \varphi g \tag{3.2.16a}$$

$$\gamma_p \frac{k}{\mu} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}_f - \varphi g = -\gamma_p \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f + \boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f. \tag{3.2.16b}$$

Einsetzen von (3.2.16a) und (3.2.16b) in (3.2.8) und (3.2.12) ergibt

Problem 3.9: Robin-Robin Kopplung

Finde zu $f_f \in V_f', f_p \in Q_p'$ Funktionen $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ so, dass für alle $\boldsymbol{w}, q, \psi \in V_f, Q_f, Q_p$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b_f(\boldsymbol{w}, p) + (\gamma_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
+ (\varphi g, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} + \left(\gamma_f \frac{k}{\mu} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}_f, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f\right)_{0,\Gamma_I} &= [f_f, \boldsymbol{w}]_{V_f', V_f} \\
b_f(\boldsymbol{v}, q) &= 0 \\
a_p(\varphi, \psi) + \left(\frac{1}{\gamma_p} g \varphi, \psi\right)_{0,\Gamma_I} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi)_{0,\Gamma_I} \\
+ \left(\frac{1}{\gamma_p} \boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi\right)_{0,\Gamma_I} &= [f_p, \psi]_{Q_p', Q_p}
\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_D$ auf $\Gamma_{f,D}$ und $\varphi = \varphi_D$ auf $\Gamma_{p,D}$,

beziehungsweise mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned}
a_f^R \colon \quad & V_f \times V_f \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (2\nu \mathbb{D}(\boldsymbol{v}), \mathbb{D}(\boldsymbol{w}))_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{d-1} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)_{0,\Gamma_I} + (\gamma_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
& \qquad = a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + (\gamma_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\
a_p^R \colon & Q_p \times Q_p \to \mathbb{R} \\
& (\varphi, \psi) \mapsto \left(\frac{k}{\mu} \nabla \varphi, \nabla \psi\right)_{0,\Omega_p} + \left(\frac{1}{\gamma_p} g \varphi, \psi\right)_{0,\Gamma_I} \\
& \qquad = a_p(\varphi, \psi) + \left(\frac{1}{\gamma_p} g \varphi, \psi\right)_{0,\Gamma_I}
\end{aligned}$$

als

Problem 3.10: Robin-Robin Kopplung

Finde zu $f_f \in V_f', f_p \in Q_p'$ Funktionen $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in\in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ so, dass für alle $\boldsymbol{w}, q, \psi \in V_f, Q_f, Q_p$ gilt:

$$\begin{aligned} a_f^R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b_f(\boldsymbol{w}, p) + (\varphi g, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} \\ + \left(\gamma_f \frac{k}{\mu} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}_f, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f\right)_{0,\Gamma_I} &= [f_f, \boldsymbol{w}]_{V_f', V_f} \\ b_f(\boldsymbol{v}, q) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_p^R(\varphi, \psi) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi)_{0,\Gamma_I} \\ + \left(\frac{1}{\gamma_p} \boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi\right)_{0,\Gamma_I} &= [f_p, \psi]_{Q_p', Q_p}. \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_D$ auf $\Gamma_{f,D}$ und $\varphi = \varphi_D$ auf $\Gamma_{p,D}$.

Hierbei ist wichtig, dass im Allgemeinen die Robin-Daten $\varphi + \gamma_f \frac{k}{\mu} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}_f$ und $-\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{n}_f + \gamma_p^{-1} \boldsymbol{n}_f \cdot \mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0, p) \cdot \boldsymbol{n}_f$ aus $L^2(\Gamma_I)$ sein müssen, so dass die Formulierungen sinnvoll sind, was sie im Allgemeinen jedoch nicht sind. Um dies zu garantieren, benötigt man zuerst die Definition der Spurräume Λ_i.

Definition 3.1 (Spurräume)
Durch die Restriktion der Testräume V_f, Q_f und Q_p mithilfe der in Theorem A.1 eingeführten Spuroperatoren lassen sich die Spurräume

$$\begin{aligned} \Lambda_f &:= T_f(V_f, Q_f) \\ \Lambda_p &:= T_p(Q_p) \end{aligned}$$

definieren.

Λ_p ist ein Unterraum von $H^{1/2}(\Gamma_I)$, der $H_{00}^{1/2}(\Gamma_I)$ enthält. Λ_f ist dagegen ein Unterraum des $L^2(\Gamma_I)$ und lediglich in $H^{1/2}(\Gamma_I)$, wenn Γ_I stetig ist. In diesem Fall enthalten sowohl Λ_f und Λ_p den Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma_I)$, müssen aber nicht zwangsläufig identisch sein. Die meisten Anwendungen sind so modelliert, dass die Ränder Lipschitz-stetig sind, beispielsweise stückweise linear. In diesem Fall gilt im Allgemeinen nicht, dass

$$\overline{\Gamma_{f,D}} \cap \overline{\Gamma_I} = \overline{\Gamma_{p,D}} \cap \overline{\Gamma_I}$$

und somit ist im Allgemeinen $\Lambda_f \neq \Lambda_p$. Nun werden die Operatoren

$$\begin{aligned} P_i \colon \Lambda_j &\to \Lambda_i, i \neq j \\ \xi &\mapsto \begin{cases} \xi, & \text{wenn } \xi \in \Lambda_j \cap \Lambda_i \\ 0, & \text{wenn } \xi \in \Lambda_j \setminus \Lambda_i \end{cases} \end{aligned}$$

definiert, die es ermöglichen, eine schwache Formulierung unabhängig von der Bedingung

$\Lambda_f = \Lambda_p$ zu definieren. Hierfür werden die (Bi)-Linearformen

$$\begin{aligned}
a_f^R\colon \quad & V_f \times V_f \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \big(\gamma_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, P_p(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)\big)_{0,\Gamma_I} \\
a_p^R\colon \quad & Q_p \times Q_p \to \mathbb{R} \\
& (\varphi, \psi) \mapsto a_p(\varphi, \psi) + \left(\frac{1}{\gamma_p} g\varphi, P_f(\psi)\right)_{0,\Gamma_I} \\
c_f\colon \quad & Q_p \times V_f \to \mathbb{R} \\
& (\varphi, \boldsymbol{v}) \mapsto (\varphi g, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f)_{0,\Gamma_I} - \gamma_f a_p\Big(\varphi, \psi_{P_p(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})}\Big) \\
c_p\colon V_f \times Q_f \times Q_p \to \mathbb{R} & \\
& ((\boldsymbol{v}, p), \psi) \mapsto -(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi)_{0,\Gamma_I} + \frac{1}{\gamma_p} a_f\Big(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_{P_f(\psi)}\Big) + \frac{1}{\gamma_p} b_f\Big(\boldsymbol{w}_{P_f(\psi)}, p\Big) \\
f_{f,p}\colon \quad & V_f \to \mathbb{R} \\
& \boldsymbol{v} \mapsto -\gamma_f \Big[f_p, \psi_{P_p(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_f)}\Big]_{Q_p', Q_p} \\
f_{p,f}\colon \quad & Q_p \to \mathbb{R} \\
& \psi \mapsto \frac{1}{\gamma_p} \Big[f_f, \boldsymbol{v}_{P_f(\psi)}\Big]_{V_f', V_f}
\end{aligned}$$

definiert und mit ihnen das Problem

Problem 3.11: Robin-Robin Kopplung

Finde zu $f_f \in V_f'$, $f_p \in Q_p'$ Funktionen $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ so, dass für alle $\boldsymbol{w}, q, \psi \in V_f, Q_f, Q_p$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_f^R(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b_f(\boldsymbol{w}, p) + c_f(\varphi, \boldsymbol{w}) &= [f_f, \boldsymbol{w}]_{V_f', V_f} + \Big[f_{f,p}, \boldsymbol{w}\Big]_{V_f', V_f} \\
b_f(\boldsymbol{v}, q) &= 0 \\
a_p^R(\varphi, \psi) + c_p((\boldsymbol{v}, p), \psi) &= \big[f_p, \psi\big]_{Q_p', Q_p} + \Big[f_{p,f}, \psi\Big]_{Q_p', Q_p},
\end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_D$ auf $\Gamma_{f,D}$ und $\varphi = \varphi_D$ auf $\Gamma_{p,D}$.

Theorem 3.5

Sei $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ eine Lösung von Problem 3.7. Dann ist $(\boldsymbol{v}, p, \varphi)$ auch eine Lösung von Problem 3.11. Die Umkehrung gilt ebenso.

Beweis. Sei $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ eine gegebene Lösung von Problem 3.7. Wenn der Term $P_f(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f)$ verschwindet, sind die ersten Gleichungen in beiden Problemen identisch. Es ist also nur der Fall $P_f(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f) \neq 0$ zu betrachten. Analog gilt für die dritten Gleichungen, dass sie in beiden Problemen identisch sind, falls $P_f(\psi) = 0$ gilt.
Sei nun angenommen, dass $P_f(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_f) \neq 0$. Bezeichne in diesem Fall $\psi_{\boldsymbol{v}} = \psi_{P_p(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_f)}$ die Erweiterung von $\boldsymbol{v}$ auf Q_p. Nun werden die zusätzlichen Terme in der ersten Gleichung betrachtet. Es ergibt sich die Gleichung

$$\gamma_f(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi_{\boldsymbol{v}})_{0,\Gamma_I} - \gamma_f a_p(\varphi, \psi_{\boldsymbol{v}}) = -\gamma_f \big[f_p, \psi_{\boldsymbol{v}}\big]_{Q_p', Q_p},$$

die die dritte Gleichung des Neumann-Neumann Problems für die Testfunktion $\psi = \psi_{\boldsymbol{v}}$ ist.

Nun sei angenommen, dass $P_f(\psi) \neq 0$ gilt. Analog zum vorigen Fall bezeichnet nun $\boldsymbol{w}_\psi = \boldsymbol{w}_{P_f(\psi)}$ die Erweiterung von ψ auf V_f. Die Betrachtung der zusätzlichen Terme ergibt in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{1}{\gamma_p}(\varphi, \psi)_{0,\Gamma_I} + \frac{1}{\gamma_p} a_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_\psi) + \frac{1}{\gamma_p} b_f(\boldsymbol{w}_\psi, p) = \frac{1}{\gamma_p}[f_f, \boldsymbol{w}_\psi]_{V_f', V_f}.$$

Dies ist analog zum ersten Fall die erste Gleichung des Neumann-Neumann Problems und somit ist eine Lösung des Neumann-Neumann Problems 3.7 auch eine Lösung des Robin-Robin Problems 3.11.
Sei $(\boldsymbol{v}, p, \varphi) \in H^1(\Omega_f)^d \times L^2(\Omega_f) \times H^1(\Omega_p)$ eine gegebene Lösung von Problem 3.11.
Es werden lediglich die erste und dritte Gleichung mit den Testfunktionen $\psi_{\boldsymbol{w}} \in Q_p$ und $\boldsymbol{w}_\psi \in V_f$ betrachtet, da die zweite Gleichung offensichtlich schon identisch ist für beide Probleme. Nun wird γ_f mal die dritte Gleichung zur ersten Gleichung addiert und $-\frac{1}{\gamma_p}$ mal die erste Gleichung zur dritten Gleichung. Es ergibt sich das System

$$\begin{aligned} a_f\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}\right) + b_f\left(\boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}, p\right) + \left(\varphi, \left(\boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}\right)\right)_{0,\Gamma_I} &= \left[f_f, \boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}\right]_{V_f', V_f} \\ a_p\left(\varphi, \psi + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\psi_{\boldsymbol{w}_\psi}\right) - \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_f, \psi + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\psi_{\boldsymbol{w}_\psi}\right)_{0,\Gamma_I} &= \left[f_p, \psi + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\psi_{\boldsymbol{w}_\psi}\right]_{Q_p', Q_p}, \end{aligned}$$

das der ersten und dritten Gleichung in Problem 3.7 mit den Testfunktionen $\boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}$ und $\psi + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\psi_{\boldsymbol{w}_\psi}$ entspricht. Da jede Funktion $\tilde{\boldsymbol{w}} \in V_f$ in der Form $\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\boldsymbol{w}_{\psi_{\boldsymbol{w}}}$, mit $\boldsymbol{w} \in V_f$, geschrieben werden kann und jede Funktion $\tilde{\psi} \in Q_p$ in der Form $\tilde{\psi} = \psi + \frac{\gamma_f}{\gamma_p}\psi_{\boldsymbol{w}_\psi}$, mit $\psi \in Q_p$, geschrieben werden kann, ist die Lösung des Problems 3.11 ebenso eine Lösung des Problems 3.7. □

Das vorherige Theorem ergibt auch die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Robin-Robin Formulierung, da diese aus der eindeutigen Lösbarkeit der schwachen Neumann-Neumann Formulierung folgt, die in Theorem 3.4 gezeigt wurde.

3.2.3 Schwache Formulierung der Brinkman Gleichungen (Stokes Fall)

Die Grundlage bilden in diesem Abschnitt die, aus Abschnitt 2.4 bekannten, Brinkman Gleichungen mit dem Fall $\Gamma_D = \delta\Omega$ und $\Gamma_N = \emptyset$:

Problem 3.12: Brinkman Gleichungen

$$\sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) - \mu_{\text{eff}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega \tag{3.2.17a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.2.17b}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D \quad \text{auf } \Gamma_D. \tag{3.2.17c}$$

In der, in [3] Stokes Fall genannten, Situation $\mu_{\text{eff}} > 0$ können die Brinkman Gleichungen analog zu den Stokes Gleichungen mit einem weiteren Geschwindigkeitsterm nullter Ordnung behandelt werden. Außerdem ergibt die wesentliche Randbedingung (3.2.17c) eine Einschränkung an die Lösung. Analog zu Abschnitt 3.2.1 wird als Test- und Ansatzraum $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)^d$ gewählt und das Problem für die Variable $\mathbf{u}_0 := \mathbf{u} - \mathbf{u}_D$ gelöst.

Für die Testfunktionen $v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$ ergeben sich für (3.2.17a) die Umformungen

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= -\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\delta\Omega} p(\mathbf{x})(\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) dA \\
&= -\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} p(\mathbf{x})(\boldsymbol{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) dA \\
\int_\Omega (\mu_{\text{eff}} \Delta \mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= -\int_\Omega \mu_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\delta\Omega} \mu_{\text{eff}} (\nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) dA \\
&= -\int_\Omega \mu_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) : \nabla \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mu_{\text{eff}} (\nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{x}) dA,
\end{aligned}$$

wobei die Randintegrale durch die Wahl von V auf Integrale über Γ_N reduziert werden. Eine weitere Einschränkung des Ansatz- und Testraums ergibt sich, da der Druck in den Brinkman Gleichungen nur als Gradient betrachtet wird. Somit ist er in der Lösung nur bis auf eine Konstante eindeutig. Eine Eindeutigkeit des Drucks wird erreicht, indem gefordert wird, dass

$$\int_\Omega p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \tag{3.2.18}$$

Die Bedingung (3.2.18) führt dazu, dass als Ansatz- und Testraum für den Druck $L_0^2(\Omega)$ gewählt wird.
Analog zu der Stokes Gleichung (3.2.11) wird (3.2.17b) zu

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_0, p)_0 = 0.$$

Somit ergibt sich im Fall $\mu_{\text{eff}} > 0$ mit

$$\begin{aligned}
V &= H_0^1(\Omega)^d \\
Q &= L_0^2(\Omega)
\end{aligned}$$

als schwache Formulierung der Brinkman Gleichungen

Problem 3.13: Schwache Brinkman Gleichungen

Finde zu $f \in L^2(\Omega)$ Funktionen $(\mathbf{u}_0, p) \in V, Q$ so, dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V, Q$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_{\text{eff}}(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \boldsymbol{v}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, p) + \sigma(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{v}) &= (\mathbf{f}, \boldsymbol{v}) \\
(\nabla \cdot \mathbf{u}_0, q) &= 0.
\end{aligned}$$

Mit der Definition der Bilinearformen

$$\begin{aligned}
a\colon\ & V \times V \to \mathbb{R} \\
& (\mathbf{u}_0, \boldsymbol{v}) \mapsto \mu_{\text{eff}}(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \boldsymbol{v}) + \sigma(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{v}) \\
b\colon\ & V \times Q \to \mathbb{R} \\
& (\boldsymbol{v}, p) \mapsto -(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, p)
\end{aligned}$$

und der Linearform

$$\begin{aligned}
f\colon V &\to \mathbb{R} \\
v &\mapsto (\mathbf{f}, v)
\end{aligned}$$

ergibt sich das Operatorproblem

Problem 3.14: Brinkman Gleichung für $\mu_{\text{eff}} > 0$

Finde zu $f \in V'$ Funktionen $(\mathbf{u}_0, p) \in V, Q$ so, dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V, Q$ gilt:

$$a(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = [f, \boldsymbol{v}]_{V',V}$$
$$b(\mathbf{u}_0, q) = 0.$$

Theorem 3.6

Für den Unterraum $\tilde{V}_0^{\perp} \subset H_0^1(\Omega)$, definiert durch

$$\tilde{V}_0(\Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega) \colon (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, q) = 0 \forall q \in L_0^2(\Omega)\right\}$$
$$\tilde{V}_0^{\perp}(\Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in \tilde{V}_0(\Omega) \colon (\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{w}) = 0 \forall \boldsymbol{w} \in \tilde{V}_0(\Omega)\right\}$$

ist der Divergenzoperator

$$\nabla \cdot (\cdot) \colon \tilde{V}_0^{\perp}(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$$

ein Isomorphismus.

Theorem 3.7: Wohldefiniertheit im Stokes Fall

Das Operatorproblem 3.14 besitzt für alle $\mu_{\text{eff}} > 0$ eine eindeutige Lösung.

Beweis. Der Beweis zeigt die Voraussetzungen von Theorem A.5, mit dem die Aussage folgt. Zuerst wird die Stetigkeit der Operatoren a und b gezeigt. Für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \boldsymbol{v})| &\leqslant \max\{\mu_{\text{eff}}, \sigma\}(\|\nabla \mathbf{u}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 + \|\mathbf{u}\|_0 \|\boldsymbol{v}\|_0) \\ &\leqslant \max\{\mu_{\text{eff}}, \sigma\} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für alle $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ gilt, dass

$$|b(\mathbf{u}, p)| \leqslant \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_0 \|p\|_0 \leqslant \sqrt{2} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 \|p\|_0 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|p\|_0.$$

Somit sind sowohl a, als auch b stetige Operatoren.
Weiterhin wird die Koerzivität von a gezeigt. Da $\sigma > 0$ und $\mu_{\text{eff}} > 0$, gilt auch $m := \min\{\sigma, \mu_{\text{eff}}\} > 0$ und somit für alle $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)$

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \mu_{\text{eff}} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0^2 + \sigma \|\boldsymbol{v}\|_0^2 \geqslant \min\{\sigma, \mu_{\text{eff}}\} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Somit ist a auf ganz $H^1(\Omega)$ und somit auf $H_0^1(\Omega)$ koerziv für $\sigma > 0$.
Im zweiten Schritt wird die inf-sup Bedingung für b gezeigt. Zentrale Bedeutung hat hierbei Theorem 3.6. Da gilt, dass $V_0^{\perp} \subset H_0^1(\Omega)$, findet sich nach Theorem 3.6 zu jedem $q \in L_0^2(\Omega)$ ein eindeutiges $\tilde{\boldsymbol{v}} \in H_0^1(\Omega)$ mit $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} = q$ und $\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|q\|_0$, wobei die Konstante C unabhängig von $\tilde{\boldsymbol{v}}$ und q ist. Es gilt also für das Supremum, dass

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}} \geqslant \frac{(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}, q)}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{(q, q)}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\|q\|_0^2}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_{H^1(\Omega)}} \geqslant \frac{1}{C} \frac{\|q\|_0^2}{\|q\|_0} = \frac{1}{C} \|q\|_0.$$

Da diese Abschätzung für ein beliebiges $q \in L_0^2(\Omega)$ gilt und C unabhängig von q ist, gilt für

das Infimum, dass

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)\setminus\{0\}} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geqslant \frac{1}{C} =: \beta.$$

Somit erfüllt die Bilinearform b die inf-sup Bedingung und die Voraussetzungen von Theorem A.5 sind erfüllt. □

3.2.4 Schwache Formulierung der Brinkman Gleichungen (Darcy Fall)

Im Fall $\mu_{\text{eff}} = 0$ vereinfacht sich (3.2.17a), da der Diffusionsterm wegfällt. Es bleibt die Umformung

$$\int_\Omega \nabla p(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) p(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_{\delta\Omega} p(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}) dA. \tag{3.2.19}$$

Als Ansatz- und Testraum wird der $V = H_0^{\text{div}}(\Omega)$ (siehe Definition A.5) gewählt, der (2.4.4b) als wesentliche Randbedingung nutzt. Somit fällt in (3.2.19) der Randterm weg. Analog zum Stokes-Fall wird als Ansatz- und Testraum für den Druck der $Q = L_0^2(\Omega)$ gewählt und es ergibt sich

Problem 3.15: Brinkman Gleichungen für $\mu_{\text{eff}} = 0$

Finde zu $f \in L^2(\Omega)$ Funktionen $(\boldsymbol{u}, p) \in V, Q$ so, dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V, Q$ gilt:

$$-(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, p) + \sigma(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$$
$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}, q) = 0,$$

beziehungsweise mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} a^D \colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\mapsto \sigma(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\ b \colon V \times Q &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v}, p) &\mapsto -(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, p) \end{aligned}$$

und der Linearform

$$\begin{aligned} f \colon V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto (\boldsymbol{f}, v) \end{aligned}$$

als Operatorproblem

Problem 3.16: Brinkman Gleichung für $\mu_{\text{eff}} = 0$

Finde zu $f \in V'$ Funktionen $(\boldsymbol{u}, p) \in V, Q$ so, dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V, Q$ gilt:

$$a^D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = [f, \boldsymbol{v}]_{V',V}$$
$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0.$$

Theorem 3.8: Wohldefiniertheit im Darcy Fall

Das Operatorproblem 3.16 besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Der Beweis zeigt abermals die Voraussetzungen von Theorem A.5 und somit die Eindeutigkeit.

