Isogeometrische Analysis für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Georg Jannis Bulling 21. September 2015

Masterarbeit

Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

Betreuer: Prof. Dr. Volker John

Inhaltsverzeichnis

1	Ein	leitung	1
2	Pro	blemstellung	3
	2.1	Navier-Stokes-Gleichungen	. 3
		2.1.1 Klassische Formulierung	
		2.1.2 Schwache Formulierung	
		2.1.3 Allgemeine Galerkin-Methode	
	2.2	Beispiele von Gebieten, Kräften und Randwertbedingungen	
		2.2.1 Einheitsquadrat mit Wirbel	
		2.2.2 2D Strömung um einen Zylinder	
		2.2.3 Einheitswürfel	. 10
		2.2.4 3D Strömung um einen Zylinder	
	2.3	Analytische Berechnung der Kräfte	
3	Kor	nstruktion des Gebietes	15
	3.1	B-Splines	
	3.2	Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)	
		3.2.1 NURBS-Funktionen über Gewichtung	
		3.2.2 NURBS-Funktionen über homogene Koordinaten	
	3.3	Verfeinerung	. 31
		3.3.1 h-Verfeinerung	
		3.3.2 p-Verfeinerung	. 34
4	Gal	erkin-Methode der IGA	39
	4.1	Taylor-Hood-Raum	. 39
		4.1.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrix	. 41
		4.1.2 Anmerkungen zur Steifigkeitsmatrix	. 45
		4.1.3 Anmerkungen zur numerischen Lösung	. 48
		4.1.4 Konvergenzaussagen	. 49
	4.2	Berechnung der Dirichlet-Randbedingung	. 52
	4.3	Multipatch	. 54
5	Nui	merische Studien	59
	5.1	Einheitsquadrat mit Wirbel	. 59
		5.1.1 Standardquadrat	
		5.1.2 Das nicht unitäre Quadrat	
		5.1.3 Geteiltes Quadrat	
	5.2	2D Strömung um einen Zylinder	

8	Literatur	87				
7	Addendum					
U	6.1 Raviart-Thomas-Raum	81 83				
6	5.4 3D Strömung um einen Zylinder	78 81				
	5.3 Einheitswürfel mit Wirbel	76				

1 Einleitung

Die Fragestellungen von Physikern und Ingenieuren hatten immer schon einen großen Einfluss auf die angewandte Mathematik. In der heutigen Zeit schreitet die Forschung an Computermodellen weiter voran. Komplexe physikalische Problemstellungen werden auf den Computer übertragen und simuliert. Diese Simulationen werden hauptsächlich angewandt, um die Kosten einer aufwendigen Versuchsreihe zu sparen oder weil die Fragestellung an sich kaum eine direkte Messung zulässt.

Einige dieser komplexen physikalischen Problemstellungen sind aus den Feldern der Aerodynamik, Hydrodynamik oder auch Meteorologie. In diesen Bereichen geht es häufig um das Geschwindigkeitsfeld, also die Strömung, oder um den Druck von Fluiden, zum Beispiel Wasser, Luft oder feiner Sand. Für die Simulation muss zunächst ein geeignetes physikalisches Modell in Form von Gleichungssystemen gefunden werden. Eines der bedeutendsten Gleichungssysteme für die eben genannten Felder sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Um die numerische Simulation der stationären Navier-Stokes-Gleichungen geht es in dieser Arbeit.

Bei der Untersuchung wird eine neue Form der Finite-Elemente-Analysis verwendet - die Isogeometrische Analysis (*engl.* "Isogeometric Analysis" – IGA). Diese Methode wurde nicht nur von Fragestellungen der Ingenieure beeinflusst, sondern ist aus dem gesamten Arbeitsprozess einer modernen Computersimulation entstanden.

Dieser Arbeitsprozess besteht bei der klassischen Finite-Elemente-Analysis häufig aus vier Schritten. Erstens die Gestaltung der Flächen, zum Beispiel die Oberfläche eines Autos, Flugzeuges, die Innenseite von Rohren oder auch Blutgefäßen. Dies geschieht meistens mit Grafik Design Software, die auf B-Splines, Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) oder T-Splines basiert, wobei NURBS als industrieller Standard betrachtet werden können. Im zweiten Schritt wird das gesamte Gebiet, das das Fluid beinhaltet, durch Simplexe oder Quader vergittert. Zum Beispiel könnte es sich um den Innenraum von Rohren oder Blutgefäßen handeln oder aber um einen mit Luft gefüllten Quader, wobei die Luft ein Auto oder Flugzeug umströmt. Hierbei sind die Oberflächen nur noch approximativ dargestellt, da sie durch das Vergittern durch Polygone angenähert werden müssen. Außerdem ist der zeitliche Aufwand dieses Arbeitsschrittes meistens sehr hoch. Er bedarf, trotz zahlreicher Ansätze der Automatisierung, in der Regel auch viel menschlicher Arbeitszeit. Der dritte Schritt ist die Approximation der Gleichungen im Gitter, während im vierten Schritt die Auswertung und Sicherung erfolgt.

Die Grundidee der Isogeometrischen Analysis besteht darin, den Aufwand

des Vergitterns zu minimieren, indem man die ersten beiden Schritte vereint. Der gesamte Raum wird mithilfe von B-Splines, NURBS oder T-Splines computergerecht modelliert. Dabei stehen in den Flächen, also den Rändern des Gebietes, fast alle Freiheiten der jeweiligen Spline-Sorten zur Verfügung. Dann folgt ein neues numerisches Finite-Elemente-Verfahren, das die Modellierung des Gebietes direkt aufgreift. Anschließend erfolgt die Auswertung und Sicherung.

In dieser Arbeit wird die Isogeometrische Analysis der stationären Navier-Stokes-Gleichungen für B-Splines und NURBS vorgestellt. In Kapitel 2 wird die allgemeine Finite-Elemente-Analysis für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen vorgenommen. Dann werden die Benchmark Probleme präsentiert, für die numerische Studien gemacht werden.

In Kapitel 3 und 4 folgen Abschnitte, in denen alle nötigen Konstruktionen für die Implementierung der Isogeometrischen Analysis mit Multipatch-Ansatz für B-Splines und NURBS gegeben werden. Hierbei werden viele positive Eigenschaften der IGA formuliert. Es wird in der Regel kein Approximationsfehler des Gebietes gemacht. Es gibt die automatische globale Verfeinerung - der genaue Zusammenhang, was Verfeinerung hierbei bedeutet, wird geklärt. Es besteht die Möglichkeit, Verfahren zu konstruieren, die mit fast beliebiger Ordnung konvergieren. Die Approximationen des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckes sind unter Umständen in großen Teilen des Gebietes nicht nur stetig, sondern mehrmals stetig differenzierbar.

Anschließend, in Kapitel 5, werden die Benchmarkprobleme ausgewertet, die in Kapitel 2 vorgestellt wurden. In Kapitel 6 folgt eine Auflistung weiterer Untersuchungsmöglichkeiten - unter anderem die angesprochen T-Splines, die auch lokale Verfeinerung zulassen. Zuletzt werden einige Schlussfolgerungen gezogen.

Im Kapitel Addendum sind Notationen geklärt. Ab Seite 87 ist die verwendete Literatur aufgeführt.

2 Problemstellung

In diesem Abschnitt wird die genaue analytische Problemstellung dargelegt. Im Anschluss wird das zugehörige Finite-Elemente-Problem formuliert. Ein weiterer Abschnitt stellt die Beispiele in ihrer analytischen Form vor. Zu diesen Beispielen sind die berechneten Ergebnisse in Kapitel 5, Numerische Studien, zu finden.

2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind zwei gekoppelte Differenzialgleichungen für die Modellierung des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckfeldes eines Fluids in einem beschränkten Gebiet Ω . Die Herleitung beinhaltet, dass das Fluid den physikalischen Gesetzen der Massenerhaltung und der Impulserhaltung genügt.

Hier wird eine Formulierung von dimensionslosen stationären Navier-Stokes-Gleichungen mit einer Zerlegung des Randes von Ω in einen nicht leeren Teil mit beliebiger Dirichlet-Randbedingung und in einen Teil mit homogener natürlicher Randbedingung behandelt.

2.1.1 Klassische Formulierung

Sei folgende Problemstellung der Navier-Stokes-Gleichungen gegeben: Suche $(\vec{u}, p) \in C^2(\Omega) \otimes C^1(\Omega)$, so dass

$$-\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad \text{in } \Omega \qquad \qquad \vec{u} = \vec{u}_{\text{Diri.}} \quad \text{auf } \Gamma_{\text{Diri.}}$$

$$-\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad \qquad \nu\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{n}} - p\vec{n} = \vec{0} \qquad \text{auf } \Gamma_{\text{natr.}}$$
(2.1)

mit den Größen

$$\begin{array}{ll} D \in \{2,3\} & \text{Dimension,} \\ \Omega \subset \mathbb{R}^D & \text{offenes, beschränktes, nicht leeres Gebiet,} \\ \Gamma_{\text{Diri.}} \subset \partial \Omega & \text{nicht leerer Rand mit Dirichlet-Randbedingung,} \\ \Gamma_{\text{natr.}} \subset \partial \Omega & \text{Rand mit natürlicher Randbedingung,} \\ \nu \in \mathbb{R} & \text{kinematische Viskosität,} \\ \vec{u} \in C^2(\Omega) & \text{Strömungsgeschwindigkeit,} \\ p \in C^1(\Omega) & \text{Druck,} \\ \vec{f} \in C^0(\Omega) & \text{Kraftterm,} \\ \vec{u}_{\text{Diri.}} \in C^2(\Gamma_{\text{Diri.}}) & \text{Dirichlet-Randbedingung und} \\ \vec{n} \in \mathbb{R}^D & \text{nach außen gerichteter Einheitsnormalenvektor.} \end{array}$$

2.1.2 Schwache Formulierung

Um eine schwache Formulierung des Problems aufzustellen, wird folgende Notation benötigt, wobei Tr den Spuroperator auf $\Gamma_{\text{Diri.}}$ bezeichnet

$$\left[H_{\vec{u}_{\text{Diri.}}}^{1}(\Omega)\right]^{D} = \left\{\vec{u} \in \left[H^{1}(\Omega)\right]^{D} : \text{Tr } \vec{u} = \vec{u}_{\text{Diri.}}\right\},$$

$$L_{0}^{2}(\Omega) = \left\{p \in L^{2}(\Omega) : \int_{\Omega} p \, d\vec{x} = 0\right\},$$

$$L_{*}^{2}(\Omega) = \begin{cases}L_{0}^{2}(\Omega) & \Gamma_{\text{natr.}} = \varnothing\\L^{2}(\Omega) & \Gamma_{\text{natr.}} \neq \varnothing\end{cases}.$$
(2.2)

Es sind folgende Zwischenschritte notwendig, um (2.1) in die gewünschte schwache Formulierung zu bringen:

1. Multiplizieren der ersten Gleichung mit einer Testfunktion

$$\vec{v} \in V = \left[H^1_{\vec{0}}(\Omega) \right]^D,$$

2. Multiplizieren der zweiten Gleichung mit einer Testfunktion

$$q \in Q = L^2_*(\Omega),$$

- 3. Integrieren über Ω ,
- 4. Anwenden von partieller Integration (7.7),
- 5. Mithilfe des Frobenius-Skalarproduktes (7.3) Definieren von

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \int_{\Omega} \langle \nabla \vec{u}, \nabla \vec{v} \rangle \, d\vec{x}, \qquad b(\vec{u}, q) = -\int_{\Omega} \langle \nabla \cdot \vec{u}, q \rangle \, d\vec{x},$$

$$c(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \langle (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u}, \vec{v} \rangle \, d\vec{x}, \qquad F(\vec{v}) = \int_{\Omega} \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \, d\vec{x}.$$
(2.3)

Aus diesen Schritten folgt die schwache Formulierung von (2.1) mit dem Ansatzraum $W = \left[H^1_{\vec{u}_{\text{Diri.}}}(\Omega)\right]^D$ und Q: Suche $(\vec{u}, p) \in W \otimes Q$, so dass

$$a(\vec{u}, \vec{v}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = F(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V,$$

$$b(\vec{u}, q) = 0 \qquad \forall q \in Q.$$
 (2.4)

Bemerkung 2.1 – Leere natürliche Randwerte:

Sind keine natürlichen Randwerte vorhanden, ist der Druck bis auf eine Konstante genau bestimmt. Um diese Konstante zu definieren, ist es üblich zu fordern, dass das Integral über den Druck verschwindet – siehe Gleichung (2.2). Gibt es einen Teil mit natürlichen Randwerten, ist die Konstante durch diese fixiert.