Zuerst wird die Stetigkeit der Operatoren a und b gezeigt. Hierfür wird die Cauchy-Schwarz Ungleichung genutzt. Es ergibt sich für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in H^{\mathrm{div}}(\Omega)$

$$|a(\mathbf{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant \sigma \|\mathbf{u}\|_0 \|\boldsymbol{v}\|_0 \leqslant \sigma \|\mathbf{u}\|_{H^{\mathrm{div}}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H^{\mathrm{div}}(\Omega)}.$$

Der Beweis der Stetigkeit von b folgt analog zum Stokes-Fall. Somit sind die beiden Operatoren a und b stetig.

Anschließend wird die Koerzivität von a gezeigt. Es gilt für alle $v \in V$, dass

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \sigma \|\boldsymbol{v}\|_0^2.$$

Damit gilt, dass a auf ganz $H^1(\Omega)$ und insbesondere auf $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ koerziv ist.

Die inf-sup Bedingung ist für b analog zum Stokes-Fall erfüllt. Somit existiert nach Theorem A.5 eine eindeutige Lösung für Problem 3.16. □

3.3 Diskretisierte Formulierung

Da die Räume V_f, Q_f und Q_p aus Problem 3.7 und 3.11 beziehungsweise V und Q aus Problem 3.14 und 3.16 unendlich dimensional sein können, benötigt es einer Diskretisierung, um die Lösung der Probleme numerisch zu approximieren. Hierfür werden endlichdimensionale Teilräume V_f^h, Q_f^h und Q_p^h betrachtet und das Problem auf Basiselemente reduziert.

3.3.1 Diskrete Neumann-Neumann Formulierung

Um die Lösung von Problem 3.7 mittels Finite Elemente Methoden numerisch zu approximieren, wird die Triangulierung $\mathcal{T}^h$ von Ω betrachtet. Das Problem kann nun in ein algebraisches System überführt werden. Hierfür werden Basen der Räume V_f^h, Q_f^h und Q_p^h betrachtet. Einige typische Beispiele für solche Basen sind in [13, Appendix B.3] präsentiert. Seien nun

$$\left(\boldsymbol{v}_i^h\right)_{i=1}^{N_f} \subset V_f^h$$
$$\left(p_i^h\right)_{i=1}^{M_f} \subset Q_f^h$$
$$\left(\varphi_i^h\right)_{i=1}^{M_p} \subset Q_p^h$$

Basen der jeweiligen Räume. Somit ergeben sich die eindeutigen Darstellungen

$$\boldsymbol{v}^h = \sum_{j=1}^{N_f} a_j \boldsymbol{v}^h, \quad p^h = \sum_{j=1}^{M_f} b_j p_j^h, \quad \varphi^h = \sum_{j=1}^{M_p} c_j \varphi_j^h$$

der gesuchten Funktionen mit den Koeffizienten $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1}^{N_f}$, $\mathbf{b} = (b_j)_{j=1}^{M_f}$ und $\mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^{M_p}$. Mit diesen Darstellungen kann schließlich das lineare Gleichungssytem

$$\begin{bmatrix} A & B^T & C_f \\ B & 0 & 0 \\ C_p & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_f \\ 0 \\ f_p \end{bmatrix}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= a_f\left(\boldsymbol{v}_j^h, \boldsymbol{v}_i^h\right), & (B)_{ij} &= b_f\left(\boldsymbol{v}_j^h, p_i^h\right), \\ (C_f)_{ij} &= \left(\varphi_j^h, \boldsymbol{v}_i^h \cdot \mathbf{n}\right)_{0,\Gamma_I}, & (C_p)_{ij} &= \left(\varphi_i^h, \boldsymbol{v}_j^h \cdot \mathbf{n}\right)_{0,\Gamma_I}, \\ (D)_{ij} &= a_p\left(\varphi_i^h, \varphi_j^h\right), \\ (f_f)_i &= \left[f_f, \boldsymbol{v}_i^h\right]_{V_f', V_f}, & (f_p)_i &= \left[f_p, \varphi_i^h\right]_{Q_p', Q_p} \end{aligned}$$

als Diskretisierung von Problem 3.7 aufgestellt werden.

3.3.2 Diskrete Robin-Robin Formulierung

Mit den Definitionen der Basen und Koeffizientenvektoren aus Abschnitt 3.3.1 kann Problem 3.11 in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A^R & B^T & C_f^R \\ B & 0 & 0 \\ C_{p,1}^R & C_{p,2}^R & D^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_f^R \\ 0 \\ f_p^R \end{bmatrix}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \left(A^R\right)_{ij} &= a_f^R\left(\boldsymbol{v}_j^h, \boldsymbol{v}_i^h\right), \\ (B)_{ij} &= b_f\left(\boldsymbol{v}_j^h, p_i^h\right), \\ \left(C_f^R\right)_{ij} &= \left(\varphi_j^h, \boldsymbol{v}_i^h \cdot \mathbf{n}\right)_{0,\Gamma_I} - \gamma_f a_p\left(\varphi_j^h, \psi_{P_p(\boldsymbol{v}_i^h \cdot \mathbf{n})}\right), \\ \left(C_{p,1}^R\right)_{ij} &= -\left(\boldsymbol{v}_j^h \cdot \mathbf{n}_f, \varphi_i^h\right)_{0,\Gamma_I} + \frac{1}{\gamma_p} a_f\left(\boldsymbol{v}_j^h, \boldsymbol{w}_{P_f(\varphi_i^h)}\right), \\ \left(C_{p,2}^R\right)_{ij} &= \frac{1}{\gamma_p} b_f\left(\boldsymbol{w}_{P_f(\varphi_i^h)}, p_j^h\right), \\ \left(D^R\right)_{ij} &= a_p^R\left(\varphi_i^h, \varphi_j^h\right), \\ \left(f_f^R\right)_i &= \left[f_f, \boldsymbol{v}_i^h\right]_{V_f', V_f} + \left[f_{f,p}, \boldsymbol{v}_i^h\right]_{V_f', V_f}, \\ \left(f_p^R\right)_i &= \left[f_p, \varphi_i^h\right]_{Q_p', Q_p} + \left[f_{p,f}, \varphi_i^h\right]_{Q_p', Q_p} \end{aligned}$$

umformuliert werden.

3.3.3 Diskretes Brinkman Problem (Stokes Fall)

Analog zum Stokes-Darcy Problem, werden Basen

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{v}_i^h\right)_{i=1}^N &\subset V^h \\ \left(p_i^h\right)_{i=1}^M &\subset Q^h \end{aligned}$$

der Räume V^h und Q^h genutzt. Diese ergeben die eindeutigen Darstellungen

$$\boldsymbol{v}^h = \sum_{j=1}^{N} a_j \boldsymbol{v}_j^h, \quad p^h = \sum_{j=1}^{M} b_j p_j^h$$

mit den Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = \left(a_j\right)_{j=1}^{N}$ und $\boldsymbol{v} = \left(b_j\right)_{j=1}^{M}$. Zusammen lässt sich Problem 3.14 in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= a\left(\boldsymbol{v}_i^h, \boldsymbol{v}_j^h\right), \\ (B)_{ij} &= b\left(\boldsymbol{v}_i^h, p_j^h\right), \\ (f)_i &= \left[f, \boldsymbol{v}_i^h\right]_{V',V} \end{aligned}$$

umformulieren.

3.3.4 Diskretes Brinkman Problem (Darcy Fall)

Mit den in Abschnitt 3.3.3 eingeführten Basen und Koeffizientenvektoren kann Problem 3.16 mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \left(A^D\right)_{ij} &= a^D\left(\boldsymbol{v}_i^h, \boldsymbol{v}_j^h\right), \\ (B)_{ij} &= b\left(\boldsymbol{v}_i^h, p_j^h\right), \\ (f)_i &= \left[f, \boldsymbol{v}_i^h\right]_{V',V} \end{aligned}$$

umformuliert werden in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A^D & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4 Numerische Experimente

Um die in Abschnitt 2 präsentierten Modelle vergleichen zu können, werden verschiedene numerische Experimente durchgeführt. Nach [21] werden hierfür drei verschiedene Arten von Beispielen unterschieden.
Kategorie 1 bilden hierbei die trivialen Beispiele, deren Lösungen konstant oder linear sind. Diese Beispiele werden vorzugsweise in der Entwicklung von Algorithmen genutzt und daher sind sie nur selten in der Literatur zu finden. In der Kategorie 2 sind weitere Beispiele zu finden, deren Lösungen bekannt sind, die aber komplexer als in Kategorie 1 sind. Typischerweise sind dies Beispiele mit Polynomen höheren Grades oder trigonometrischen Funktionen. Die Beispiele dieser Kategorie werden in der Literatur genutzt, um das Konvergenzverhalten von Algorithmen zu untersuchen, beziehungsweise mit theoretischen Erkenntnissen vergleichen zu können. Kategorie 3 bilden schließlich Beispiele, deren Lösung analytisch nicht bekannt ist, die aber interessantes Verhalten beinhalten. Das Verhalten eines Algorithmus kann mithilfe dieser Beispiele mit den Lösungen anderer Algorithmen verglichen werden.
In dieser Arbeit werden Beispiele aus den Kategorien 2 und 3 präsentiert.

4.1 Beispiele aus Kategorie 2

In [21, Abschnitt 8.1] werden zwei Ansätze präsentiert, um Beispiele der Kategorie 2 zu finden, die hier genutzt werden sollen. In beiden Fällen wird das in Abb. 7 dargestellte Gebiet $\Omega = (0,1) \times (0,2), \Gamma_I = (0,1) \times \{1\}$ genutzt.

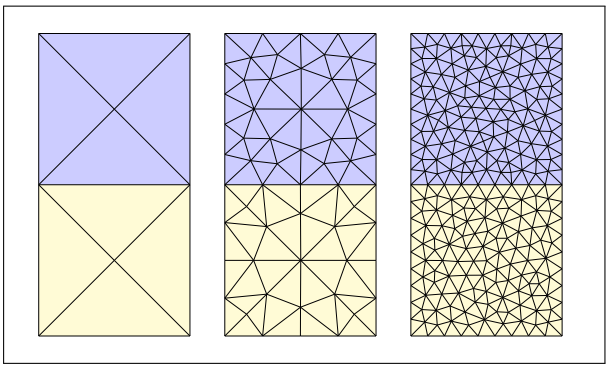

Abbildung 7: Verwendetes Gebiet für Beispiele der Kategorie 2

4.1.1 Beispiel 1 - Polynomielle Lösung

Im ersten Beispiel wird eine Lösung angesetzt, deren Komponenten alle in Q_2 liegen. Sie hat also die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \\ \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} c_{ij} x^i y^j \end{pmatrix} \\ p(x,y) &= \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} d_{ij} x^i y^j \\ \varphi(x,y) &= \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} e_{ij} x^i y^j. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Um die Stokes-Darcy Gleichungen zu erfüllen, wird (4.1.1) in die Stokes-Darcy Gleichungen in Problem 3.5 eingesetzt und durch die Gleichungen auf den Teilgebieten und die Kopp-

lungsbedingungen ergeben sich einige Restriktionen. Mithilfe der `Python`-Implementation in [21] werden diese Restriktionen für die Polynome $\mathbf{u}, p$ und φ eingeführt und aus den 36 Freiheitsgraden bleiben lediglich 9 Freiheitsgrade $a_1, \ldots, a_9$ übrig und die Lösung hat die Form

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
u_1(x,y) &= \left(a_5(\alpha\nu - 1) + a_7\alpha\nu + a_9\left(\alpha - \frac{1}{2\nu}\right)\right) + x(a_6(2 - 2\alpha\nu) + 2a_8\alpha\nu) \\
&\quad + a_5 y - 2a_6 xy + \frac{1}{2\nu} a_9 y^2 \\
u_2(x,y) &= \left(2ka_1 + ka_2 + a_6\left(2k\nu + 8k\nu^2\alpha - 2\alpha\nu + 1\right) + a_8\left(2k\nu - 8k\nu^2\alpha + 2\alpha\nu\right) + ka_9\right) \\
&\quad + a_7 x + (a_6(2\alpha\nu - 2) - 2a_8\alpha\nu)y + a_8 x^2 + a_6 y^2 \\
p(x,y) &= \left(-3\nu a_6 - 3\nu a_8 - \frac{1}{2}a_9\right) + a_9 x + 2\nu(a_6 + a_8)y \\
\varphi(x,y) &= a_1 + a_3 x + a_2 y + xy\left(-2a_3 + \frac{a_7}{k} + 2a_9\right) + x^2\left(a_4 + \frac{a_8}{k}\right) \\
&\quad - y^2\left(a_1 + a_2 + a_6\left(4\alpha\nu^2 + \nu\right) + a_8\left(\nu - 4\alpha\nu^2\right) + \frac{a_9}{2}\right) - x^2 y\left(2a_4 + \frac{a_8}{k}\right) \\
&\quad + xy^2\left(a_3 - \frac{a_7}{k} - a_9\right) + a_4 x^2 y^2.
\end{aligned}
$$

Für Beispiel 1 werden gewählt:

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 0 & a_4 = \frac{1}{k} & a_7 = -\frac{2}{\alpha\nu} \\
a_2 = \frac{1}{k} & a_5 = -2 & a_8 = 0 \\
a_3 = 2\nu & a_6 = 0 & a_9 = 2\nu
\end{array}
$$

und es ergibt sich als Lösung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2 - 2y - 1 \\ 1 + 2k\nu - \frac{2}{\alpha\nu}x \end{pmatrix} \\
p(x,y) &= -\nu + 2\nu x \\
\varphi(x,y) &= 2\nu x + \frac{1}{k}y + \frac{1}{k}x^2 - \left(\frac{1}{k} + \nu\right)y^2 + \frac{2}{k}x^2 y - \frac{2}{\alpha\nu k}xy^2 + \frac{1}{k}x^2 y^2.
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

Zur Lösung wird, sowohl für die Simulation mittels Stokes-Darcy Gleichungen, als auch mittels der Brinkman-Gleichung, das Problem mit Dirichlet-Randbedingungen versehen, die mit exakten Funktionswerten vorgegeben werden.

4.1.2 Beispiel 2 - Trigonometrische Lösung

Der zweite Ansatz zum Finden von Beispielen der Kategorie 2 ist die Trennung der Veränderlichen. In diesem Fall wird angenommen, dass die Komponenten der Lösung Produkte von Funktionen in jeweils einer Variable sind. Die Lösung hat also die Form

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} f_1(x)f_2(y) \\ g_1(x)g_2(y) \end{pmatrix} \\
p(x,y) &= 0 \\
\varphi(x,y) &= h_1(x)h_2(y).
\end{aligned}
$$

Durch die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ ergeben sich für eine Konstante ξ die Forderungen

$$g_1 = \frac{1}{\xi} f_1' \quad \text{und} \quad f_2 = -\frac{1}{\xi} g_2'.$$

Eine weitere Forderung ergibt sich durch den Massenerhalt und die Gleichheit der Normalenkräfte auf Γ_I. Sie lautet

$$h_1 = \vartheta f_1'$$

mit

$$\vartheta = -\frac{1}{\mathbb{K}\xi} \frac{g_2(1)}{h_2'(1)} = -\frac{2\nu}{\xi} \frac{g_2'(1)}{h_2(1)}.$$

Außerdem führt die Beavers-Joseph-Saffman Bedingung zu einer Differentialgleichung für f_1. Sie lautet

$$f_1''(x) = -\sigma f_1(x),$$

mit

$$\sigma := \frac{1}{g_2(1)} \left(\frac{g_2'(1)}{\alpha\nu} - g_2''(1) \right).$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt für f_1 die Form

$$f_1(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\sigma} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\sigma} x\right)$$

für Konstanten c_1 und c_2.
Somit bleiben c_1, c_2, g_2, ξ und h_2 frei zu wählen, so dass die zweite Gleichheit in (4.1.2) gilt und σ positiv ist.
Für Beispiel 2 werden $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $g_2(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)$, $\xi = \frac{\pi}{2}$ und $h_2(y) = 1 - y$ gewählt und $\mathbb{K} = 1$ angenommen. Somit ist die Lösung für dieses Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) \end{pmatrix} \\ p(x,y) &= 0 \\ \varphi(x,y) &= (1-y) \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right). \end{aligned}$$

Analog zum Beispiel 1 werden auch hier Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben.

4.2 Beispiel aus Kategorie 3

Beispiel 3 beschreibt einen stetigen Wasserfluss über ein poröses Flussbett. Die Schicht Γ_I ist in diesem Beispiel nicht gerade, sondern besteht aus dreieckigen Dünen. Dieses Beispiel wurde in [6] vorgeschlagen und auch in [5] und [21] betrachtet.
Im Gegensatz zu den Beispielen 1 und 2 wird in diesem Beispiel keine Lösung festgesetzt, um anschließend das zugehörige Problem aufzustellen, sondern es werden Parameter für ein bestimmtes Problem festgelegt.
Das Gebiet ist in diesem Beispiel ein Rechteck $\Omega = [0, 2L] \times \left[0, H_p + H_f\right]$. Hierbei bezeichnet H_p die Höhe des porösen Mediums an den Stellen $x \in \{0, L, 2L\}$ und H_f die Wasserhöhe an diesen Stellen. Von den Punkten $\left(0, H_p\right)$ und $\left(L, H_p\right)$ aus erheben sich jeweils Dünen in linearer Form, die an den Stellen $x \in \{l_D, L + l_D\}$ bis auf eine Höhe von h_D angewachsen sind (siehe Abb. 8).
Hierbei werden verschiedene Randbedingungen verwendet. Der untere Rand wird als un-

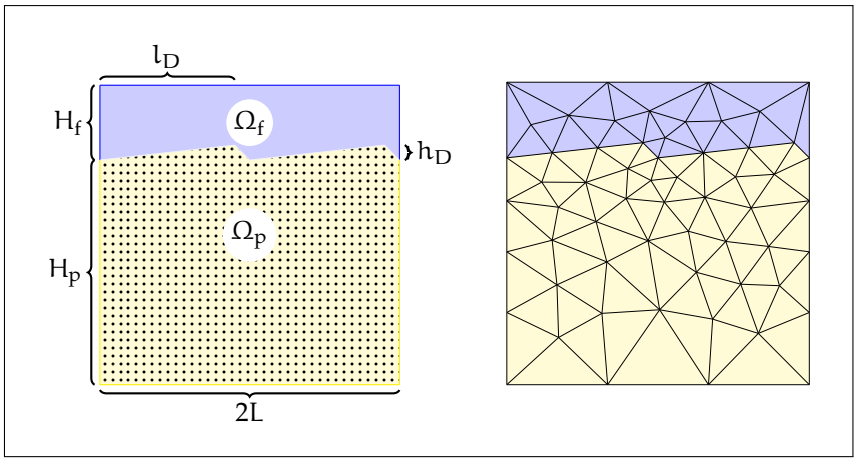

Abbildung 8: Verwendetes Gebiet und Gitter für Beispiel der Kategorie 3

durchlässig angenommen und mit einer homogenen Neumann-Randbedingung

$$\frac{k}{\mu}\nabla\varphi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_p = 0 \tag{4.2.1}$$

versehen. Für den oberen Rand wird eine Haftbedingung (no-slip) verwendet. Es ergibt sich also eine homogene Dirichlet-Randbedingung

$$\boldsymbol{v}\big(x, H_p + H_f\big) = 0. \tag{4.2.2}$$

Die Seitenränder von Ω werden mit periodischen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}(2L)\\
\varphi(0) &= \varphi(2L) + p_0\\
S(\mathbf{u}(0), p(0))\cdot\mathbf{n}_f &= -S(\mathbf{u}(2L), p(2L))\cdot\mathbf{n}_f + p_0\mathbf{n}_f\\
-\frac{k}{\mu}\nabla\varphi(0)\cdot\mathbf{n}_f &= \frac{k}{\mu}\varphi(2L)\cdot\mathbf{n}_f
\end{aligned}$$

ausgestattet. Hierbei ist p_0 eine Konstante, die in einem Knotenpunkt fixiert wird.
Zur Durchführung der Simulation werden die Parameter

$$\begin{aligned}
L &= 1, & H_f &= 0.5, & H_p &= 1.5\\
l_D &= 0.9, & h_D &= 0.1\\
p_0 &= 10^{-3}, & \mathbf{f}_f &= \mathbf{0}, & f_p &= 0
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

gesetzt.

4.3 Vergleichende Ergebnisse

Um die beiden verschiedenen Modelle vergleichen zu können, wurden die drei, in den Abschnitten 4.1 und 4.2 beschriebenen Beispiele mithilfe der Simulationssoftware `ParMoon` [22] sowohl mit den Stokes-Darcy als auch mit den Brinkman Gleichungen simuliert. Für die Simulation der Stokes-Darcy Gleichungen wurde ein Branch von `ParMoon` verwendet, der auf der Arbeit [21] basiert. Dieser bietet eine Implementierung der Stokes-Darcy Gleichungen in der Neumann-Neumann Formulierung inklusive einiger ausgewählter Beispiele. Die Brinkman Simulation wird mit stückweise konstanten Koeffizienten σ und μ_{eff} durchgeführt. So wurde

in allen Beispielen im Darcy-Gebiet der Wert $\mu_{\text{eff}} = 0$ gesetzt.
Zur numerischen Approximation der Stokes-Darcy Lösung werden, angelehnt an [21], Finite Elemente des Typs (P_2, P_1, P_2), also Taylor-Hood Elemente für die Stokes Gleichungen und quadratische Polynome auf Dreiecken für den Darcy-Druck verwendet. Für die Simulation der Brinkman Gleichungen werden Finite Elemente (P_2, P_1) verwendet, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen.

4.3.1 Beispiel 1 - Polynomielle Lösung

Dieses Beispiel wird in Abhängigkeit von den Parametern ν, $\mathbb{K} = k\mathbb{I}$ und dem Verfeinerungsgrad r simuliert. Für ν werden die Werte 10^i, $i \in [-6, 1]$ und für k die Werte 10^j, $j \in [-4, 0]$ genutzt. Somit ergeben sich 40 verschiedene Simulationen, die in jeweils 4 verschiedenen Auflösungen berechnet werden. Dadurch ergeben sich 160 Simulationen für jedes Problem und eine Vielzahl an verfügbaren Daten. In diesem Abschnitt werden relevante Auszüge präsentiert, sofern die weiteren Daten keine abweichenden Aussagen belegen. Der Vollständigkeit halber werden die weiteren Datensätze der hier präsentierten Auszüge in Anhang B dargestellt.

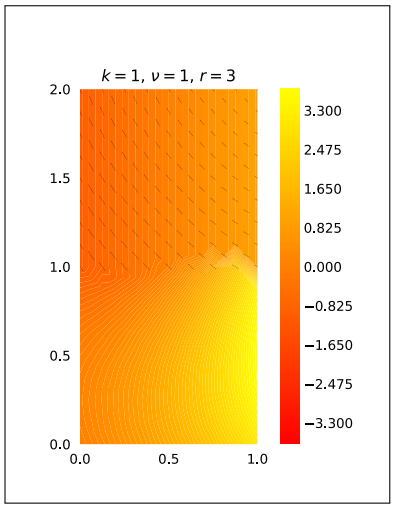

Abbildung 9: Exakte Lösung $(\mathbf{u}_{\text{sol}}, p_{\text{sol}}, \varphi_{\text{sol}})^T$ von Beispiel 1 für $k = \nu = 1$ und $r = 3$

Da in den Brinkman Gleichungen nicht die kinematische Viskosität ν, sondern die kinematische Viskosität

$$\mu = \nu\rho$$

verwendet wird, benötigt es eine Dichte ρ, um die Viskositäten zu übersetzen. Der Einfachheit halber wurde der Wert $\rho = 1$ angesetzt.
Für die verschiedenen Verfeinerungsgrade ergeben sich die folgenden Gittergrößen (siehe Tabelle 7), die leichte Unterschiede zwischen den Simulationen für die Stokes-Darcy Gleichungen und die Brinkman Gleichungen aufzeigen. Diese Unterschiede in der Anzahl der Gitterpunkte sind auf die Teilung in zwei Teilbereiche zurückzuführen, da somit alle Punkte auf der Grenzschicht Teil beider Teilbereiche sind. Somit entspricht die Differenz zwischen den Gitterpunkten für Stokes-Darcy und für Brinkman der Anzahl der Gitterpunkte auf der Grenzschicht.
Für jede dieser Simulationen stehen nun das simulierte Ergebnis $(\mathbf{u}, p, \varphi)$, sowie das exakte Ergebnis (siehe Abb. 9) $(\mathbf{u}_{\text{sol}}, p_{\text{sol}}, \varphi_{\text{sol}})^T$ (4.1.2) und damit auch der Fehler

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{err}} \\ p_{\text{err}} \\ \varphi_{\text{err}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{sol}} \\ p_{\text{sol}} \\ \varphi_{\text{sol}} \end{pmatrix}$$

in jedem Gitterpunkt zur Verfügung (siehe Abb. 10). Somit kann der Fehler in Abhängigkeit einzelner Parameter betrachtet werden.
In Abb. 11 sind die Fehlerwerte $\|(p_{\text{err}}, \varphi_{\text{err}})^T\|_1$ und $\|(p_{\text{err}}, \varphi_{\text{err}})^T\|_\infty$ beziehungsweise $\|p_{\text{err}}\|_1$

Tabelle 7: Gittergrößen im Beispiel 1 für verschiedene Verfeinerungsgrade

Stokes-Darcy Verfeinerungsgrad	Gitterpunkte	Zellen
1	26	32
2	82	128
3	290	512
4	1090	2048

Brinkman Verfeinerungsgrad	Gitterpunkte	Zellen
1	23	32
2	77	128
3	281	512
4	1073	2048

und $\|p_{err}\|_\infty$ im Brinkman Fall für verschiedene Werte von ν über k aufgetragen. Die Fehlerwerte wurden jeweils auf einem Gitter mit Verfeinerungsgrad $r = 3$ bestimmt.

Es ist ein rasanter Anstieg des Fehlers für $k < 10^{-3}$ sichtbar, der für alle betrachteten Werte von

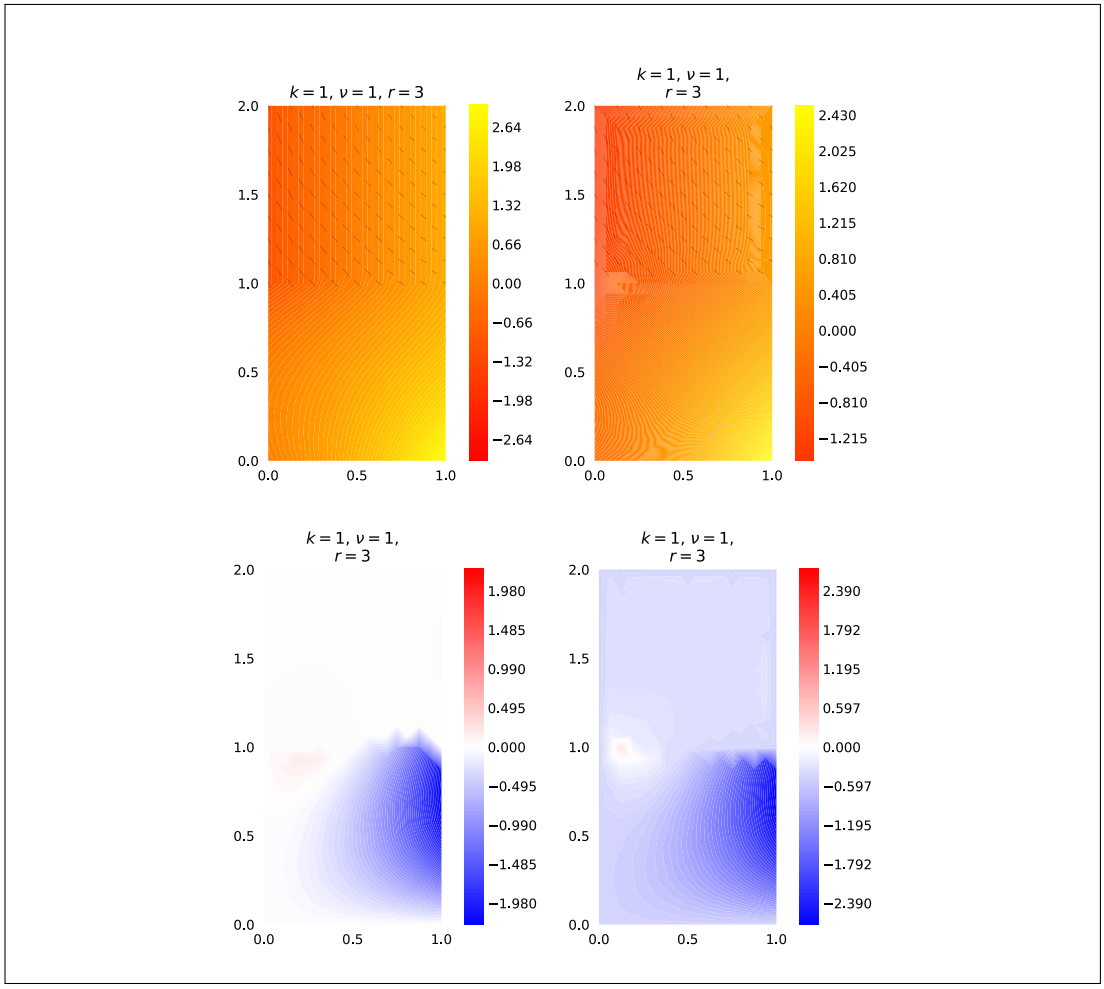

Abbildung 10: Stokes-Darcy Simulation $(\mathbf{u}, p, \varphi)^T$ und Fehler $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ (links), Brinkman Simulation $(\mathbf{u}, p)^T$ und Fehler p_{err} (rechts) von Beispiel 1 für $K = \nu = 1$ und $r = 3$

ν auftritt. Des Weiteren ist ersichtlich, dass für die betrachteten $\nu < 1$ sowohl der maximale Fehler $\|p_{err}\|_\infty$, als auch der durchschnittliche Fehler $\|p_{err}\|_1$ der Brinkman Simulation deutlich größer sind, als der entsprechende Fehler der Stokes-Darcy Simulation.

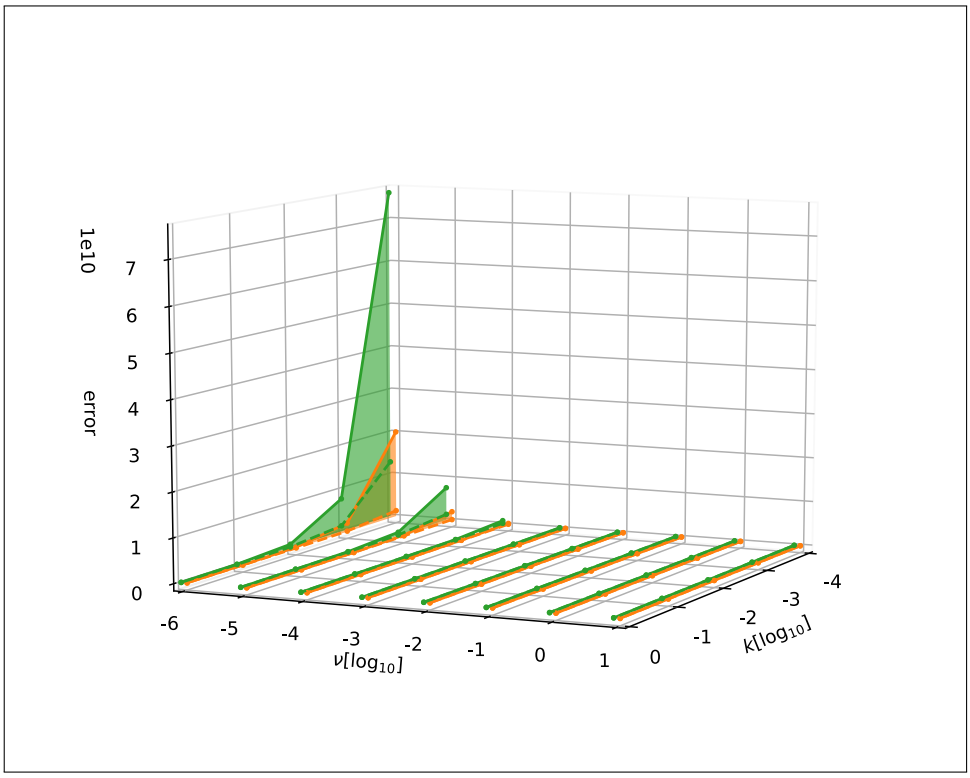

Abbildung 11: Maximaler (durchgezogene Linie) und durchschnittlicher Fehler im Druck (gestrichelte Linie) der Stokes-Darcy, orange, und Brinkman Simulation, grün, für Beispiel 1 in Abhängigkeit von k ($r = 3$)

In Abb. 12 (Seite 45) ist analog dazu die Abhängigkeit des maximalen und durchschnittlichen Fehlers von der Viskosität ν dargestellt. Auch hier ist ein rasanter Anstieg des Fehlers für $\nu < 10^{-5}$ erkennbar, der auch im Skalierungsfaktor der y-Achsen in Abb. 11 ersichtlich ist. Ebenso sind, analog zur Abhängigkeit des Fehlers von k, deutliche geringere Fehler für die Simulationen mittels Stokes-Darcy Gleichungen als im Brinkman Fall erkennbar. Dies gilt für alle betrachteten $k < 1$.

In Abb. 13 und 14 sowie Abb. 25 bis 28 sind die Fehler in den Drücken $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ innerhalb des Gebiets Ω dargestellt. Eine blaue Färbung gibt an, dass $p < p_{sol}$, beziehungsweise $\varphi < \varphi_{sol}$ und eine rote Färbung das entsprechende Gegenteil.

Es ist in Abb. 13 sowie Abb. 25 und 26 zu erkennen, dass für die Stokes-Darcy Simulation die Fehler vor allem im Darcy-Gebiet Ω_p entstehen, wohingegen das Stokes-Gebiet Ω_f lediglich geringe Fehler aufweist.

In Abb. 14, 27 und 28 ist hingegen zu betrachten, dass für die Brinkman Simulation auch im Stokes-Gebiet Ω_f ein markanter Fehler auftritt. Des Weiteren ist der Fehler im Darcy-Gebiet Ω_p auch in diesen Simulationen deutlich ausgeprägter, als im Stokes-Gebiet Ω_f, wobei der Fehler im Bereich der Grenzschicht Γ maximal wird.

In Abb. 16 werden exemplarisch auf Ω_f das simulierte Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ und die exakte Lösung $\mathbf{u}_{sol}$ für die Parameter $\nu = k = 1$ und den Verfeinerungsgrad $r = 3$ gegenüber gestellt. Die weiteren Geschwindigkeitsfelder sind für die Stokes-Darcy, sowie die Brinkman Simulation in Abb. 29 bis 32 aufgeführt. Hierbei ist zu erkennen, dass sich sowohl das Ge-

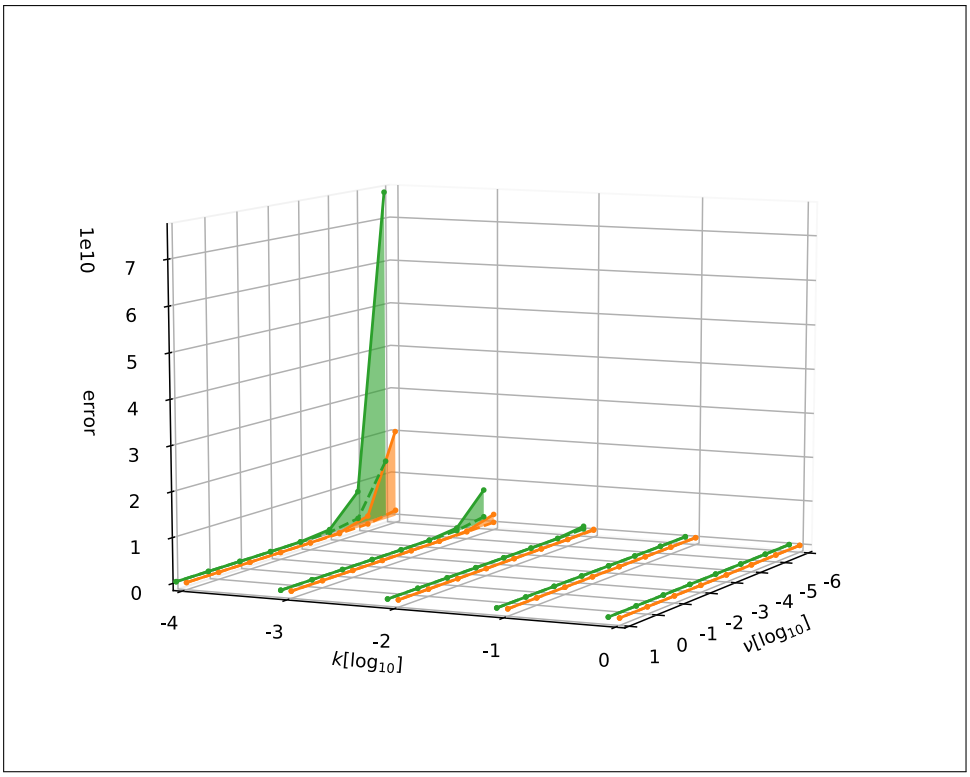

Abbildung 12: Maximaler (durchgezogene Linie) und durchschnittlicher Fehler im Druck (gestrichelte Linie) der Stokes-Darcy, orange, und Brinkman Simulation, grün, für Beispiel 1 in Abhängigkeit von ν ($r = 3$)

schwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ der Stokes-Darcy Simulationen, als auch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ der Brinkman Simulation weitestgehend mit der exakten Lösung $\mathbf{u}_{\text{sol}}$ bezüglich der Richtung und des Betrags deckt.

Die Ergebnisse sind bisher für einen Verfeinerungsgrad von $r = 3$ gezeigt worden. In Abb. 15 (Seite 46) ist jedoch zu sehen, dass der Fehler im Druck näherungsweise konstant im Verfeinerungsgrad r ist. Somit können die gemachten Aussagen auch auf andere Wahlen von r übertragen werden.

Insgesamt zeigt die Brinkman Simulation für dieses Beispiel Probleme bei der Approximation des Drucks im Bereich um die Grenzschicht Γ, in der die exakte Lösung von p auf φ wechselt. Diese Probleme können auch bei der Simulation mittels Stokes-Darcy Gleichungen beobachtet werden. Beide Simulationen bieten auf dem Stokes-Gebiet Ω_f eine gleichermaßen

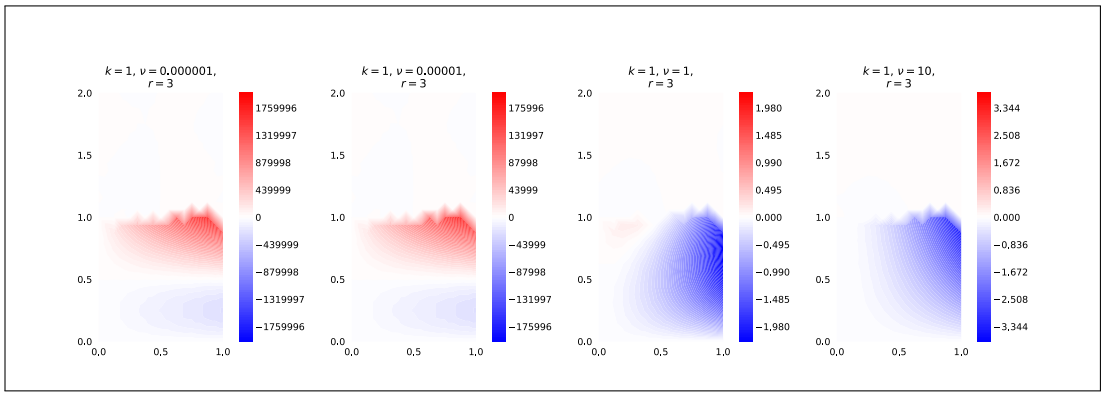

Abbildung 13: Fehler $(p_{\text{err}}, \varphi_{\text{err}})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1

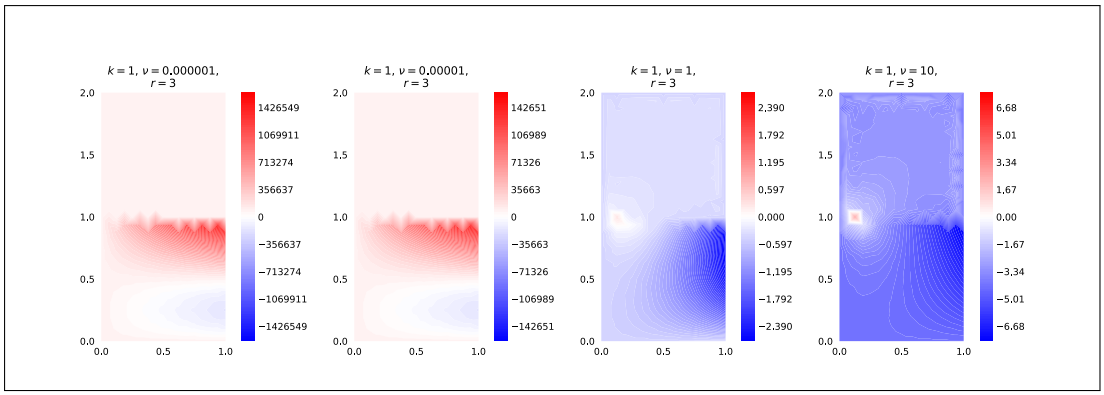

Abbildung 14: Fehler p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1

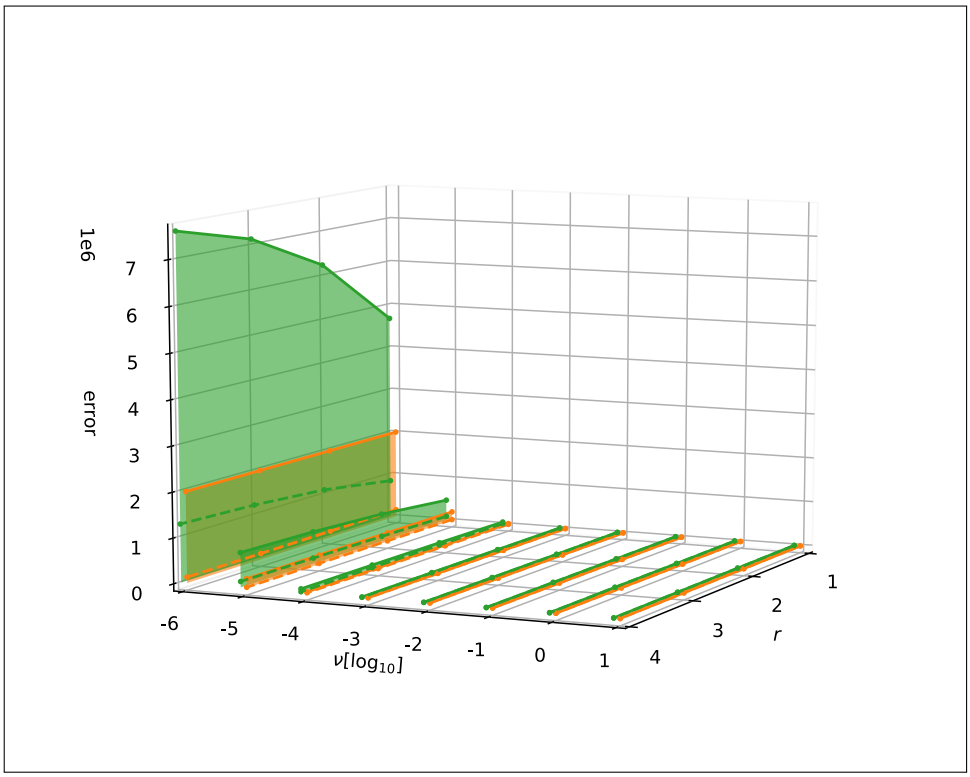

Abbildung 15: Maximaler (durchgezogene Linie) und durchschnittlicher Fehler im Druck (gestrichelte Linie) der Stokes-Darcy, orange, und Brinkman Simulation, grün, für Beispiel 1 in Abhängigkeit von r (k = 1)

gute Approximation des Geschwindigkeitsfelds.