Für das Lösen mit Galerkin-Methode ist es notwendig, dass der Ansatzraum und der Testraum gleich sind. Sei \vec{w} eine beliebige, bekannte Funktion aus W. Dann lässt sich \vec{u} formal schreiben als $\vec{u} = \vec{\mu} + \vec{w}$ mit $\vec{\mu} \in V$. Einsetzen von \vec{u} und Umformen mit Ausnutzen von Linearität ergibt: Suche $(\vec{\mu}, p) \in V \otimes Q$, so dass

$$a(\vec{\mu}, \vec{v}) + c_{\vec{w}}(\vec{\mu}, \vec{\mu}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = F_{\vec{w}}(\vec{\mu}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V,$$

$$b(\vec{\mu}, q) = G_{\vec{w}}(q) \quad \forall q \in Q,$$
(2.5)

mit

$$c_{\vec{w}}(\vec{\mu}, \vec{\mu}, \vec{v}) = c(\vec{\mu} + \vec{w}, \vec{\mu}, \vec{v}), \quad F_{\vec{w}}(\vec{\mu}, \vec{v}) = F(\vec{v}) - a(\vec{w}, \vec{v}) - c(\vec{\mu} + \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}),$$
$$G_{\vec{w}}(q) = -b(\vec{w}, q).$$

Fixpunktiteration Ziel ist es, die schwache Formulierung (2.5) für variable $(\vec{\mu}, p)$ zu linearisieren und die rechte Seite der Gleichung unabhängig vom unbekannten $\vec{\mu}$ zu machen. Die Abbildung $c_{\vec{w}}(\cdot, \cdot, \vec{v})$ ist nicht linear, allerdings ist für ein festes $\vec{\mu}' \in V$ die Abbildung $c_{\vec{w}}(\vec{\mu}', \cdot, \vec{v})$ linear. Zur Lösung wird hier eine Fixpunktiteration vorgeschlagen. Zu lösen ist eine Reihe von Problemen: Sei $\ell \in \mathbb{N}$ ein Index. Suche $(\vec{\mu}^{\ell}, p^{\ell}) \in V \otimes Q$, so dass

$$a(\vec{\mu}^{\ell}, \vec{v}) + c_{\vec{w}}(\vec{\mu}^{\ell-1}, \vec{\mu}^{\ell}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p^{\ell}) = F_{\vec{w}}(\vec{\mu}^{\ell-1}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V,$$

$$b(\vec{\mu}^{\ell}, q) = G_{\vec{w}}(q) \qquad \forall q \in Q,$$
(2.6)

wobei die Startfunktion $\vec{\mu}^0 \in V$ vorher definiert wird. Das Paar

$$\lim_{\ell \to \infty} (\vec{\mu}^{\ell}, p^{\ell}) = (\vec{\mu}, p)$$

löst dann unter bestimmten Bedingungen das Problem (2.5).

Bemerkung 2.2 – Oseen-Gleichungen:

Die Gleichungen (2.6) sind eine schwache Formulierung der Oseen-Gleichungen.

2.1.3Allgemeine Galerkin-Methode

Um eine numerische Lösung zu erhalten, ist es außerdem notwendig, diese Oseen-Gleichungen (2.6) in ein endlich-dimensionales lineare Gleichungssysteme zu übertragen. Sei V_h ein endlich-dimensionaler Teilraum von V mit Basis $\{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^{N_V}$ und Q_h ein endlich-dimensionaler Teilraum von Q mit Basis $\left\{\psi_{i}\right\}_{i=1}^{N_{Q}}.$ Dann reicht es, alle Basiselemente zu testen.

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ ein Index. Suche $(\vec{\mu}_h^{\ell}, p_h^{\ell}) \in V_h \otimes Q_h$, so dass

$$a(\vec{\mu}_{h}^{\ell}, \vec{\phi}_{i}) + c_{\vec{w}}(\vec{\mu}_{h}^{\ell-1}, \vec{\mu}_{h}^{\ell}, \vec{\phi}_{i}) + b(\vec{\phi}_{i}, p_{h}^{\ell}) = F_{\vec{w}}(\vec{\mu}_{h}^{\ell-1}, \vec{\phi}_{i}) \quad \forall \vec{\phi}_{i} \in \{\vec{\phi}_{i}\}_{i=1}^{N_{V}}, \\ b(\vec{\mu}_{h}^{\ell}, \psi_{i}) = G_{\vec{w}}(\psi_{i}) \qquad \forall \psi_{i} \in \{\psi_{i}\}_{i=1}^{N_{Q}},$$

$$(2.7)$$

mit Startfunktion $\vec{\mu}_h^0 \in V_h$.

Lemma 2.3 – Lineares Gleichungssystem:

Seien

$$\begin{array}{lll} (a_{i,j}) &= A & \in \mathbb{R}^{N_V \times N_V}, & (c_{i,j}^{\ell-1}) &= C^{\ell-1} & \in \mathbb{R}^{N_V \times N_V}, \\ (b_{i,j}) &= B & \in \mathbb{R}^{N_Q \times N_V}, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\mu_j^\ell) &= \vec{U}^\ell &\in \mathbb{R}^{N_V}, & (f_i^{\ell-1}) &= \vec{F}^{\ell-1} &\in \mathbb{R}^{N_V}, \\ (p_i^\ell) &= \vec{P}^\ell &\in \mathbb{R}^{N_Q}, & (g_i) &= \vec{G} &\in \mathbb{R}^{N_Q}. \end{array}$$

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ ein Index. Suche $(\vec{U}^{\ell}, \vec{P}^{\ell}) \in \mathbb{R}^{N_V} \otimes \mathbb{R}^{N_Q}$, so dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A + C^{\ell-1} & B^{\mathsf{T}} \\ B & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{U}^{\ell} \\ \vec{P}^{\ell} \end{pmatrix}}_{\mathsf{M}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{F}^{\ell-1} \\ \vec{G} \end{pmatrix}}_{\mathsf{M}} \tag{2.8}$$