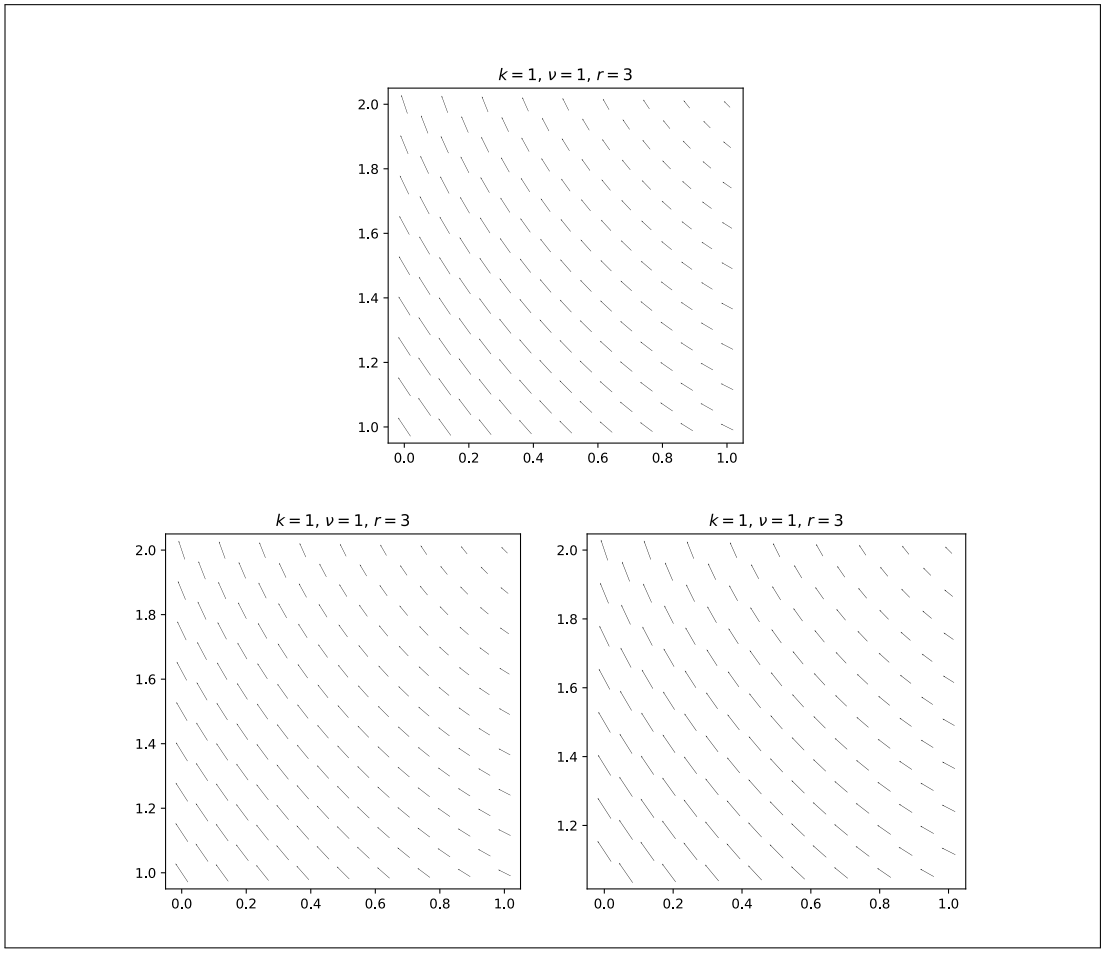

Abbildung 16: Exakte Lösung $\mathbf{u}_{\text{sol}}$, oben, und $\mathbf{u}$, unten, für die Stokes-Darcy, links, und Brinkman, rechts, Simulation von Beispiel 1

4.3.2 Beispiel 2 - Trigonometrische Lösung

Das zweite Beispiel wurde in Anlehnung an [21, Beispiel 8.3] und [11] gewählt. Im Gegensatz zum ersten Beispiel wurde dieses Beispiel nur für die Werte $\nu = k = 1$ und $r \in [1, 6]$ simuliert. Es stehen also entsprechend weniger Daten für eine Auswertung zur Verfügung.

Da auch in diesem Beispiel die exakte Lösung $(\mathbf{u}_{sol}, p_{sol}, \varphi_{sol})$ vorgegeben ist (siehe Abb. 17), kann der Fehler

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{err} \\ p_{err} \\ \varphi_{err} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{sol} \\ p_{sol} \\ \varphi_{sol} \end{pmatrix}$$

bestimmt werden und in Abhängigkeit zu dem einzigen variierbaren Parameter r gesetzt werden. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 19 sowohl für die Stokes-Darcy, als auch die Brinkman Simulation dargestellt. Markant ist hierbei, dass eine feinere Auflösung in diesem Beispiel einen Anstieg des Fehlers, sowohl durchschnittlich, als auch maximal, bedeuten kann.

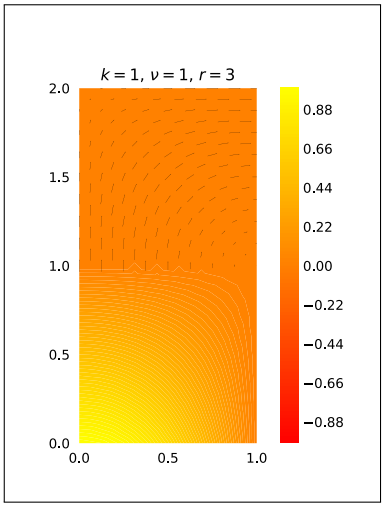

Abbildung 17: Exakte Lösung $(\mathbf{u}_{sol}, p_{sol}, \varphi_{sol})^T$ von Beispiel 2 für $k = \nu = 1$ und $r = 3$

Es zeigt sich, dass der Fehler in der Brinkman Simulation deutlich höher ausfällt, als in der Stokes-Darcy Simulation, was auch schon in Abb. 18 zu erkennen ist. Dahingegen sind keine Unterschiede in der Abhängigkeit des Fehlers vom Feinheitsgrad r zwischen den Stokes-Darcy Simulation und der Brinkman Simulation in Abb. 19 erkennbar. Für beide Simulationen sind sowohl der maximale Fehler $\|(p_{err}, \varphi_{err})\|_\infty$, als auch der durchschnittliche Fehler $\|(p_{err}, \varphi_{err})\|_1$ nahezu konstant.

In diesem Abschnitt werden exemplarisch nur die Plots des punktweisen Fehlers für die Auflösungen $r = 1$ und $r = 6$ präsentiert. Der Vollständigkeit halber werden in Abschnitt B.2 die Plots für beide Simulationen und alle Auflösungen $r \in [1, 6]$ gezeigt.

Eine Betrachtung des punktweisen Fehlers der Stokes-Darcy Simulation in Abb. 20 beziehungsweise Abb. 34 zeigt, dass der Fehler im Darcy-Gebiet Ω_p schneller verschwindet, als im Stokes-Gebiet Ω_p. Für die Brinkman Simulation hingegen kann in Abb. 20 und 34 gesehen werden, dass der Fehler sowohl im Stokes-Gebiet Ω_f, als auch im Darcy-Gebiet Ω_p auftritt. Ein deutlicher Fehler entsteht um den Punkt $(1, 1)$, ausgelöst durch den Sprung der Koeffizienten σ und μ_{eff} an der Grenzschicht Γ_I.

In Abb. 21 (Seite 51) und Abb. 36 und 37 ist das Geschwindigkeitsfeld der exakten Lösung $\mathbf{u}_{sol}$ und die simulierten Geschwindigkeitsfelder $\mathbf{u}$ der Stokes-Darcy und der Brinkman Simulation dargestellt. Ähnlich wie bereits in Abschnitt 4.3.1 stimmen sowohl die Geschwindigkeitsfelder der Stokes-Darcy Simulation, als auch der Brinkman Simulation, größtenteils mit der exakten Lösung in Richtung und Betrag überein.

Zusammenfassend bietet die Stokes-Darcy Simulation in der Fläche eine gute numerische Approximation des Drucks (p_{sol}, φ_{sol}), wobei die Brinkman Simulation einen Fehler im Bereich des Übergangs von Ω_f zu Ω_p liefert. Die Geschwindigkeitsfelder werden durch beide Simulationen nahezu identisch approximiert.

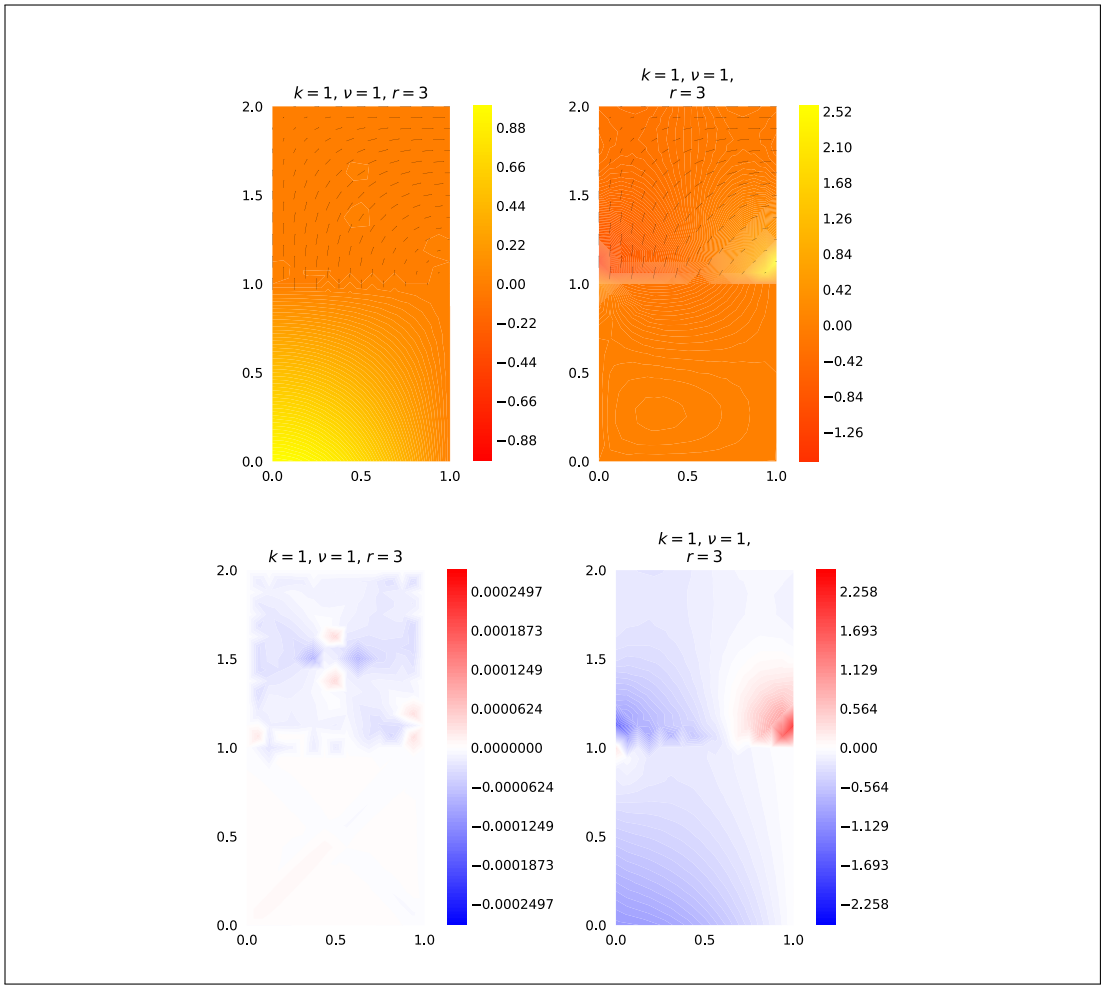

Abbildung 18: Stokes-Darcy Simulation $(\mathbf{u}, p, \varphi)^T$ und Fehler $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ (links), Brinkman Simulation $(\mathbf{u}, p)^T$ und Fehler p_{err} (rechts) von Beispiel 2 für $r = 3$

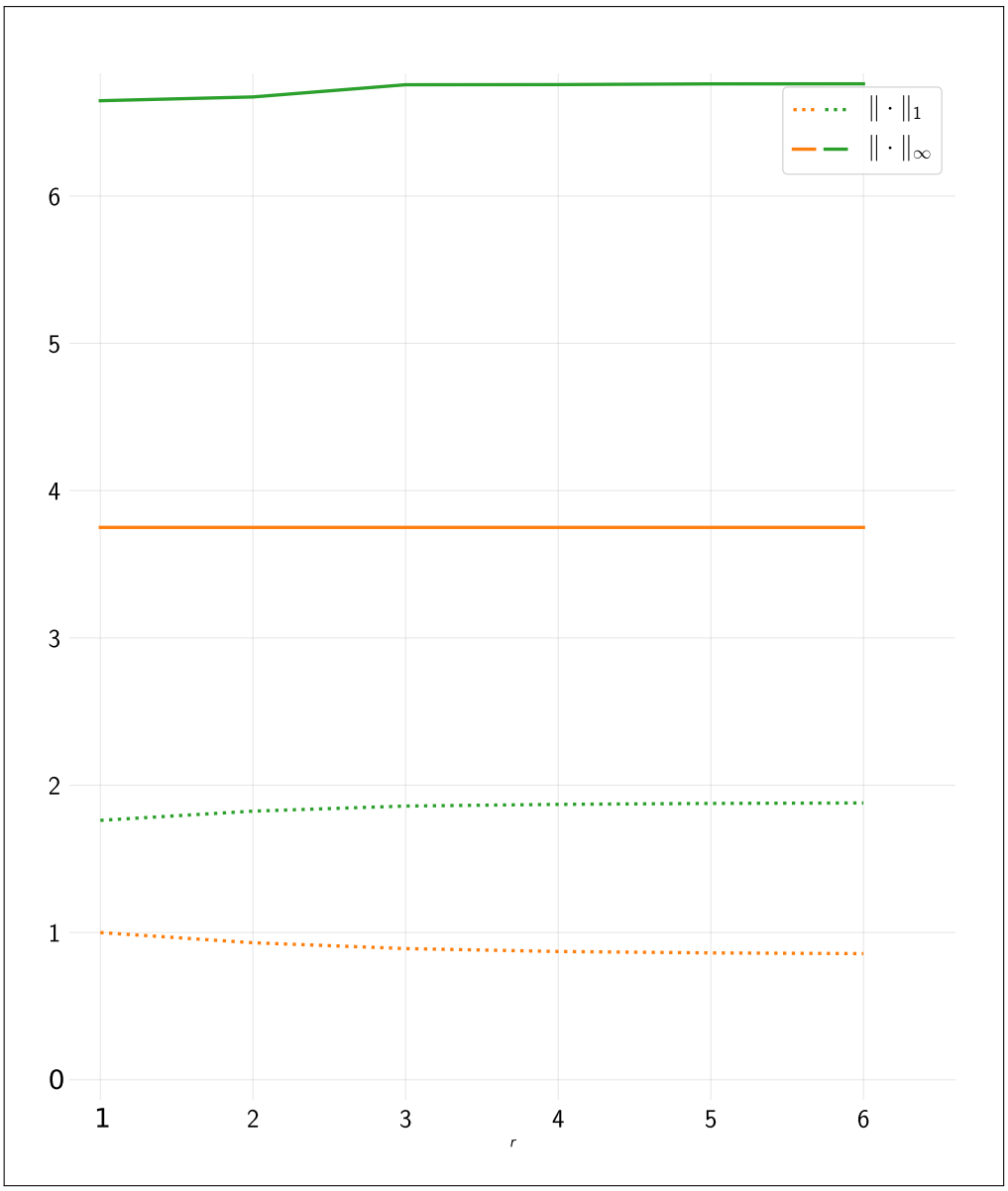

Abbildung 19: Maximaler (durchgezogene Linie) und durchschnittlicher Fehler im Druck (gestrichelte Linie) der Stokes-Darcy, orange, und Brinkman Simulation, grün, für Beispiel 2 in Abhängigkeit von r

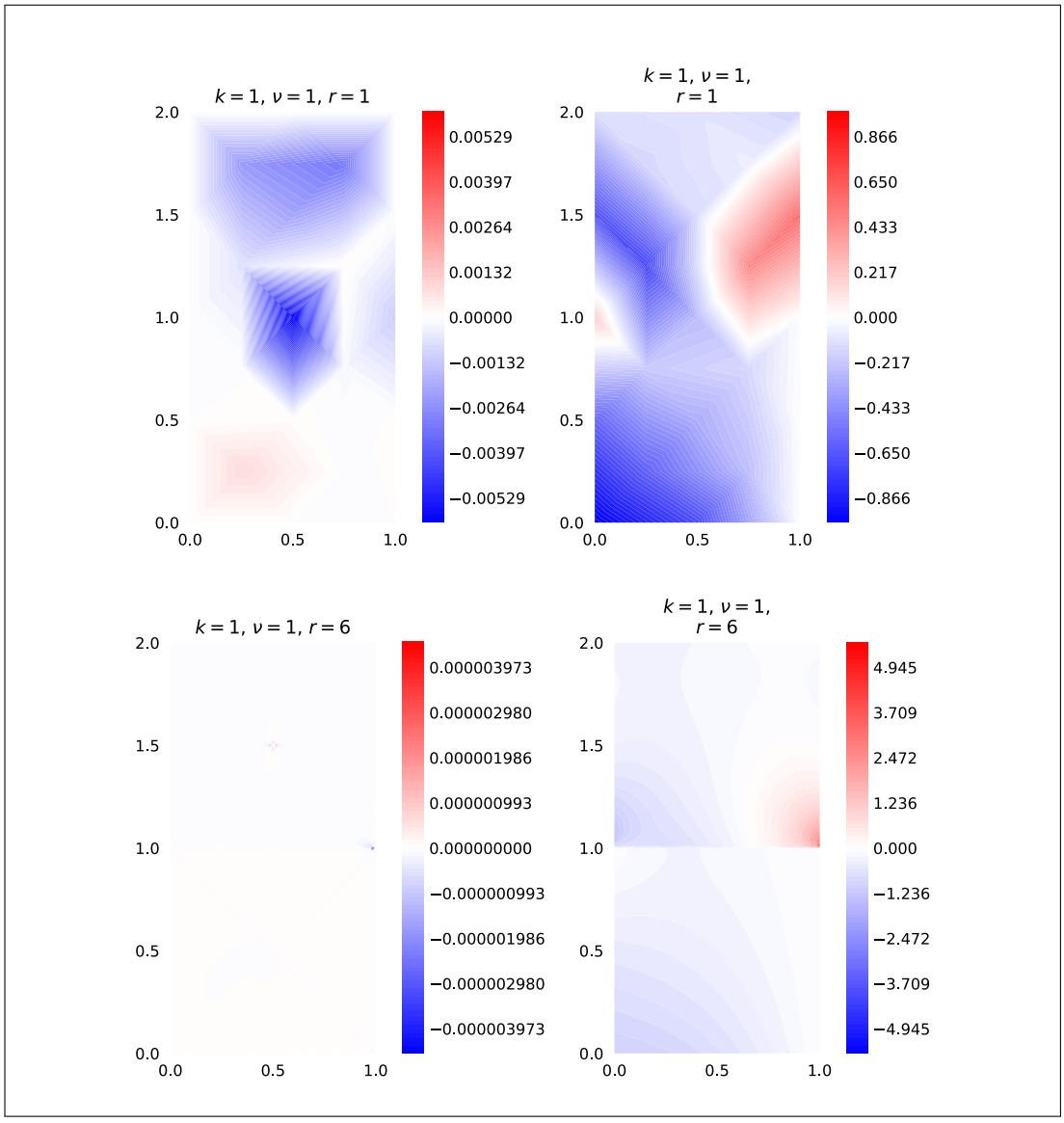

Abbildung 20: $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ bzw. p_{err} für die Stokes-Darcy Simulation (links) und Brinkman Simulation (rechts) von Beispiel 2

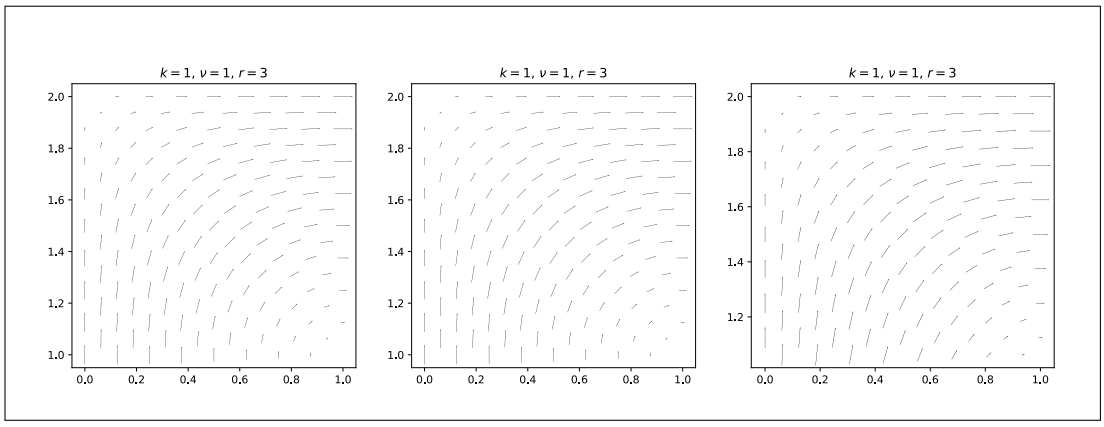

Abbildung 21: Exakte Lösung $\mathbf{u}_{sol}$, oben, und $\mathbf{u}$, unten, für die Stokes-Darcy (links) und Brinkman(rechts) Simulation von Beispiel 2

4.3.3 Beispiel 3 - Flußbettproblem

Ebenso wie Beispiel 2 werden für dieses Beispiel feste Werte für ν beziehungsweise μ und $\mathbb{K} = k\mathbb{I}$ verwendet. Hierfür wurden aus Abschnitt 1 die folgenden Werte gewählt:

— $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$

— $\nu = 1 \cdot 10^{-3}$

— $k = 1 \cdot 10^{-10}$

und das Problem für die Verfeinerungsgrade $r \in [1, 5]$ mit den Stokes-Darcy und der Brinkman Gleichung simuliert. Die Ergebnisse für $r = 3$ sind in Abb. 22 und 23 zu sehen.

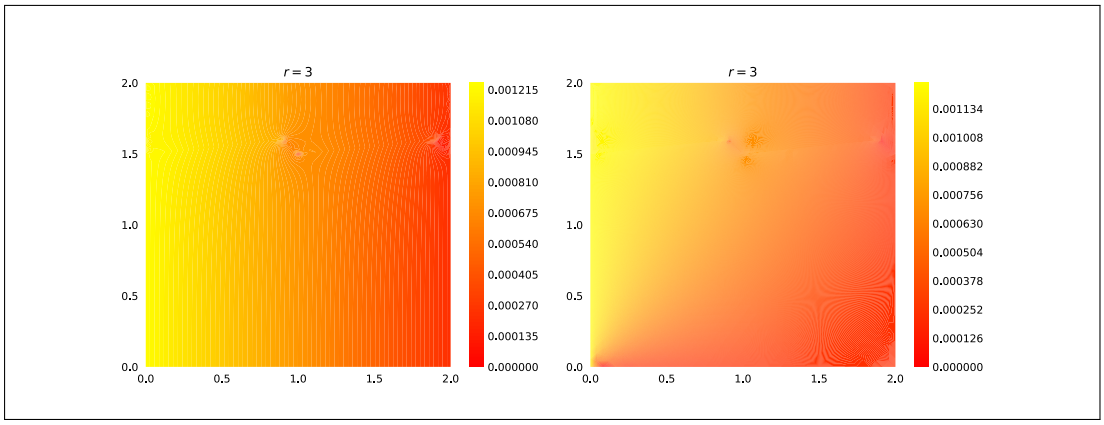

Abbildung 22: Stokes-Darcy Simulation (links) und Brinkman Simulation (rechts) von p für Beispiel 3 für $r = 3$

In Abb. 22 ist zu erkennen, dass die Stokes-Darcy und Brinkman Simulation den Druck für Beispiel 3 in der gleichen Größenordnung approximieren, es aber Unterschiede in den Niveaus gibt. Während die Niveaulinien für die Stokes-Darcy Simulation größtenteils vertikal verlaufen, ergibt sich für die Brinkman Simulation ein Bild, das eher von diagonal verlaufenden Niveaulinien geprägt ist. Dies ist auch in Abb. 24 erkennbar, wo die Differenz zwischen den Druckfeldern der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation abgebildet ist. Hierbei bedeutet eine rötliche Färbung, dass die Stokes-Darcy Simulation des Drucks größer ist als die Brinkman Simulation.
In Abb. 23 ist zu erkennen, dass sich die Geschwindigkeitsfelder der Stokes-Darcy und Brinkman Simulation sowohl in Richtung, als auch Betrag, zu weiten Teilen decken. Es sind geringe Unterschiede im Randbereich Γ_I zu erkennen.

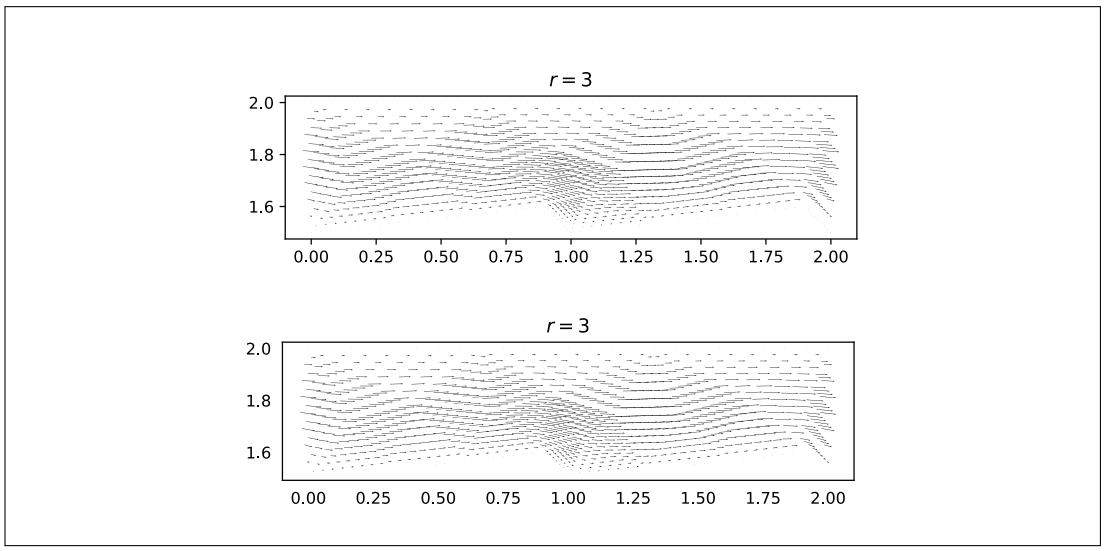

Abbildung 23: Stokes-Darcy Simulation (oben) und Brinkman Simulation (unten) von $\mathbf{u}$ für Beispiel 3 für $r = 3$

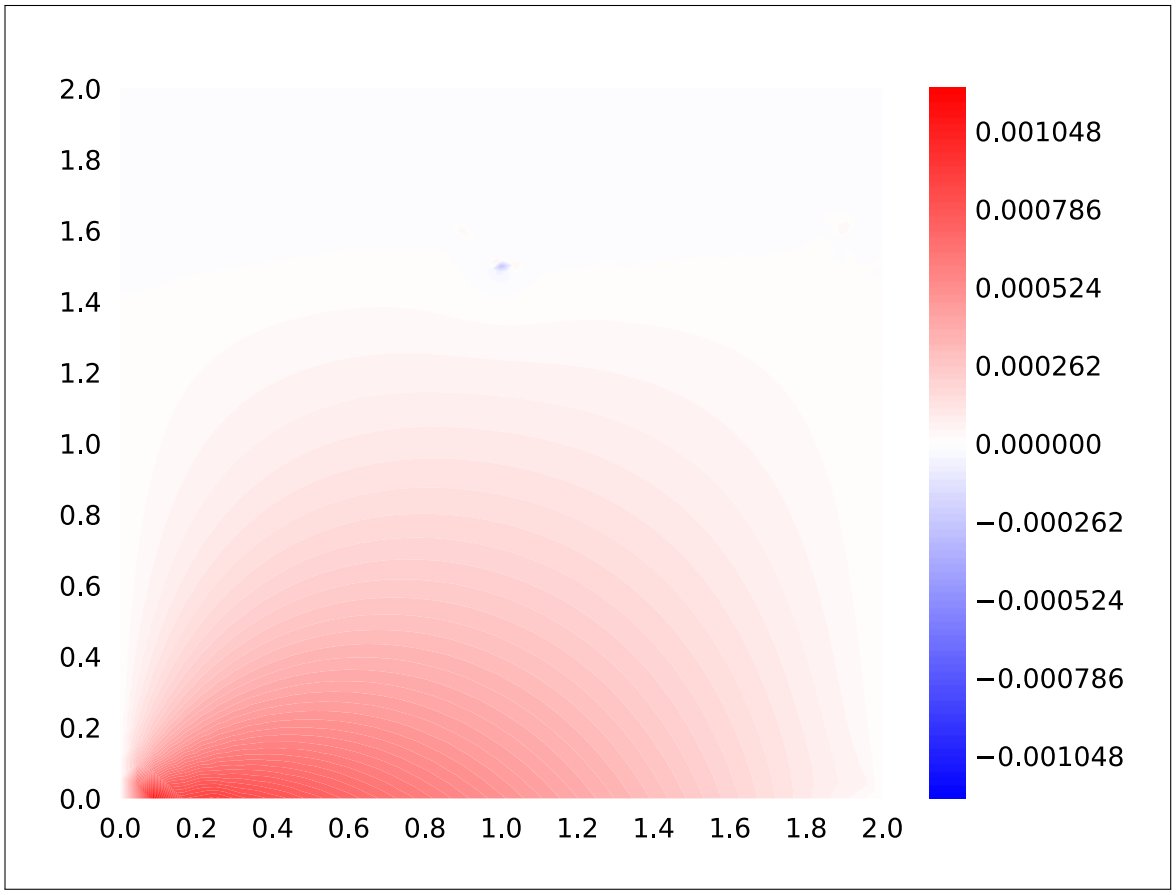

Abbildung 24: Differenz zwischen den Druckfeldern der Stokes-Darcy und der Brinkman Simulation für Beispiel 3 und $r = 3$

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die in Abschnitt 4 präsentierten Beispiele zeigen einige Probleme der Stokes-Darcy und Brinkman Simulationen. So zeigen beide Simulationsarten Probleme bei einer sehr kleinen Wahl der Paramater ν und k, bei denen die Drucksimulationen deutliche Fehler in der Approximation liefern. Somit sind beide Verfahren problematisch für die Simulation von Strömungen durch Medien mit geringer Permeabilität, wie beispielsweise Böden aus verschiedensten Gesteinsarten.
Zusätzlich gibt es für die Brinkman Simulation Probleme bei der Simulation trigonometrischer Druckfelder, die für die Stokes-Darcy Simulation nicht auftreten. Für polynomielle Geschwindigkeitsfelder bieten jedoch beide Simulationen ein identisches Fehlerverhalten, was auf die Approximation mit Finiten Elementen aus dem Raum P_2 zurückzuführen ist.
Beide Simulationen bieten ein Fehlerverhalten, das in der Fläche unabhängig vom Verfeinerungsgrad r ist. Somit kann die Auflösung entsprechend des benötigten Detailgrads angepasst werden, ohne einen signifikanten Anstiegs des Fehlers in der Fläche befürchten zu müssen.
Weitere Möglichkeiten, die Approximation zu optimieren, wären die Anpassung der springenden Koeffizienten σ und μ_{eff} in der Brinkman Simulation oder die Nutzung der Robin-Robin Formulierung für die Stokes-Darcy, wie in [21, Abschnitt 8.4] gesehen.

A Appendix 1 - Funktionalanalytische Grundlagen

Dieser Abschnitt soll die notwendigen Grundlagen aus dem Bereich der Funktionalanalysis darstellen, die für Finite Elemente Methoden benötigt werden. Die verwendeten Funktionenräume werden definiert, grundlegende Abschätzungen präsentiert und ein kurzer Überblick über die Lösungstheorie linearer Probleme gegeben.

Funktionenräume

Definition A.1 ($\mathcal{L}^p$ und L^p-Räume)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty)$, Σ die σ-Algebra der Borelmengen und λ das Lebesguemaß. Der Funktionenraum $\mathcal{L}^p(\Omega)$ wird definiert als

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \text{ messbar}, \int_\Omega |f(x)|^p d\lambda < \infty \right\}.$$

Für $p = \infty$ wird der Raum $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ definiert als

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \text{ messbar}, \exists N \in \Sigma, \lambda(N) = 0\colon f|_{\Omega \setminus N} = 0 \right\}.$$

Mithilfe der Menge

$$\mathcal{N}(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\colon \int_\Omega |f(x)| d\lambda = 0 \right\}$$

kann der Raum $L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty]$ durch

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$$

definiert werden. Ein weiterer Funktionenraum kann durch

$$L^p_0(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega)\colon \int_\Omega f(x) d\lambda = 0 \right\}$$

definiert werden.

Im Bereich der Finiten Elemente Methoden ist vor allem der Raum $L^2(\Omega)$ von Interesse. Dieser hat die Eigenschaft, dass er ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

und der induzierten Norm

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} := (v, v)^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

einen Hilbertraum bildet. Von weiterem Interesse ist der Teilraum $L^2_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ der L^2-Funktionen, deren Integral verschwindet,

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega)\colon \int_\Omega v(x) dx = 0 \right\}.$$

Weiterhin wird auf dem Rand $\Gamma = \delta\Omega$ des Gebiets durch

$$\langle u, v\rangle_\Gamma := \int_\Gamma u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

eine Bilinearform definiert. Ein weiterer Unterraum des $L^2(\Omega)$ ist der Raum der Testfunktionen.

Definition A.2 (Testfunktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Die Elemente des Raums

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega)\colon \operatorname{supp}(\varphi) \text{ ist kompakt}\}$$

werden Testfunktionen genannt.

Testfunktionen werden genutzt, um eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs zu definieren. Dieser erlaubt es, Ableitungen für Funktionen zu definieren, die nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind.

Definition A.3 (Schwache Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, α ein Multiindex und $f \in L^2(\Omega)$. $g \in L^2(\Omega)$ wird schwache oder verallgemeinerte α-te Ableitung von f genannt, falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt, dass

$$\langle g, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\varphi\rangle$$

gilt.

Definition A.4 (Sobolev-Räume)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$. Der Sobolevraum $H^k(\Omega)$ beinhaltet die $L^2(\Omega)$-Funktionen, für die die ersten k schwachen Ableitungen ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegen, also

$$H^k(\Omega) := \left\{v \in L^2(\Omega)\colon D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall|\alpha| \leqslant k\right\}.$$

Ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha v(\mathbf{x})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und dem inneren Produkt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leqslant k}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

bilden die Sobolev-Räume $H^k(\Omega)$ Hilberträume. Außerdem wird auf $H^k(\Omega)$ die Halbnorm

$$|v|_{H^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert.

Da Sobolev-Funktionen $v \in H^1(\Omega)$ formal Äquivalenzklassen von Funktionen sind, ist die Einschränkung $v|_\Gamma$ auf den Rand von Ω abhängig vom gewählten Repräsentanten. Deswegen muss ein äquivalentes Konstrukt für den Raum $H^1(\Omega)$ definiert werden.

Theorem A.1: Spuroperator

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\Gamma \subset \delta\Omega$ eine relativ offene Teilmenge des Rands. Weiterhin sei Γ selbst Lipschitz, dann existiert ein Operator

$$T_\Gamma \colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma),$$

so dass für $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$

$$Tu = u|_{\delta\Omega}$$

und für alle $u \in H^1(\Omega)$

$$\|Tu\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Der Operator T wird Spuroperator genannt. Der Einfachheit halber schreibt man $Tu = u|_{\delta\Omega}$.

Theorem A.2: Erweiterung auf $W^{s,p}(\delta\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und $\Gamma \subset \delta\Omega$ eine relativ offene Teilmenge des Rands. Weiterhin sei Γ selbst Lipschitz und $s \in [0,1)$. Dann existiert ein linearer, stetiger Erweiterungsoperator $E \colon W^{s,p}(\Gamma) \to W^{s,p}(\delta\Omega)$, es gilt also für alle $u \in W^{s,p}(\Gamma)$, dass $Eu(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Die Erweiterung E_Γ ist die Rechtsinverse des Spuroperators T_Γ.
Mithilfe des Spuroperators können nun weitere Teilräume des $H^1(\Omega)$ definiert werden, die bei der Betrachtung partieller Differentialgleichungen von Interesse sind.

Definition A.5 (H^1_0, H^{div} und H^{div}_0)
Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Der Unterraum $H^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ beinhaltet die H^1-Funktionen auf Ω, die auf dem Rand Γ im Spursinn verschwinden

$$H^1_0(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \colon v|_\Gamma = 0 \right\}.$$

Weiterhin enthält der Teilraum $H^{\mathrm{div}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ die L^2-Funktionen auf Ω, deren Divergenz ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegt

$$H^{\mathrm{div}}(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \colon \nabla \cdot v \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_{H^{\mathrm{div}}(\Omega)} := \left(\|\nabla \cdot v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und dem inneren Produkt

$$(u,v)_{H^{\mathrm{div}}(\Omega)} := (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)_{L^2(\Omega)} + (u,v)_{L^2(\Omega)}$$

bildet $H^{\mathrm{div}}(\Omega)$ einen Hilbertraum. Auf dem Raum $H^{\mathrm{div}}(\Omega)$ lässt sich analog zu $H^1(\Omega)$ ein Spuroperator definieren, so dass der Ausdruck $(\nabla \cdot v)|_\Gamma$ für Funktionen $v \in H^{\mathrm{div}}(\Omega)$ wohldefiniert ist und der Raum

$$H^{\mathrm{div}}_0(\Omega) := \left\{ v \in H^{\mathrm{div}}(\Omega) \colon (\nabla \cdot v)|_\Gamma = 0 \right\}$$

definiert werden kann.

Auf den definierten Vektorräumen können Funktionale definiert werden. Die Menge der Funktionale bildet ebenso wieder einen Vektorraum.

Definition A.6 (Dualraum, duale Paarung)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Der Dualraum V' von V wird definiert durch

$$V' := \{f\colon V \to \mathbb{K}\colon f \text{ linear}\}.$$

Die Elemente von V' werden Funktionale, Linearformen oder 1-Formen genannt. Die Auswertung eines linearen Funktionals $\phi \in V'$ auf einem Vektor $v \in V$ wird durch die duale Paarung

$$\phi(v) =: [\phi, v]_{V',V}$$

beschrieben. Auf dem Dualraum V' wird durch den Ausdruck

$$\|\phi\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{[\phi, v]_{V',V}}{\|v\|_V}$$

eine Norm definiert.

Der Dualraum des Raums $H_0^1(\Omega)$ wird mit $H^{-1}(\Omega) := \left(H_0^1(\Omega)\right)'$ bezeichnet.

Lösungstheorie

Dieser Abschnitt soll einige Ergebnisse präsentieren, die die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung abstrakter Probleme sichern. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für ein wohldefiniertes Problem gegeben.
Hierfür werden die beiden reellen Hilberträume $\left(Q, \|\cdot\|_Q, (\cdot,\cdot)_Q\right)$ und $\left(V, \|\cdot\|_V, (\cdot,\cdot)_V\right)$ betrachtet. Die entsprechenden Dualräume werden mit Q' und V' bezeichnet und sind mit den Normen

$$\|\psi\|_{Q'} := \sup_{q \in Q \setminus \{0\}} \frac{[\psi, q]_{Q',Q}}{\|q\|_Q}$$
$$\|\phi\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{[\phi, v]_{V',V}}{\|v\|_V}$$

mit $\phi \in V$ und $\psi \in Q$ ausgestattet.

Definition A.7 (Stetigkeit)
Eine Bilinearform $b(\cdot,\cdot)\colon V \times Q \to \mathbb{R}$ wird stetig oder beschränkt genannt, falls ein $M > 0$ exisitiert, so dass für alle $(v, q) \in V \times Q$ gilt:

$$|b(v, q)| \leqslant M\|v\|_V\|q\|_Q.$$

Für die Theorie der Lösbarkeit abstrakter Operatorgleichungen werden Probleme der Form:

Problem A.1

Finde zu $a(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}, b(\cdot,\cdot)\colon V \times Q \to \mathbb{R}, f \in V', g \in Q'$ $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$, so dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V \times Q$ gilt:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) &= [f, \boldsymbol{v}]_{V',V} \\ b(\mathbf{u}, q) &= [g, q]_{Q',Q} \end{aligned}$$

betrachtet. Eine alternative Darstellungsform wird durch die Definition der Operatoren

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{L}\big(V, V'\big) \\ &\langle A\mathbf{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a(\mathbf{u}, \boldsymbol{v}) \\ B &\in \mathcal{L}\big(V, Q'\big) \\ &\langle B\mathbf{u}, q\rangle = b(\mathbf{u}, q) \end{aligned}$$

erzielt. Das Problem A.2 kann hiermit als

Problem A.2

Finde zu $A \in \mathcal{L}(V, V'), B \in \mathcal{L}(V, Q'), f \in V', g \in Q'$ $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$, so dass für alle $\boldsymbol{v}, q \in V \times Q$ gilt:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} + B'p &= f \\ B\mathbf{u} &= g \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Definition A.8 (Wohldefiniertheit)
Eine Problem der Form A.2 wird als wohldefiniert genannt, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} \Xi\colon V \times Q &\to V' \times Q' \\ (v, q) &\mapsto \begin{pmatrix} Av + B'q \\ Bv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $V \times Q$ nach $V' \times Q'$ ist.