 $mit \ (\mu_i^0) = \vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_V}, \ der \ Steifigkeitsmatrix \ \mathbf{M} \ und$

$$a_{i,j} = a(\vec{\phi}_{j}, \vec{\phi}_{i}), \qquad (2.9)$$

$$b_{i,j} = b(\vec{\phi}_{j}, \psi_{i}), \qquad (2.10)$$

$$c_{i,j}^{\ell-1} = c_{\vec{w}}(\vec{\mu}_{h}^{\ell-1}, \vec{\phi}_{j}, \vec{\phi}_{i}), \qquad (2.11)$$

$$f_{i}^{\ell-1} = F_{\vec{w}}(\vec{\mu}_{h}^{\ell-1}, \vec{\phi}_{i}), \qquad (2.12)$$

$$g_{i} = G_{\vec{w}}(\psi_{i}). \qquad (2.13)$$

Dann kann mit

$$(\vec{\mu}_h^{\ell}, p_h^{\ell}) = \left(\sum_{j=1}^{N_V} \mu_j^{\ell} \cdot \vec{\phi}_j, \sum_{j=1}^{N_Q} p_j^{\ell} \cdot \psi_j\right)$$

die Lösung von (2.7) bestimmt werden.

Hiermit wären allgemeine Grundlagen für die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen geschaffen.

Bemerkung 2.4:

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, bestimmte Testräume und Basen auszuwählen und dann für diese die Einträge in den Matrizen und Vektoren (2.9) bis (2.13) zu berechnen. Dies ist in Abschnitt 4.1 zu finden.

Bemerkung 2.5 – Über \vec{w} :

Es ist eventuell kein analytisches $\vec{w} \in W$ bekannt, weshalb \vec{w} mit einer Funktion \vec{w}_h aus einem endlich-dimensionalen Vektorraum W_h angenähert werden muss. Die Berechnung von \vec{w}_h ist ebenfalls Teil dieser Arbeit und wird in Abschnitt 4.2 beschrieben.

Bewertungskriterium In diesem Teilabschnitt wird ein Bewertungskriterium für die numerische Lösung definiert. Hierfür wird folgendes benötigt:

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in X \subset \mathbb{R}^D} \|\vec{x} - \vec{y}\|_2.$$

Definition 2.6 – Konvergenzordnung:

Sei $(\vec{u}, p) \in \hat{W} \otimes \hat{Q} \subset W \otimes Q$ Lösung von (2.4). Definiere

$$(\vec{u}_h, p_h) = \lim_{\ell \to \infty} (\vec{\mu}_h^{\ell} + \vec{w}, p_h^{\ell})$$

mit $(\vec{\mu}_h^\ell, p_h^\ell)$ Lösung von (2.7) und

$$h \propto \max_{\beta \in V_h \cup Q_h} \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\beta)).$$
 (2.14)

Dann ist das Verfahren von Konvergenzordnung $k \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\|\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}_h\|_{L_2(\Omega)} \le h^k \cdot C_1 \cdot (\|\vec{u}\|_{\hat{W}} + \|p\|_{\hat{Q}}),$$

$$\|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \le h^k \cdot C_2 \cdot (\|\vec{u}\|_{\hat{W}} + \|p\|_{\hat{Q}})$$

mit C_i unabhängig von h, $\|\vec{u}\|_{\hat{W}}$ und $\|p\|_{\hat{Q}}$ für $i \in \{1, 2\}$.

2.2 Beispiele von Gebieten, Kräften und Randwertbedingungen

Hier sollen die verschieden Beispielfälle vorgestellt werden, mit denen numerische Simulationen gemacht wurden.

Bemerkung 2.7:

Es stellt sich die Frage, wie Gebiete implementiert werden. Anders als bei klassischen Finite-Elemente-Techniken wird bei der Isogeometrischen Analysis die Geometrie nicht durch ein Dreiecks- bzw. Rechtecksgitter angenähert. Die Definitionen 3.24 und 4.18 sind hierbei entscheidend.

2.2.1 Einheitsquadrat mit Wirbel

Ω

Abbildung 1: Einheitsquadrat

Als erstes Gebiet Ω wurde das Einheitsquadrat $(0,1)^2$ gewählt. Dieses Gebiet ist für viele numerische Untersuchungen eine naheliegende erste Wahl, da es sehr einfach darzustellen ist – hier unterscheidet sich die Isogeometrische Analysis nicht von klassischen Gittermethoden.

Im ersten Beispiel sind die Kraft \vec{f} und die Randwerte so gewählt, dass \vec{u} und p bekannt sind. Seien \vec{u} und p gegeben durch

$$\vec{u} = 400 \cdot \begin{pmatrix} +x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ -y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix},$$

$$p = 10 \cdot \left((x-0.5)^3y^2 + (1-x)^3(y-0.5)^3 \right).$$
(2.15)

Diese Definition führt dazu, dass das Geschwindigkeitsfeld einen Wirbel darstellt – siehe Abbildung 2. Der Rand ist vollständig mit homogenen Dirichlet-Randwertbedingungen gewählt.

2.2.2 2D Strömung um einen Zylinder

Das zweite Beispiel ist ein typisches Benchmarkproblem für die Navier-Stokes-Gleichungen. Es beschreibt die zweidimensionale Strömung um einen Zylinder. Sei $\overline{B}_r(x_1, x_2)$ der abgeschlossene Kreis mit Radius r um den Punkt (x_1, x_2) . Das Gebiet Ω wird am einfachsten charakterisiert durch

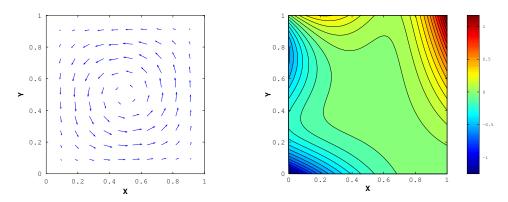


Abbildung 2: Wirbel gegeben durch (2.15) im Einheitsquadrat links: \vec{u} – rechts: p

$$\Omega = [(0, 2.2) \times (0, 0.41)] \setminus \overline{B}_{0.05}(0.2, 0.2).$$

Dabei muss besonders beachtet werden, dass die Implementierung eines Kreises für klassische Finite-Elemente-Techniken ein Problem darstellen würde, das nicht ohne einen zusätzlichen Approximationsfehler zu lösen wäre. Der Rand wird in drei Teile aufgeteilt:

$$\Gamma_{\text{Diri.}}^{1} = \{0\} \times (0, 0.41),$$

$$\Gamma_{\text{Diri.}}^{2} = \left[[0, 2.2] \times \{0, 0.41\} \right] \cup \partial \overline{B}_{0.05}(0.2, 0.2),$$

$$\Gamma_{\text{natr.}} = \{2.2\} \times (0, 0.41).$$

Es werden die Dirichlet-Randwertbedingungen $\vec{u}_{\text{Diri.}}$ definiert durch

$$\begin{split} \vec{u}_{\text{Diri.}}|_{\Gamma^{1}_{\text{Diri.}}}(0,y) &= \left(\frac{1.2 \cdot y (0.41 - y)}{0.41^{2}}, 0\right)^{\mathsf{T}}, \\ \vec{u}_{\text{Diri.}}|_{\Gamma^{2}_{\text{Diri.}}}(x,y) &= \vec{0}. \end{split}$$



Abbildung 3: 2D Gebiet zur Strömung um einen Zylinder

Für dieses Problem ist keine analytische Lösung bekannt. Dennoch sollte man die Approximation nicht nur vom Optischen her bewerten. Für einen umströmten Gegenstand kann man Kennzahlen berechnen und sie mit bekannten Ergebnissen vergleichen. Diese Kennzahlen hängen direkt mit den Kräften, die durch die Strömung wirken, zusammen. Zum einen ist der Druckabfall Δp am Gegenstand von Interesse. Der Druckabfall ist als einfache Differenz des Druckes vor und hinter dem Gegenstand, in diesem Fall dem Zylinder, definiert:

$$\Delta p = p(0.15, 0.2) - p(0.25, 0.2).$$
 (2.16)

Zwei weitere Kennzahlen sind von Bedeutung. Diese sind dimensionslose Interpretationen der Zug- und Auftriebskräfte auf den Zylinder. Seien

$$C_{\text{drag}} = \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^2 \cdot H} + \int_{S} \left(\nu \frac{\partial u \cdot \vec{\tau}}{\partial \vec{n}} n_2 - p n_1 \right) ds,$$

$$C_{\text{lift}} = \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^2 \cdot H} - \int_{S} \left(\nu \frac{\partial u \cdot \vec{\tau}}{\partial \vec{n}} n_1 + p n_2 \right) ds$$
(2.17)

mit dem Spezifikationen

$$H = 1,$$

$$S = \partial \overline{B}_r,$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{1}{0.41^2} \frac{\int_0^{0.41} 1.2y(0.41 - y) \, dy}{\int_0^{0.41} \, dy} = 0.2,$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2),$$

$$\vec{\tau} = (n_2, -n_1),$$
(2.18)

wobei \vec{n} der in Bezug auf Ω nach innen gerichtete Einheitsnormalenvektor und $\vec{\tau}$ der angegebene Tangentialvektor ist.

2.2.3 Einheitswürfel

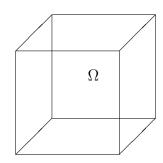


Abbildung 4: Einheitswürfel

Das dritte Gebiet ist der Einheitswürfel $(0,1)^3$. Es stellt ein dreidimensionales Beispiel dar. Wie im ersten Beispiel sind die Kraft und Randwertbedingungen so gewählt, dass sie eine entsprechende analytische Funktion approximieren. Hinzu kommt eine Approximation der Randwerte. Die zu approximierenden Funktionen sind gegeben durch

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} +\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi (y+z)/2) \\ -\cos(\pi x) \cdot \sin(\pi (y+z)/2) \\ -\cos(\pi x) \cdot \sin(\pi (y+z)/2) \end{pmatrix},$$

$$p = (z - 0.5) \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\pi x + \pi y + \pi}{2}\right).$$
(2.19)

Wie beim Einheitsquadrat entsteht ein Wirbel, jedoch ohne homogene Randwerte. Dieser dreht sich um eine Gerade im Raum.

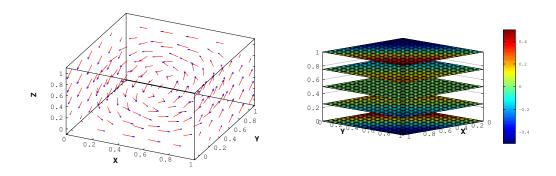


Abbildung 5: Wirbel gegeben durch (2.19) im Einheitswürfel links: \vec{u} – rechts: p

2.2.4 3D Strömung um einen Zylinder

Die dreidimensionale Strömung um einen Zylinder ist das analoge Benchmarkproblem zu Abschnitt 2.2.2 für eine zusätzliche Raumrichtung. Das Gebiet ist beschrieben durch

$$\Omega = \left[\left[(0, 2.5) \times (0, 0.41) \right] \setminus \overline{B}_{0.05}(0.5, 0.2) \right] \times (0, 0.41).$$

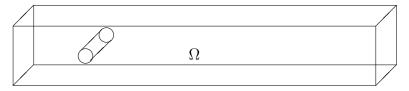


Abbildung 6: 3D Gebiet zur Strömung um einen Zylinder

Bei der Randaufteilung

$$\begin{split} &\Gamma_{\mathrm{Diri.}}^{1} = \left\{0\right\} \times \left(0, 0.41\right) \times \left(0, 0.41\right), \\ &\Gamma_{\mathrm{natr.}} = \left\{2.5\right\} \times \left(0, 0.41\right) \times \left(0, 0.41\right), \\ &\Gamma_{\mathrm{Diri.}}^{2} = \partial\Omega \times \left[\Gamma_{\mathrm{Diri.}}^{1} \cup \Gamma_{\mathrm{natr.}}\right] \end{split}$$

werden folgende Randwerte angenommen

$$\vec{u}_{\text{Diri.}}|_{\Gamma^{1}_{\text{Diri.}}}(0, y, z) = \left(\frac{7.2 \cdot zy(0.41 - y)(0.41 - y)}{0.41^{4}}, 0, 0\right)^{\mathsf{T}},$$

$$\vec{u}_{\text{Diri.}}|_{\Gamma^{2}_{\text{Diri.}}}(x, y, z) = \vec{0}.$$

Es werden ähnliche Kennzahlen wie im zweidimensionalen Beispiel berechnet. Der Druckunterschied wird in der Mitte des Zylinders vor und hinter der Strömung definiert:

$$\Delta p = p(0.45, 0.2, 0.205) - p(0.55, 0.2, 0.205). \tag{2.20}$$

Die dimensionslosen Kräfte C_{drag} und C_{lift} werden mithilfe von Gleichung (2.17) bestimmt, jedoch mit den Spezifikationen

$$H = 0.41,$$

$$S = \partial \overline{B}_r \times (0, 0.41),$$

$$U_{\text{mean}} = 0.2,$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3),$$

$$\vec{\tau} = (n_2, -n_1, 0),$$
(2.21)

wobei \vec{n} der in Bezug auf Ω nach innen gerichtete Einheitsnormalenvektor und $\vec{\tau}$ der angegebene Tangentialvektor ist.