Theorem A.3: Satz von Lax Milgram

Sei $b(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, koerzitive Bilinearform auf dem Hilbertraum V. Dann existiert für jedes $f \in V'$ genau ein $u \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$b(u, v) = f(v).$$

Beweis. Siehe [13, Theorem B.4]. □

Theorem A.4

Das Problem A.2 ist genau dann wohldefiniert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. die Bilinearformen a und b sind stetig,

II. die Verknüpfung $E_0 \circ A \colon V_0 := \ker(B) \to V_0'$ ist ein Isomorphismus,

III. die Bilinearform $b(\cdot,\cdot) \colon V \times Q \to \mathbb{R}$ erfüllt für eine Konstante $\beta > 0$ die $\inf - \sup$-Bedingung (A.1).

Beweis. Siehe [13, Theorem 3.18]. □

Theorem A.5: Brezzi Splitting Theorem

Es sei $V_0 = \ker(B)$ und $a(\cdot,\cdot)$ eine V_0-elliptische, stetige Bilinearform, es gibt also eine Konstante $\alpha > 0$ so dass für alle $v \in V$ gilt

$$a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|_V^2.$$

Dann ist A.2 genau dann wohldefiniert, wenn die Bilinearform b stetig ist und für eine Konstante $\beta > 0$ die $\inf - \sup$-Bedingung

$$\inf_{q \in Q \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geqslant \beta \tag{A.1}$$

erfüllt.

Beweis. Zum Beweis des Theorems wird mithilfe von Theorem A.4 geführt.
Sei nun $f \in V_0'$ beliebig. Dann existiert nach dem Satz von Lax Milgram ein $u \in V_0$, so dass für alle $v \in V_0$ gilt

$$a(u,v) = [f,v]_{V_0',V_0}$$

oder anders formuliert, existiert ein $u \in V_0$, so dass

$$E_0 \circ Au = f.$$

Da $f \in V_0'$ beliebig gewählt ist, ist $E_0 \circ A$ surjektiv auf V_0. Sei nun $u \in V_0$ mit $E_0 \circ Au = 0$. Nach der Definition von E_0 gilt für alle $v \in V_0$

$$0 = [E_0 \circ Au, v]_{V_0',V_0} = [Au, v]_{V',V}$$

und somit insbesondere

$$[Au, u]_{V',V} = a(u,u) = 0.$$

Da a V_0-elliptisch ist, folgt $u = 0$ und $E_0 \circ A$ ist injektiv. Somit ist $E_0 \circ A$ ein Isomorphismus und das Lemma gewährleistet die Wohldefiniertheit von Problem A.2.
Die Gegenrichtung folgt direkt aus dem Lemma, da die V_0-Elliptizität ein Spezialfall der ersten Bedingung im Lemma ist und die $\inf - \sup$-Bedingung erhalten bleibt. □