2.3 Analytische Berechnung der Kräfte

Die Kraftkoeffizienten C_{drag} und C_{lift} aus Gleichung (2.17) sind durch zwei Randintegrale gegeben. Da Randintegrale komplizierter zu berechnen sind, werden diese im folgenden Abschnitt durch Integrale über dem gesamten Raum Ω ersetzt. Mit partieller Integration (7.7), $\nabla \cdot u = 0$ und $n_1^2 + n_2^2 = 1$ folgt direkt aus der ersten Gleichung der schwachen Formulierung (2.4):

$$C_{\text{drag}} = \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^{2} \cdot H} + \int_{S} \left(\nu \frac{\partial u \cdot \vec{\tau}}{\partial \vec{n}} n_{2} - p n_{1} \right) ds$$

$$= \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^{2} \cdot H} - \left[a(\vec{u}, \vec{w}_{\text{dr}}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}_{\text{dr}}) + b(\vec{w}_{\text{dr}}, p) - F(\vec{w}_{\text{dr}}) \right]$$

$$C_{\text{lift}} = \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^{2} \cdot H} - \int_{S} \left(\nu \frac{\partial u \cdot \vec{\tau}}{\partial \vec{n}} n_{1} + p n_{2} \right) ds$$

$$= \frac{1}{r \cdot U_{\text{mean}}^{2} \cdot H} - \left[a(\vec{u}, \vec{w}_{\text{lift}}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}_{\text{lift}}) + b(\vec{w}_{\text{lift}}, p) - F(\vec{w}_{\text{lift}}) \right]$$

$$(2.22)$$

mit $\vec{w}_{\rm dr}, \vec{w}_{\rm lift} \in W$ so gewählt, dass

$$\vec{w}_{\text{dr}}|_{S} = \vec{e}_{1}, \quad \vec{w}_{\text{dr}}|_{\partial\Omega \setminus S} = \vec{0},$$

$$\vec{w}_{\text{lift}}|_{S} = \vec{e}_{2}, \quad \vec{w}_{\text{lift}}|_{\partial\Omega \setminus S} = \vec{0}$$
(2.23)

gilt, wobei \vec{w}_d der d-te Einheitsvektor ist. Die schrittweise Rechnung für den dreidimensionalen Fall ist in [14] zu finden. Der zweidimensionale Fall ist analog dazu.

Bemerkung 2.8 – Stetigkeit von \vec{w}_{dr} und \vec{w}_{lift} im 3D Fall:

In der Herleitung in [14] für den dreidimensionalen Fall wird verwendet, dass $\vec{w}_{\rm dr}$ und $\vec{w}_{\rm lift}$ aus $[H^1(\Omega)]^3$ sind. Durch den Einbettungssatz von Sobolev folgt insbesondere, dass die Funktionen stetig sind. Die Forderungen in Gleichung (2.23) widersprechen der Stetigkeit an der Schnittstelle zwischen dem Zylinder S und dem restlichen Rand. Dieser Widerspruch wird in dieser Arbeit ignoriert, um eine Berechnung als Raumintegral zu ermöglichen.

3 Konstruktion des Gebietes

In diesem Kapitel sollen die mathematischen Voraussetzungen für die Isogeometrische Analysis geklärt werden. Dies beantwortet die Frage der Implementierung des Gebietes in Bemerkung 2.7. Der Abschnitt beinhaltet insbesondere: Grundlegende Definitionen, Konstruktion von B-Splines und Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), sowie deren Eigenschaften, und Beispiele.

3.1 B-Splines

Der erste Schritt der Isogeometrischen Analysis besteht in der Konstruktion von B-Splines. Diese werden mit Hilfe von Knotenvektoren definiert.

Definition 3.1 – Offener Knotenvektor von Grad $p_{\vec{k}}$:

Sei $N_{\vec{\kappa}}$ eine natürliche Zahl. $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}})$ wird Knotenvektor genannt, wenn $\kappa_1, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}}$ eine aufsteigende Folge von reellen Zahlen aus dem Intervall [0,1] mit $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_{N_{\vec{\kappa}}} = 1$ ist.

Gilt zusätzlich $N_{\vec{\kappa}} \geq 2(p_{\vec{\kappa}}+1)$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{p_{\vec{\kappa}}+1} = 0$ und $\kappa_{N_{\vec{\kappa}}-p_{\vec{\kappa}}}, \ldots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}} = 1$, so ist $\vec{\kappa}$ ein offener Knotenvektor von Grad $p_{\vec{\kappa}}$.

Um einige Eigenschaften effizient und genau zu beschreiben, werden zwei Hilfsfunktionen für allgemeine Vektoren benötigt.

Definition 3.2 – Anzahlfunktion und Regularitätsfunktion:

Sei $\vec{y} = (y_1, \dots, y_L) \subset [0, 1]^L$ ein Vektor. Die Anzahlfunktion ist definiert durch

$$\#_{\vec{y}}: [0,1] \longrightarrow \{0,\dots,L\}$$
$$\xi \longmapsto |\{\ell \in \{1,\dots,L\} : \xi = y_{\ell}\}|.$$

Sei $q \in \mathbb{N}$, dann ist die Regularitätsfunktion definiert durch

$$r_{\vec{y},q}(\xi) = \begin{cases} \infty & 0 = \#_{\vec{y}}(\xi) \\ q - \#_{\vec{y}}(\xi) & 0 < \#_{\vec{y}}(\xi) \end{cases}$$
(3.1)

Werden für \vec{y} ein offener Knotenvektor, für q der Grad des Knotenvektors $p_{\vec{\kappa}}$ und für ξ ein Knoten gewählt, dann gilt: Je seltener ein Knoten im Knotenvektor auftritt, desto größer ist seine Regularität. Bemerke, dass die Regularität höchstens $p_{\vec{\kappa}} - 1$ ist. Die Knoten mit den Werten null und eins haben höchstens eine Regularität von minus eins, da der Knotenvektor offen ist.

Bemerkung 3.3 – Regularitätsfunktion:

Die Regularitätsfunktion $r_{\vec{\kappa},p_{\vec{\kappa}}}$ eines Knotenvektors und sein Grad $p_{\vec{\kappa}}$ enthalten alle Informationen über den Knotenvektor $\vec{\kappa}$, das heißt durch $r_{\vec{\kappa},p_{\vec{\kappa}}}$ und $p_{\vec{\kappa}}$ ist $\vec{\kappa}$ eindeutig definiert.

Für einen beliebigen Knotenvektor können die Basisfunktionen der B-Splines rekursiv angeben werden.

Definition 3.4 – B-Spline-Basis von Grad p:

Sei $\vec{\kappa}$ ein offener Knotenvektor von Grad $p_{\vec{\kappa}}$ und Dimension $N_{\vec{\kappa}}$. Die *i-te* B-Spline-Basisfunktion von Grad 0 ist für $i \in \{1, \ldots, N_{\vec{\kappa}} - 2\}$

$$\mathcal{B}_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [\kappa_i, \kappa_{i+1}) \\ 0 & \xi \in [0,1] \setminus [\kappa_i, \kappa_{i+1}) \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{N_{\vec{\kappa}}-1,0}(\kappa) = \begin{cases} 1 & \xi \in [\kappa_{N_{\vec{\kappa}}-1}, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}}] \\ 0 & \xi \in [0, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}-1}) \end{cases}.$$

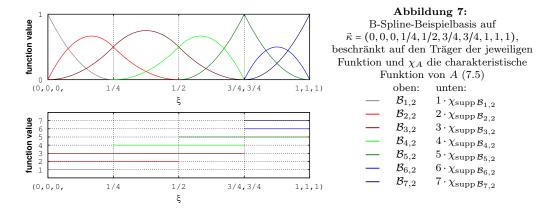
Seien $p \in \{1, ..., p_{\vec{\kappa}}\}$ und $i \in \{1, ..., N_{\vec{\kappa}} - (p+1)\} = I(\vec{\kappa}, p)$, sowie

$$\frac{\delta}{\nu}_0 = \begin{cases} \frac{\delta}{\nu} & \nu \neq 0 \\ 0 & \nu = 0 \end{cases},$$

dann ist die i-te B-Spline-Basisfunktion von Grad p rekursiv definiert durch

$$\mathcal{B}_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \kappa_i}{\kappa_{i+p} - \kappa_i} \circ \mathcal{B}_{i,p-1}(\xi) + \frac{\kappa_{i+1+p} - \xi}{\kappa_{i+1+p} - \kappa_{i+1}} \circ \mathcal{B}_{i+1,p-1}(\xi).$$

Die Familie $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ wird B-Spline-Basis von Grad p auf $\vec{\kappa}$ genannt.



Das folgende Lemma zählt die wichtigsten Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen auf. Viele lassen sich durch Abbildung 7 veranschaulichen. Insbesondere für die Eigenschaften (i) - (iii) ist das untere Bild hilfreich. Weitere Beispiele befinden sich in den Abbildungen 10, 16 und 18 auf den Seiten 20, 32 und 35.

Lemma 3.5 – Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen:

Sei $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ eine B-Spline-Basis von geeignetem Grad p auf $\vec{\kappa}$ mit Dimension $N_{\vec{\kappa}}$.

- (i) Für alle i in $I(\vec{\kappa}, p)$ ist $\mathcal{B}_{i,p}$ nur abhängig von den Knoten $\kappa_i, \ldots, \kappa_{i+p+1}$.
- (ii) Für alle i in $I(\vec{\kappa}, p)$ hat $\mathcal{B}_{i,p}$ kompakten Träger und es gilt

$$\operatorname{supp}(\mathcal{B}_{i,p}) \subseteq [\kappa_i, \kappa_{i+p+1}]. \tag{3.2}$$

- (iii) Für alle Intervalle (κ_j, κ_{j+1}) mit $\kappa_j < \kappa_{j+1}$ gibt es genau p+1 Basisfunktionen, die größer als null sind. Genauer: Nur für $\mathcal{B}_{i,p}$ mit i in $\{j-p,\ldots,j\}$ gilt $\operatorname{supp}(\mathcal{B}_{i,p}) \cap (\kappa_j, \kappa_{j+1}) \neq \emptyset$.
- (iv) Für alle i in $I(\vec{\kappa}, p)$ ist $\mathcal{B}_{i,p}$ eine nicht-negative Funktion, d.h. für alle ξ in [0,1] gilt $\mathcal{B}_{i,p}(\xi) \geq 0$.
- (v) Die Menge $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ ist eine Zerlegung der Eins, d.h. für jedes ξ in [0,1] gilt $\sum_{i\in I(\vec{\kappa},p)} \mathcal{B}_{i,p}(\xi) = 1$.
- (vi) Gilt $r_{\vec{\kappa},p}(\xi) \ge -1$ für alle ξ in [0,1], so ist die Familie von Funktionen $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ linear unabhängig.
- (vii) Es gelten:
 - $\mathcal{B}_{i,p}(\xi)$ ist $r(\xi,i)$ -mal stetig differenzierbar mit

$$r\left(\xi, i\right) = r_{\left(\kappa_{i}, \dots, \kappa_{i+p+1}\right), p}\left(\xi\right) \tag{3.3}$$

für alle ξ aus (0,1), i aus $I(\vec{\kappa},p)$ und $r(\xi,i) \geq 0$.

• $\mathcal{B}_{i,p}$ ist glatt in 0 und 1 für alle i aus $I(\vec{\kappa},p)$.