B Appendix 2 - Weitere Daten

B.1 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.1

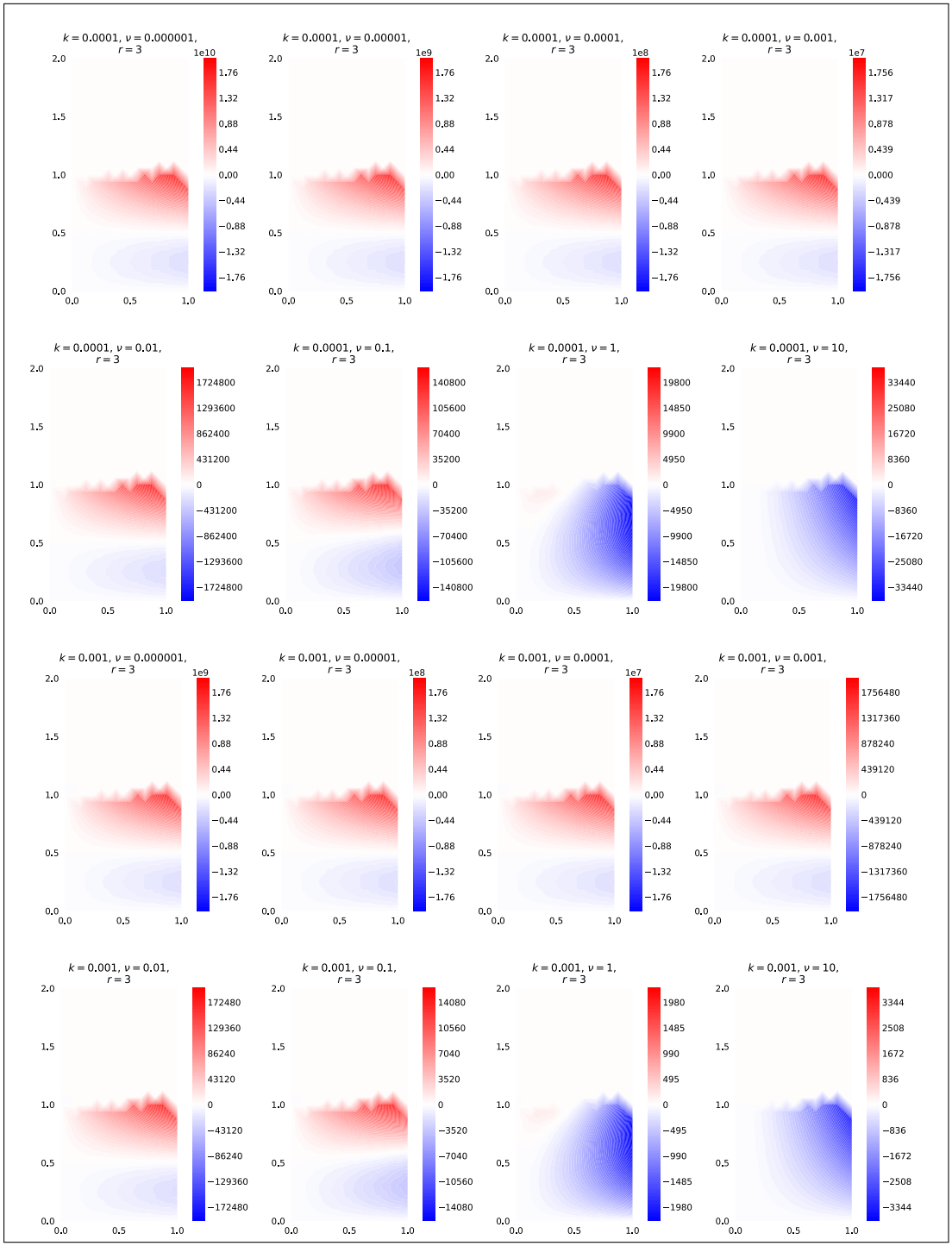

Abbildung 25: Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1

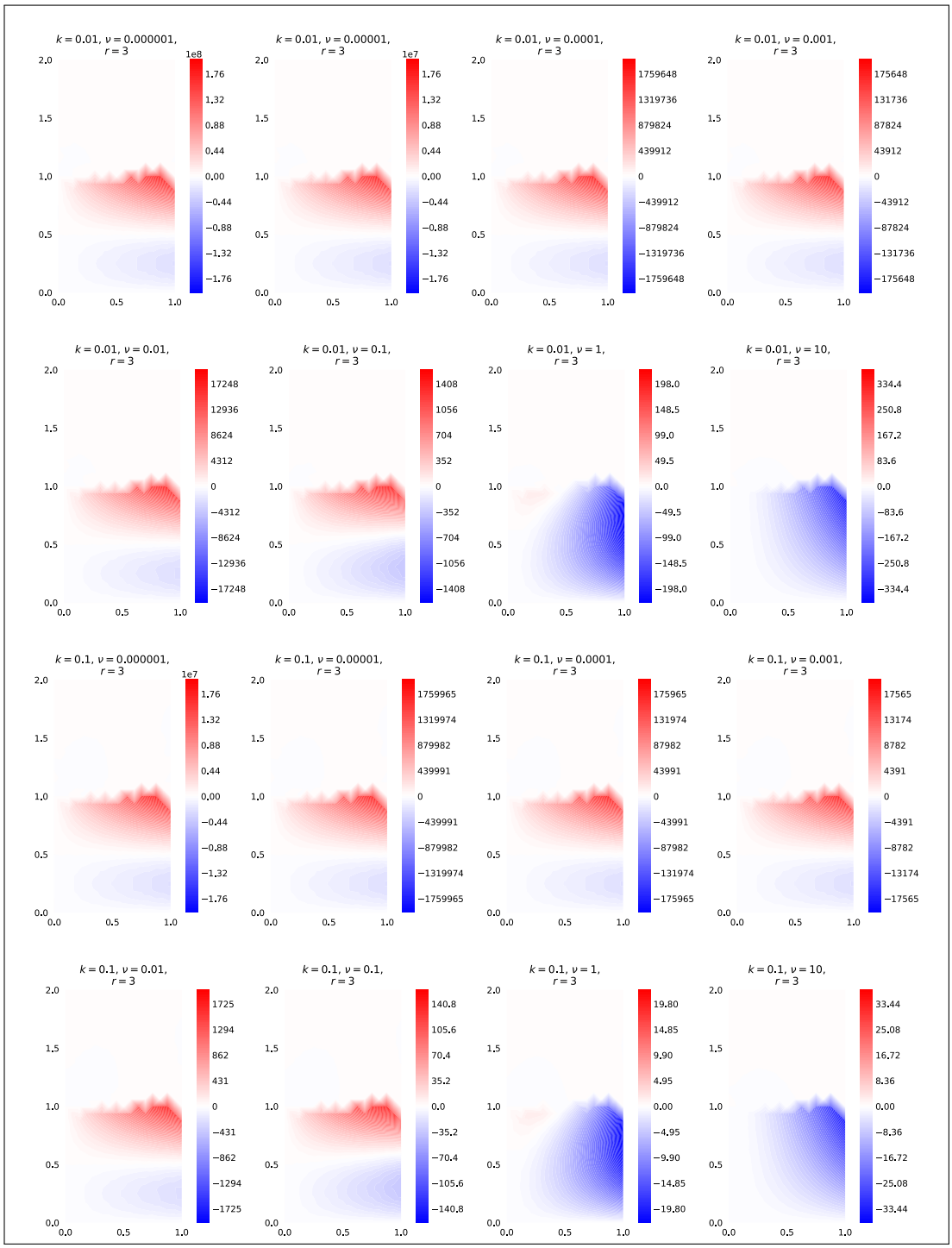

Abbildung 26: Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1

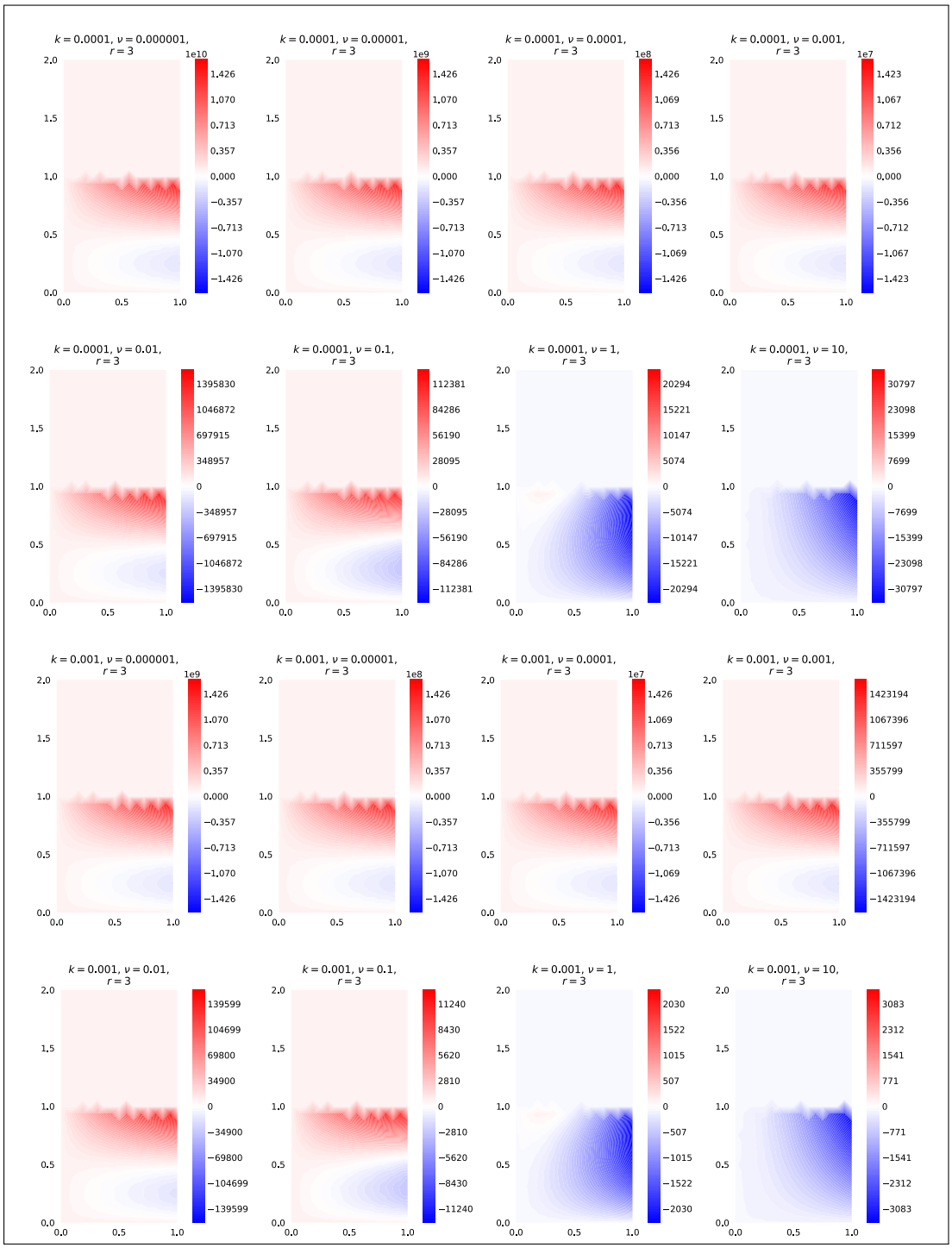

Abbildung 27: Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1

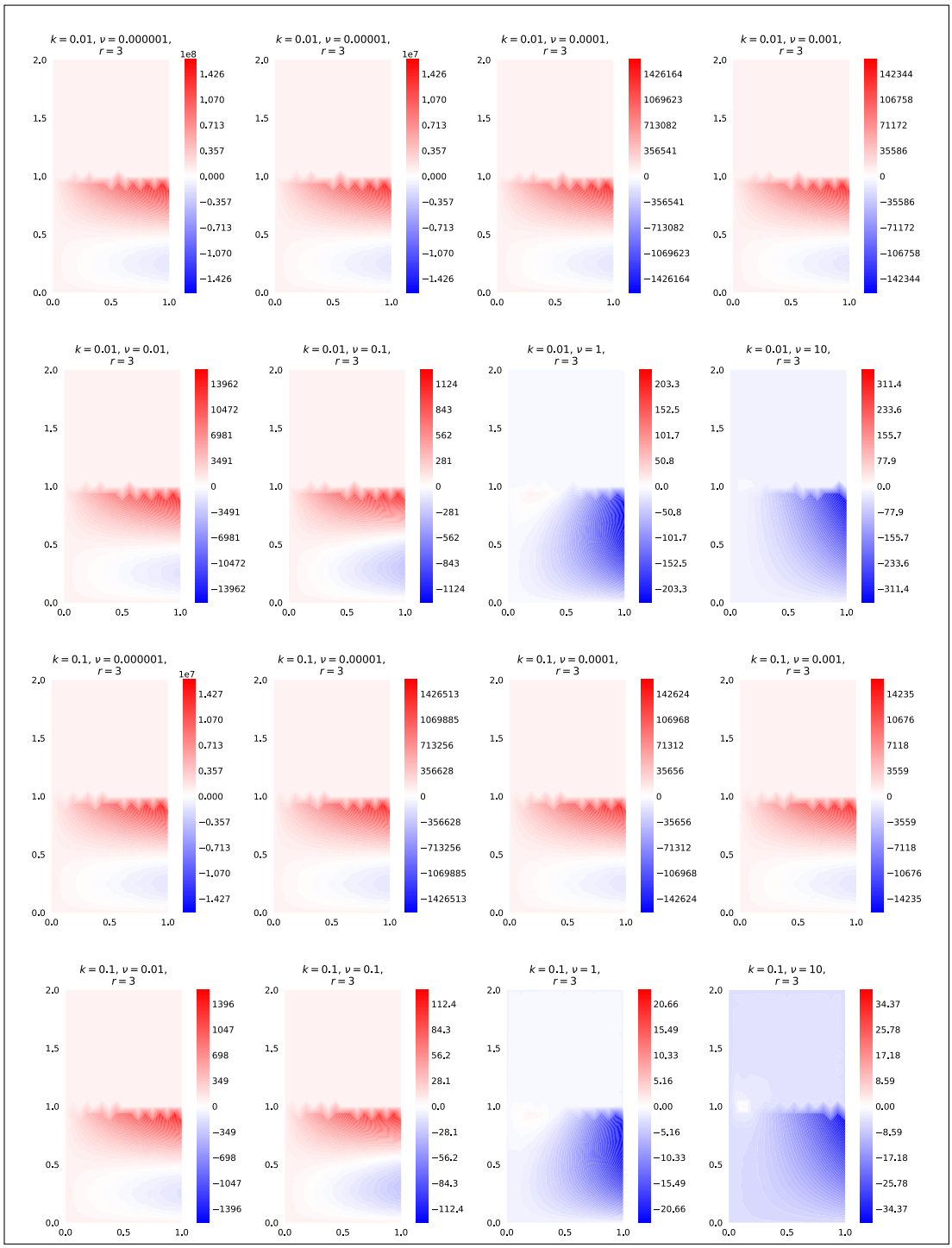

Abbildung 28: Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 1

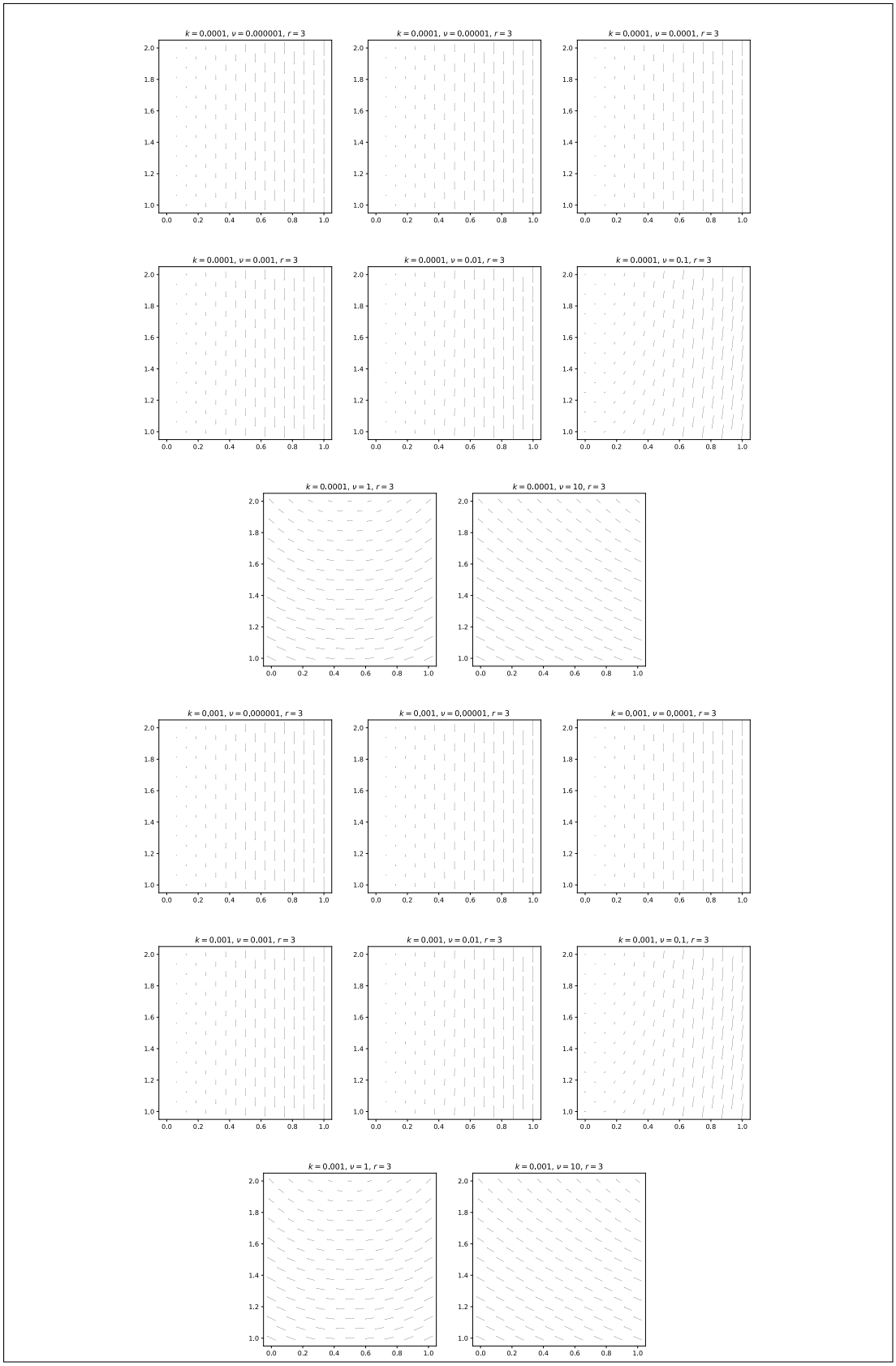

Abbildung 29: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1

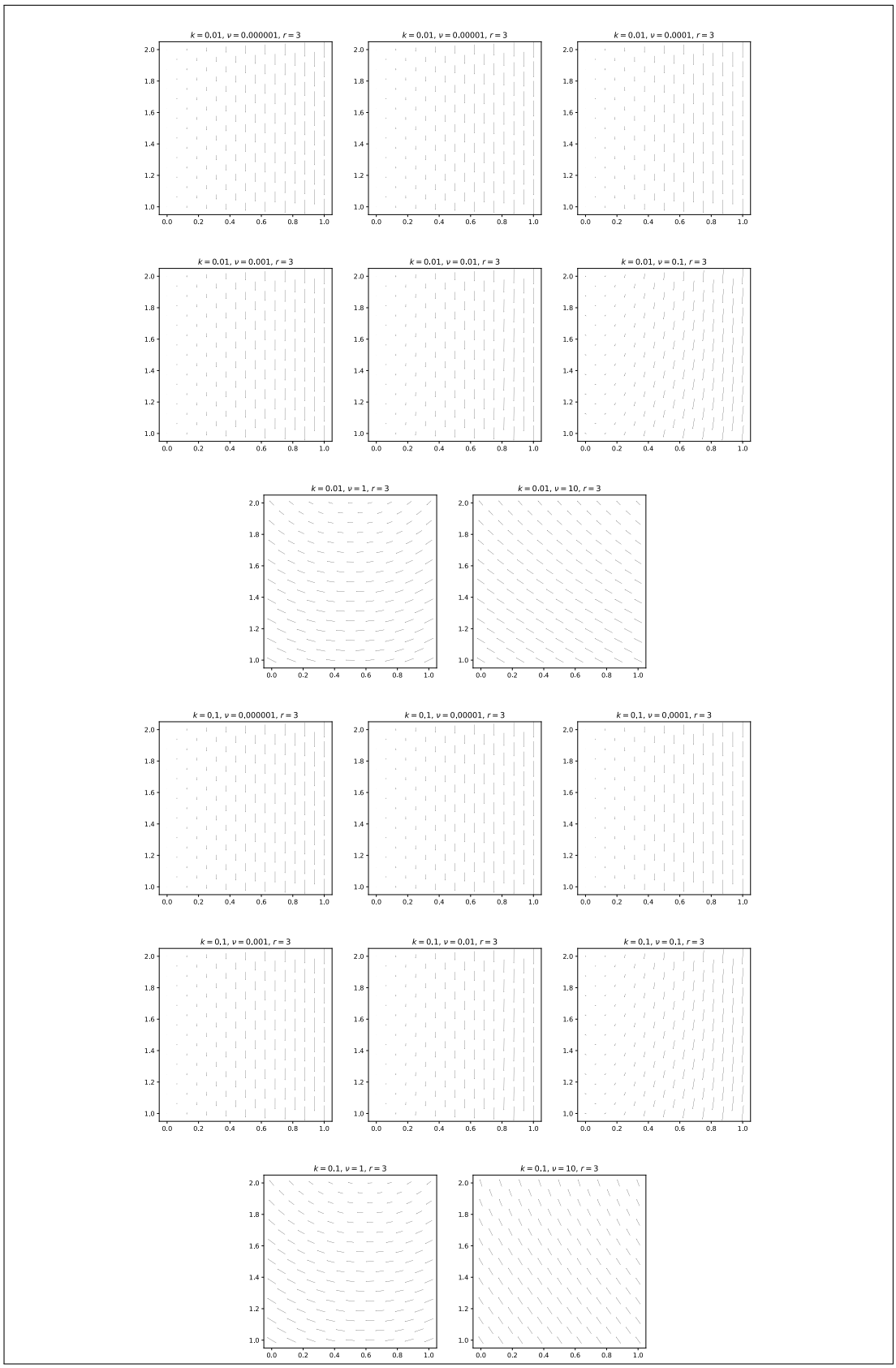

Abbildung 30: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 1

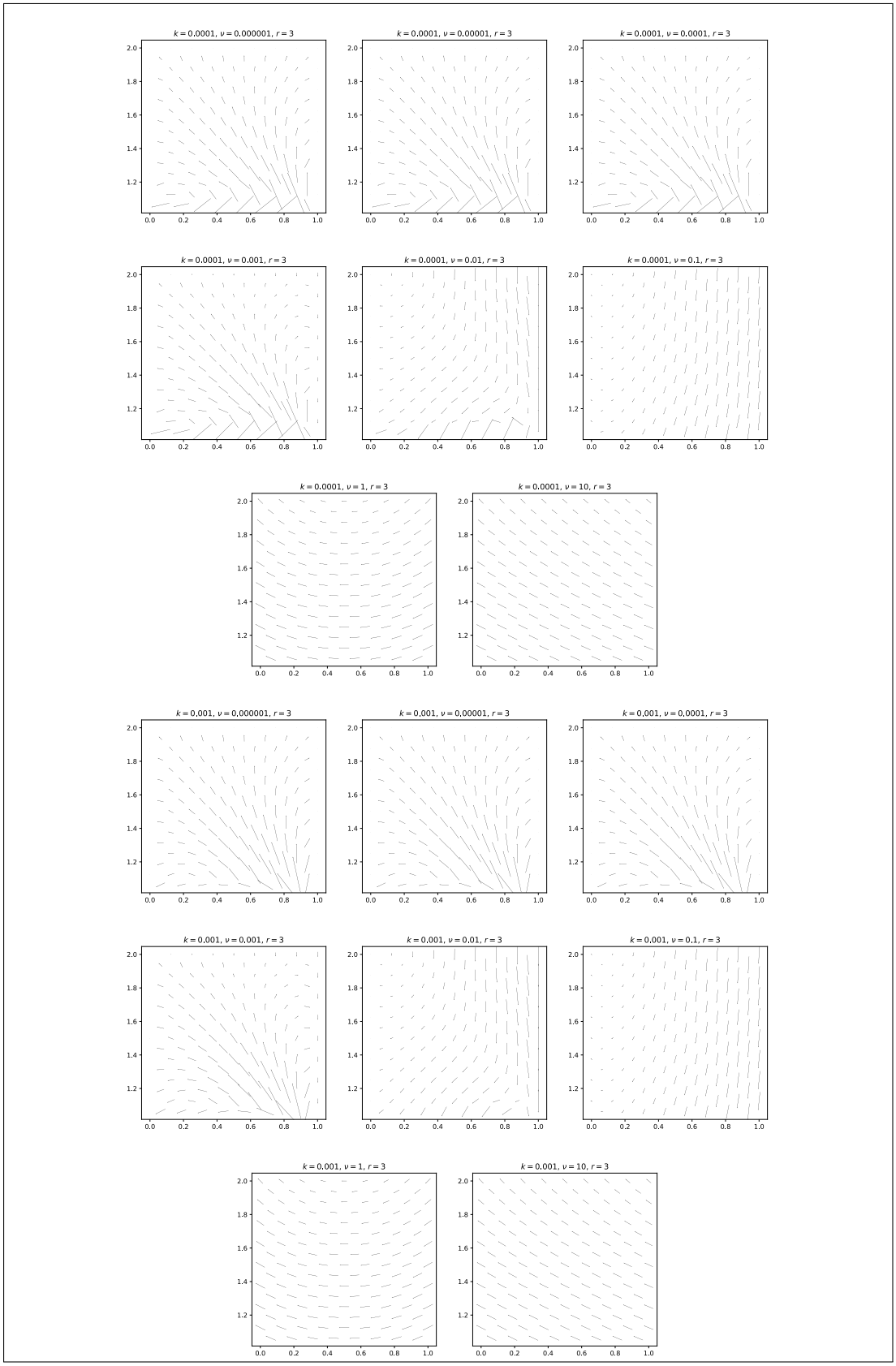

Abbildung 31: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 1

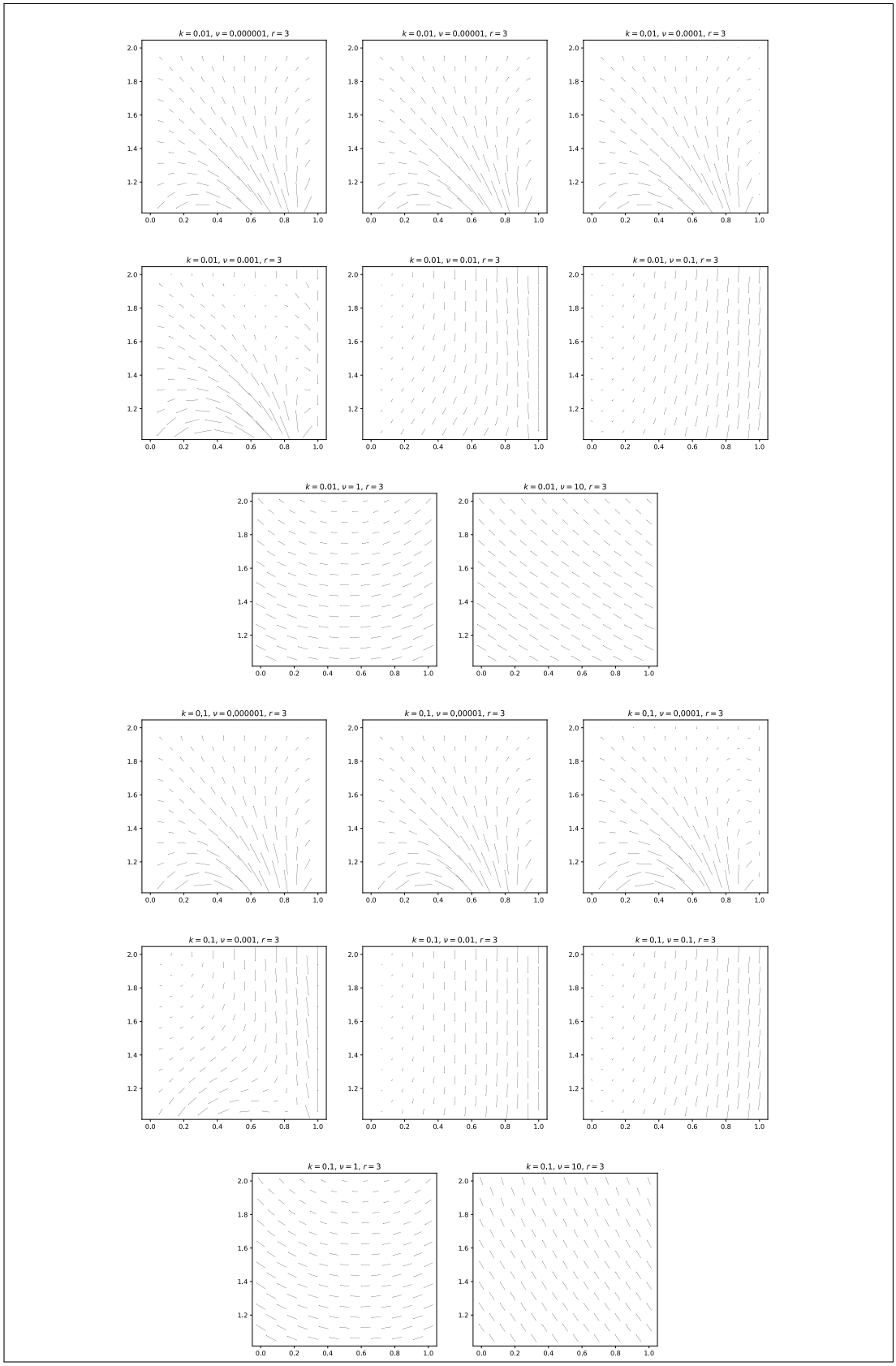

Abbildung 32: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 1

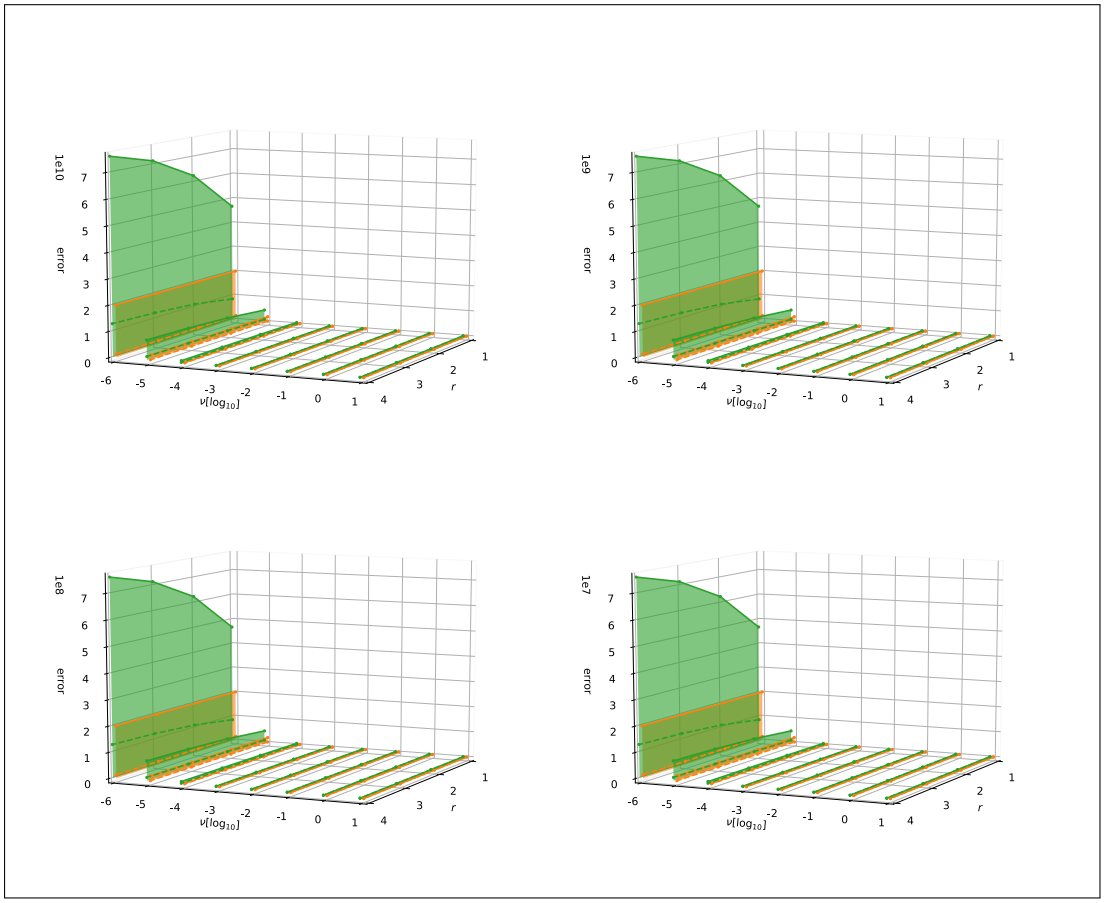

Abbildung 33: Maximaler (durchgezogene Linie) und durchschnittlicher Fehler (gestrichelte Linie) der Stokes-Darcy, orange, und Brinkman Simulation, grün, für Beispiel 1 in Abhängigkeit von r ($k = 3$)

B.2 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.2

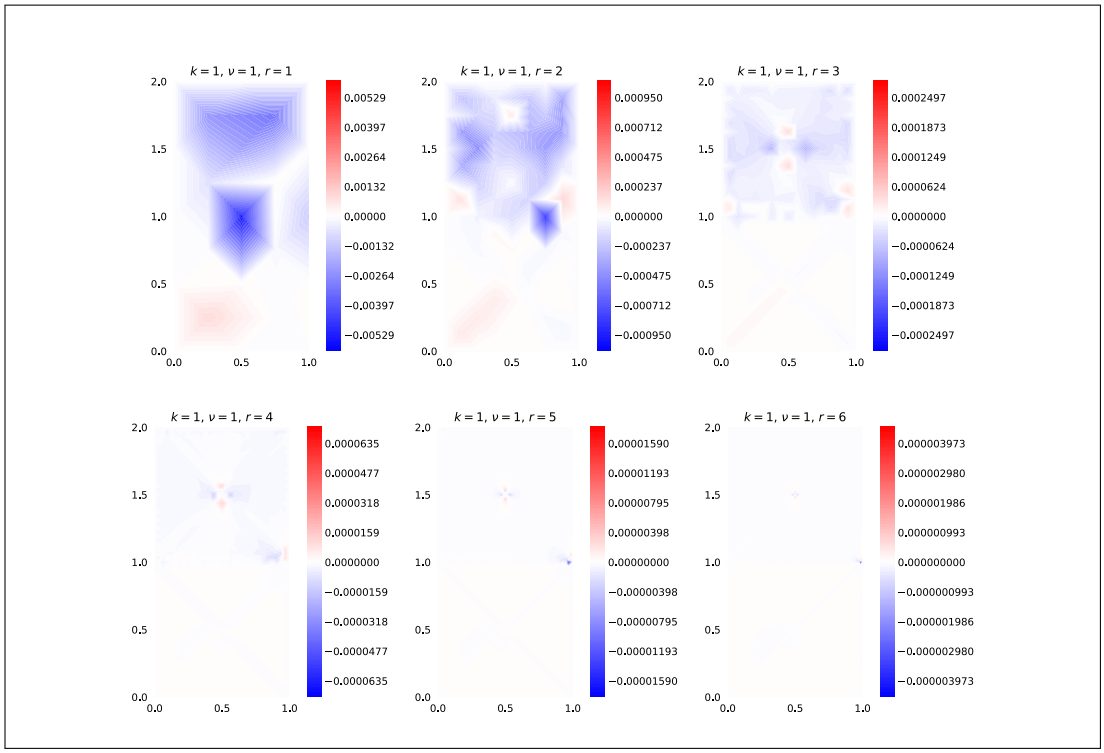

Abbildung 34: Weitere Plots von $(p_{err}, \varphi_{err})^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 2

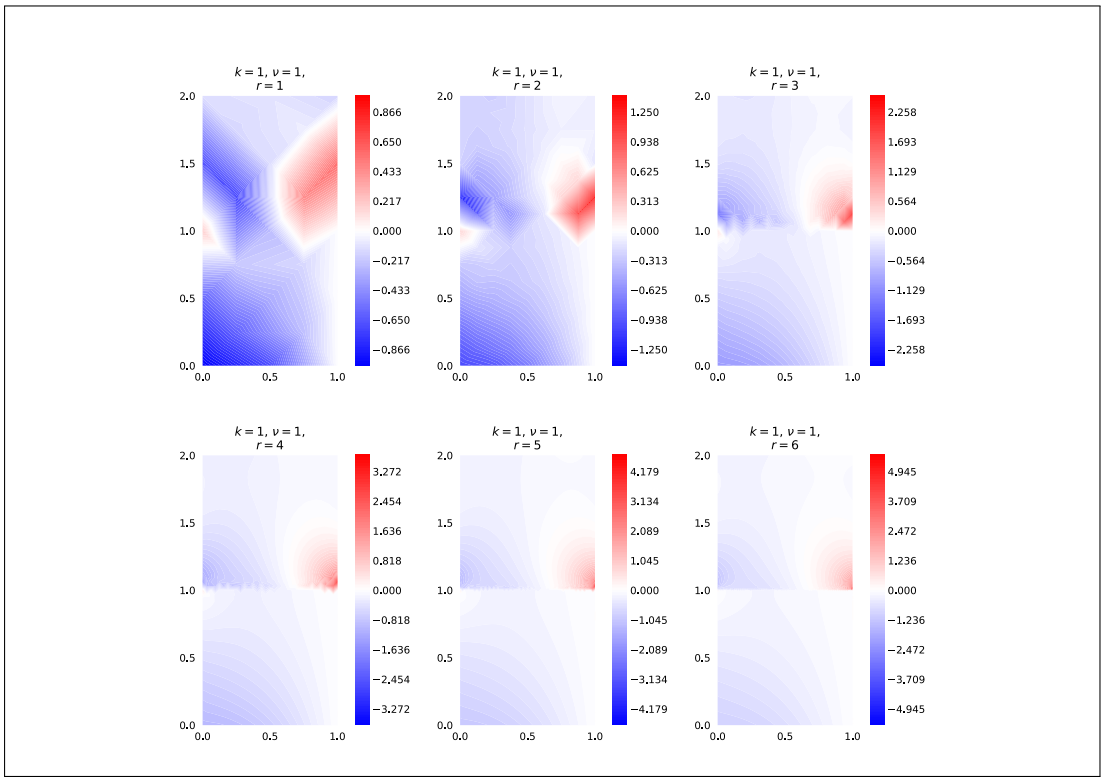

Abbildung 35: Weitere Plots von p_{err} für die Brinkman Simulation von Beispiel 2

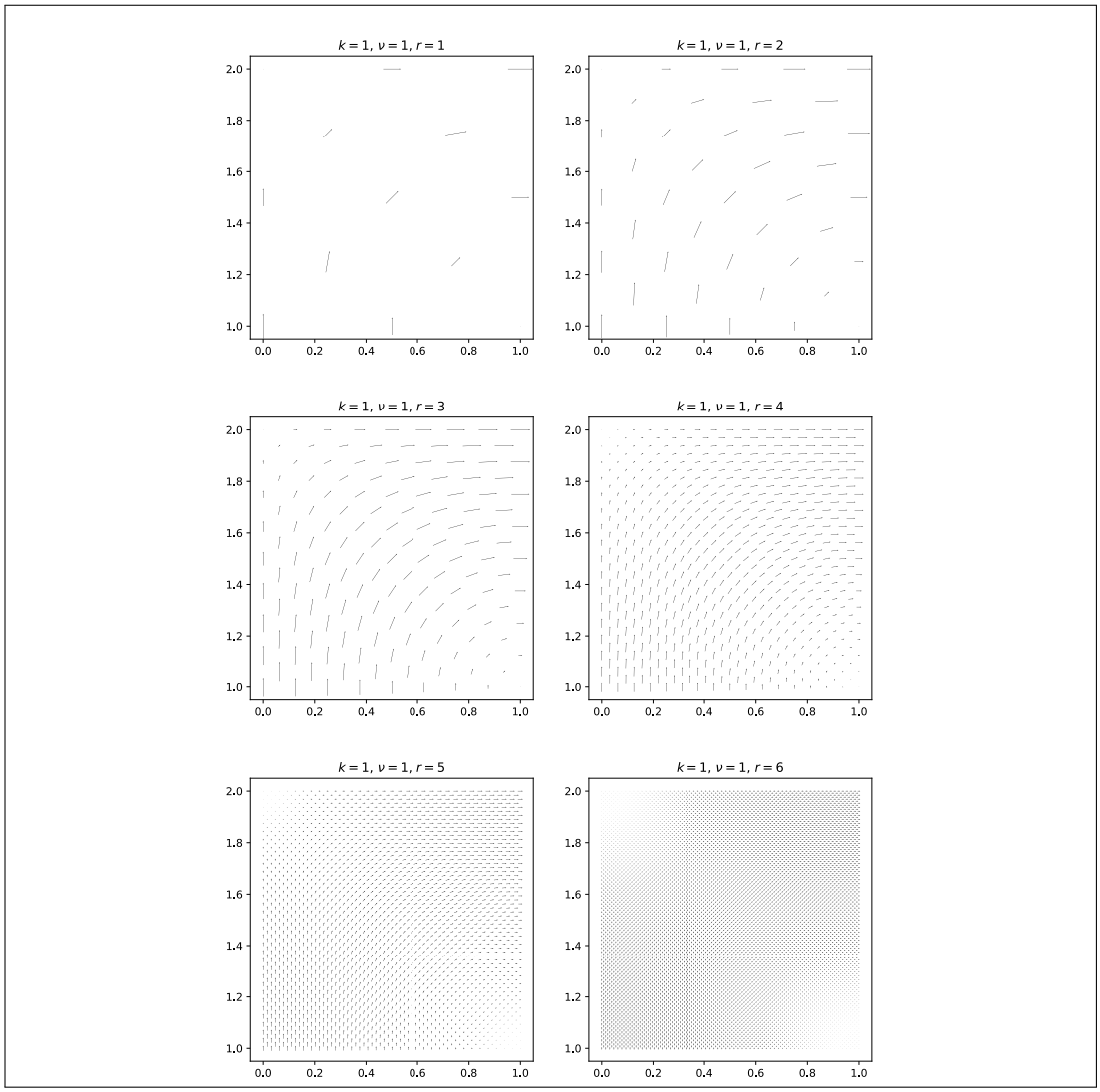

Abbildung 36: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 2

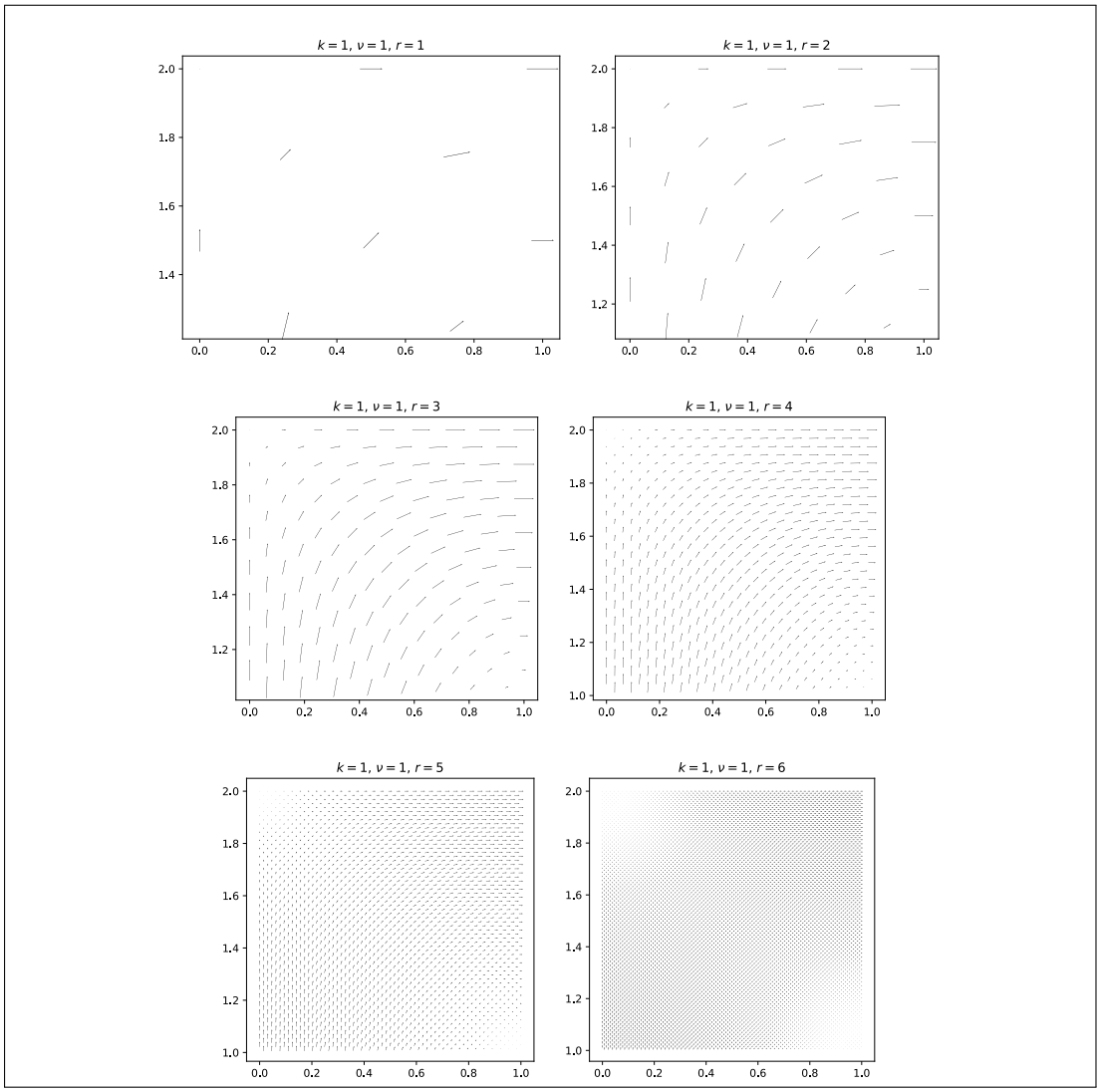

Abbildung 37: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 2

B.3 Weitere Daten zu Abschnitt 4.3.3

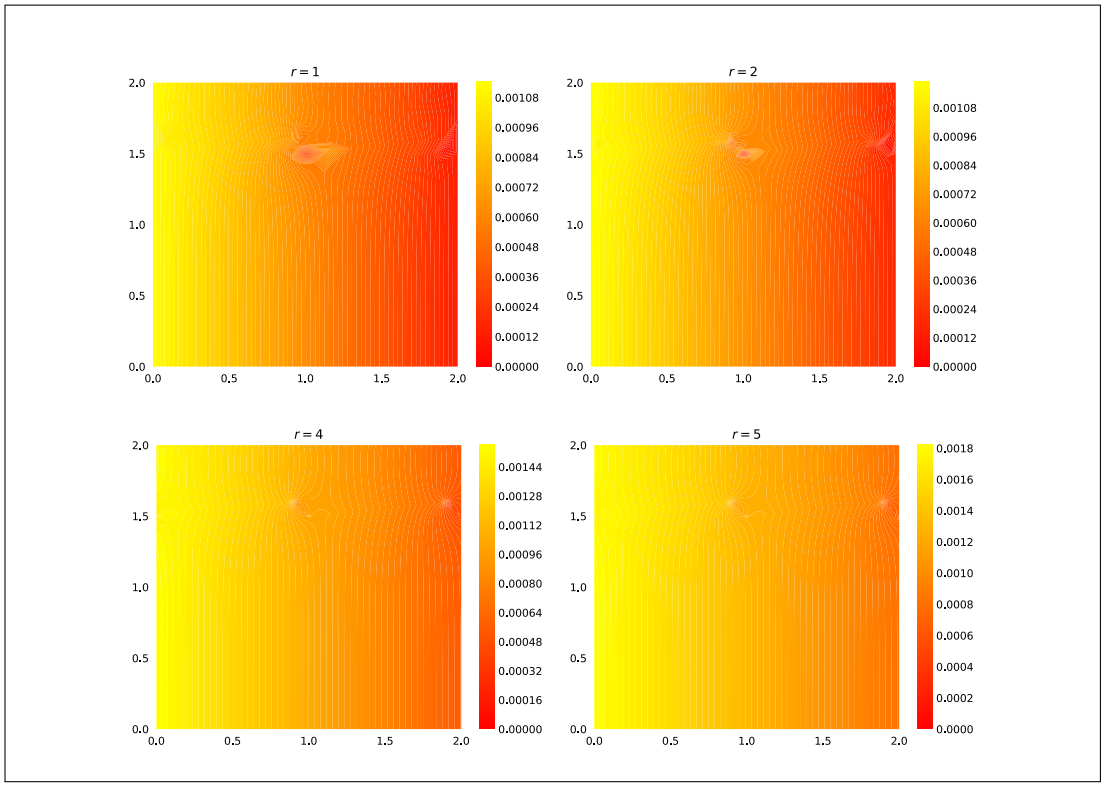

Abbildung 38: Weitere Plots von $(p, \varphi)^T$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 3

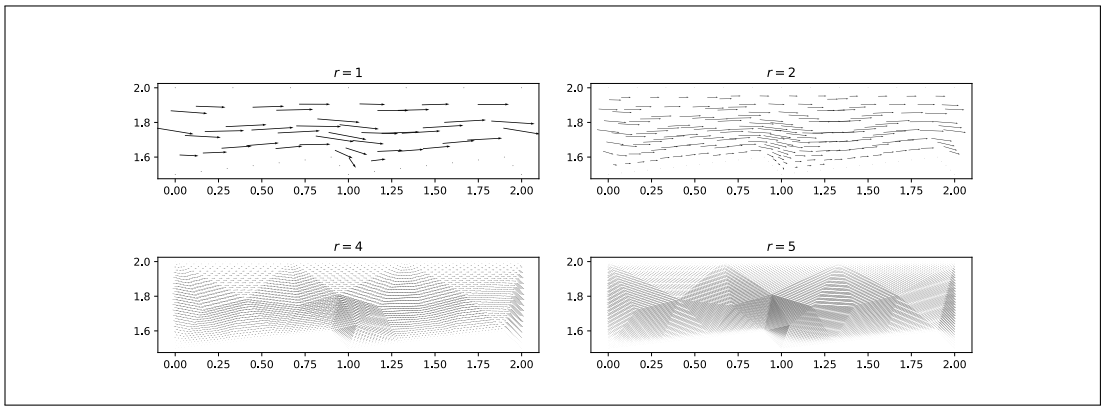

Abbildung 39: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Stokes-Darcy Simulation von Beispiel 3

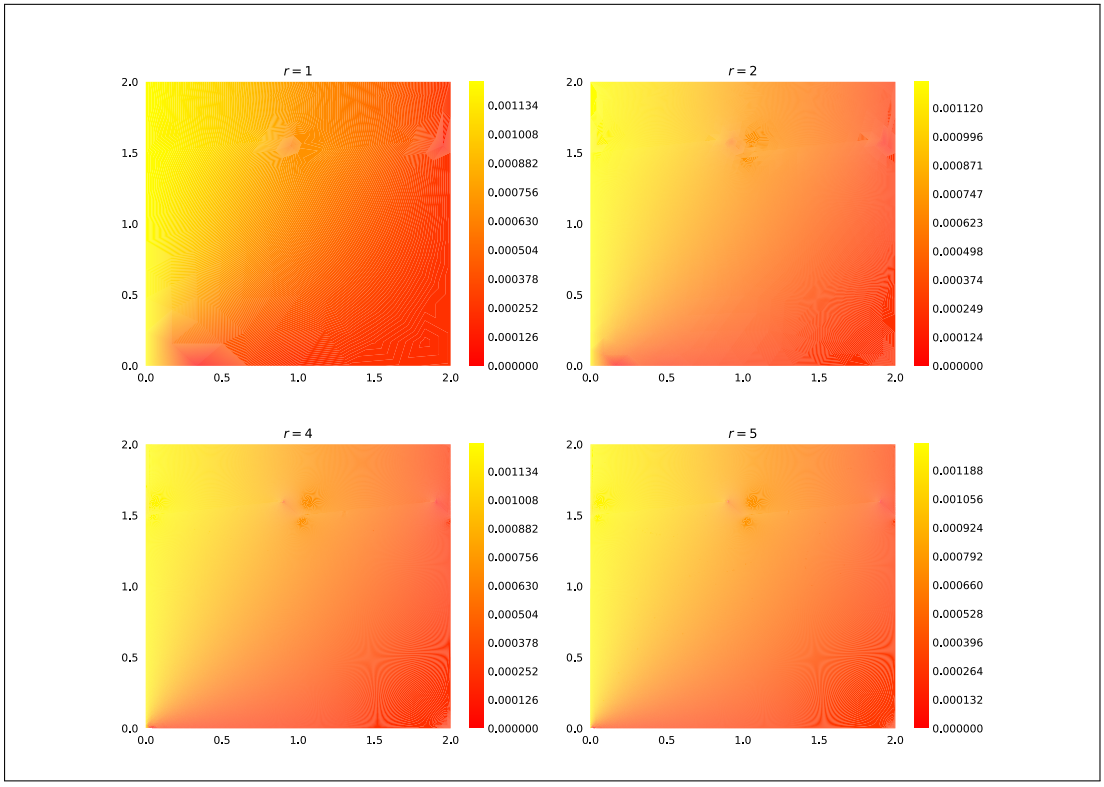

Abbildung 40: Weitere Plots von p für die Brinkman Simulation von Beispiel 3

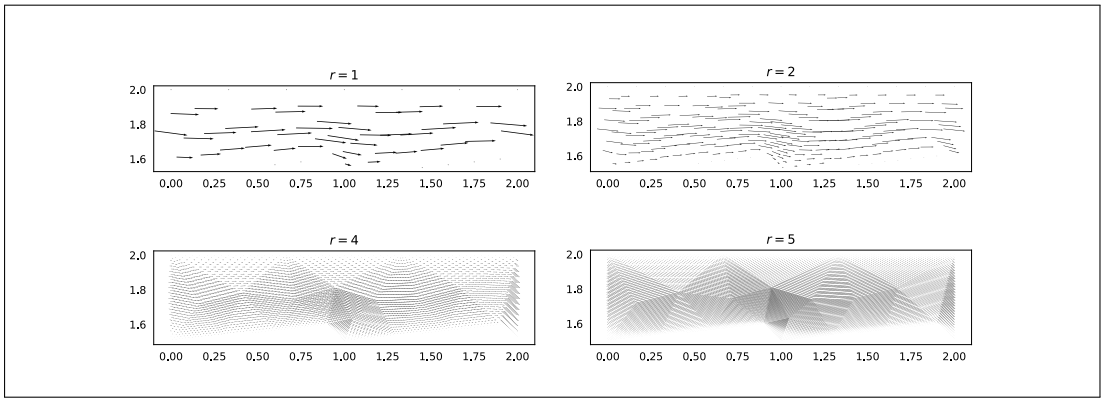

Abbildung 41: Weitere Plots von $\mathbf{u}$ für die Brinkman Simulation von Beispiel 3

Literaturverzeichnis

[1] Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media -*, Revised. New York: Courier Corporation, 1988, isbn: 978-0-486-65675-5.

[2] Beavers, G. S. und Joseph, D. D., „Boundary conditions at a naturally permeable wall“, *Journal of Fluid Mechanics*, Jg. 30, Nr. 1, S. 197–207, Okt. 1967. doi: 10.1017/s0022112067001375.

[3] Blank, L. C., „Stabilized Finite Element Methods for Porous Media Flow Analysis and Application“, Diss., Freie Universität Berlin, 2019.

[4] Brinkman, H. C., „A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles“, *Flow, Turbulence and Combustion*, Jg. 1, Nr. 1, Dez. 1949. doi: 10.1007/bf02120313.

[5] Caiazzo, A.; John, V. und Wilbrandt, U., „On classical iterative subdomain methods for the Stokes–Darcy problem“, *Computational Geosciences*, Jg. 18, Nr. 5, S. 711–728, Apr. 2014. doi: 10.1007/s10596-014-9418-y.

[6] Cardenas, M. B. und Wilson, J., „Hydrodynamics of coupled flow above and below a sediment–water interface with triangular bedforms“, *Advances in Water Resources*, Jg. 30, Nr. 3, S. 301–313, März 2007. doi: 10.1016/j.advwatres.2006.06.009.

[7] Carman, P. C., *Flow of gases through porous media*. Academic Press Inc., New York; Butterworths Scientific Publications, London, 1956, S. ix+182.

[8] Chen, W.; Gunzburger, M.; Hua, F. und Wang, X., „A parallel Robin-Robin domain decomposition method for the Stokes-Darcy system“, *SIAM J. Numer. Anal.*, Jg. 49, Nr. 3, S. 1064–1084, 2011, issn: 0036-1429. doi: 10.1137/080740556.

[9] Darcy, H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, 1856.

[10] Discacciati, M. und Quarteroni, A., „Navier-Stokes/darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation“, *Revista Matemática Complutense*, Jg. 22, Nr. 2, 27. Juli 2009, issn: 1988-2807, 1139-1138. doi: 10.5209/rev_REMA.2009.v22.n2.16263.

[11] Discacciati, M.; Quarteroni, A. und Valli, A., „Robin-Robin domain decomposition methods for the Stokes-Darcy coupling“, *SIAM J. Numer. Anal.*, Jg. 45, Nr. 3, S. 1246–1268, 2007, issn: 0036-1429. doi: 10.1137/06065091X.

[12] Ern, A. und Guermond, J.-L., *Theory and practice of finite elements*, Ser. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2004, Bd. 159, S. xiv+524, isbn: 0-387-20574-8. doi: 10.1007/978-1-4757-4355-5.

[13] John, V., *Finite element methods for incompressible flow problems*, Ser. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Cham, 2016, Bd. 51, S. xiii+812, isbn: 978-3-319-45750-5. doi: 10.1007/978-3-319-45750-5.

[14] Layton, W. J.; Schieweck, F. und Yotov, I., „Coupling fluid flow with porous media flow“, *SIAM J. Numer. Anal.*, Jg. 40, Nr. 6, 2195–2218 (2003), 2002, issn: 0036-1429. doi: 10.1137/S0036142901392766.

[15] Newton, I., *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963, S. ix+666, Übersetzung aus dem Lateinischen, Mit Bemerkungen und Erläuterungen von J. Ph. Wolfers, Unveränderter Nachdruck der 1872 Ausgabe.

[16] Nield, D. A. und Bejan, A., *Convection in porous media*. Springer, Cham, 2017, S. xxix+988, Fifth edition of [MR1656781], isbn: 978-3-319-49561-3.

[17] Quarteroni, A. und Valli, A., *Domain decomposition methods for partial differential equations*, Ser. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford ; New York: Clarendon Press, 1999, 360 S., isbn: 978-0-19-850178-7.

[18] Saffman, P. G., „On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium“, *Studies in Applied Mathematics*, Jg. 50, Nr. 2, S. 93–101, Juni 1971. doi: 10.1002/sapm197150293.

[19] Werner, D., *Funktionalanalysis*, extended. Springer-Verlag, Berlin, 2000, S. xii+501, isbn: 3-540-67645-7.

[20] Wesseling, P., *Principles of computational fluid dynamics*, Ser. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001, Bd. 29, S. xii+644, isbn: 3-540-67853-0. doi: 10.1007/978-3-642-05146-3.

[21] Wilbrandt, U., *Stokes-Darcy equations*, Ser. Lecture Notes in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019, S. viii+212, Analytic and numerical analysis, isbn: 978-3-030-02904-3. doi: 10.1007/978-3-030-02904-3.

[22] Wilbrandt, U.; Bartsch, C.; Ahmed, N.; Alia, N.; Anker, F.; Blank, L.; Caiazzo, A.; Ganesan, S.; Giere, S.; Matthies, G.; Meesala, R.; Shamim, A.; Venkatesan, J. und John, V., „ParMooN—A modernized program package based on mapped finite elements“, *Computers & Mathematics with Applications*, Jg. 74, Nr. 1, S. 74–88, Juli 2017, issn: 08981221. doi: 10.1016/j.camwa.2016.12.020.