Folglich gilt: Für alle i aus $I(\vec{\kappa}, p)$ ist $\mathcal{B}_{i,p}$ in $C^{r_{\min}}([0,1])$ mit

$$r_{\min} = \min_{\xi \in (0,1)} r_{\vec{\kappa},p}(\xi), \qquad (3.4)$$

 $vorausgesetzt r_{min} ist nicht-negativ.$

Zu den Eigenschaften sind noch Anmerkungen zu machen. Um eine Basis zu erhalten, müssen die Basisfunktionen linear unabhängig sein. Deshalb sollte $\vec{\kappa}$ so gewählt werden, dass $r_{\vec{\kappa},p}(\xi)$ größer als oder gleich minus eins ist (Eigenschaft (vi)). Insbesondere sollte der Grad p dem Grad des Knotenvektors $p_{\vec{\kappa}}$ entsprechen.

Zweitens folgt aus Gleichung (3.4), dass eine B-Spline-Basisfunktion von Grad p auch (p-1)-mal differenzierbar ist, außer wenn innere Knoten (das sind Knoten mit einem Index aus $\{p+2,\ldots,N_{\bar{\kappa}}-(p+1)\}$ mehrmals vorkommen.

Es gilt nicht nur, dass eine B-Spline-Basisfunktion in einem Intervall zwischen zwei Knoten glatt ist, sondern sie ist eine stückweise polynomiale Funktion.

Lemma 3.6 – Polynomeigenschaften von Basisfunktionen:

Sei $\mathcal{P}_n(\Omega)$ der Raum der Polynome mit Urbild Ω und maximalem Grad n. Sei $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ eine B-Spline-Basis von geeignetem Grad p auf $\vec{\kappa}$. Dann gilt für alle $i\in I(\vec{\kappa},p)$ und alle $j\in\{1,\ldots,N_{\vec{\kappa}}-1\}$

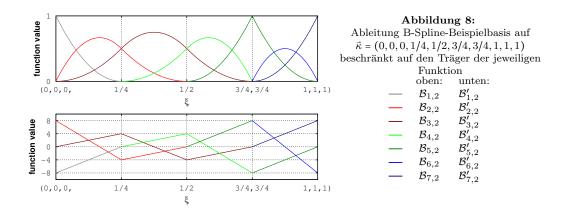
$$\mathcal{B}_{i,p}|_{\left[\kappa_{i},\kappa_{j+1}\right]} \in P_{p}\left(\left[\kappa_{j},\kappa_{j+1}\right]\right).$$

Die Ableitung von Polynomen ist leicht zu berechnen. Durch vollständige Induktion erhält man folgendes Lemma.

Lemma 3.7 – Ableitung von B-Spline-Basisfunktionen:

Sei $p \ge 1$. Seien $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ und $\{\mathcal{B}_{i,p-1}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p-1)}$ zwei B-Spline-Basen von geeignetem Grad p bzw. p-1 auf demselben Knotenvektor $\vec{\kappa}$. Wenn $\mathcal{B}_{i,p}$ differenzierbar in $\xi \in [0,1]$ ist, dann gilt

$$\frac{d}{d\xi}\mathcal{B}_{i,p}(\xi) = p \cdot \left(\frac{\mathcal{B}_{i,p-1}(\xi)}{\kappa_{i+p} - \kappa_i} - \frac{\mathcal{B}_{i+1,p-1}(\xi)}{\kappa_{i+1+p} - \kappa_{i+1}} 0\right).$$



Für die Beispielbasis aus Abbildung 7 ist in Abbildung 8 die Ableitung zu sehen. Beachte besonders die Unstetigkeit von $\mathcal{B}'_{4,2}$, $\mathcal{B}'_{5,2}$, $\mathcal{B}'_{6,2}$. Durch den doppelten Knoten gilt r(3/4,4) = r(3/4,5) = r(3/4,6) = 0 – vergleiche Gleichung (3.3).

Bemerkung 3.8 – Ableitung von B-Spline-Basisfunktionen:

Sei $\{\mathcal{B}_{i,p}\}_{i\in I(\vec{\kappa},p)}$ linear unabhängig und es gelte

$$\vec{\kappa} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \kappa_{p+2}, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}-(p+1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}).$$

Dann sind mindestens die Funktionen $\mathcal{B}_{i,p-1}$ und $\mathcal{B}_{N_{\bar{\kappa}}-p,p-1}$ Nullfunktionen, sowie alle weiteren Funktionen, die nur von gleichen Knoten abhängen. Damit die B-Spline-Basis der Ableitung weiterhin linear unabhängig ist, kann als Basis für die Ableitung eine andere B-Spline-Basis auf einem anderen Knotenvektor definiert werden. Sind zum Beispiel nur $\mathcal{B}_{i,p-1}$ und $\mathcal{B}_{N_{\bar{\kappa}}-p,p-1}$ Nullfunktionen, so kann die Ableitung durch eine Indexverschiebung auf $(\kappa_2, \ldots, \kappa_{N_{\bar{\kappa}}-1})$ berechnet werden.

Eindimensionale Funktionen sind nicht das Ziel der Isogeometrischen Analysis. Durch einen Ansatz als Tensorprodukt von mehreren eindimensionalen Abbildungen wird der interessante Funktionenraum gebildet.

Definition 3.9 – B-Spline-Basisfunktion mit N-dim. Urbild:

Für alle Indizes $n \in \{1, ..., N\}$ sei $\{\mathcal{B}_{i_n, p_n}^n\}_{i_n \in I(\vec{\kappa}^n, p_n)}$ eine B-Spline-Basis von geeignetem Grad p_n auf $\vec{\kappa}^n$. Definiere $\mathcal{K} = \{\vec{\kappa}^n\}_{n=1}^N$ und $\vec{p} = (p_1, ..., p_N)$. Sei

$$\vec{\iota} = (i_1, \dots, i_N) \in \bigotimes_{n=1}^N I(\vec{\kappa}^n, p_n) = \mathcal{I}(\mathcal{K}, \vec{p}) = \mathcal{I}$$

ein Multiindex. Dann heißt die Funktion

$$\mathcal{B}_{\vec{t},\vec{p}}:[0,1]^N\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\vec{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_N)^{\mathsf{T}}\longmapsto\prod_{n=1}^N\mathcal{B}_{i_n,p_n}(\xi_n)$$

 $\vec{\iota}$ -te B-Spline-Basisfunktion mit N-dim. Urbild von Grad \vec{p} auf \mathcal{K} . Die Familie

$$\{\mathcal{B}_{ec{\iota},ec{p}}\}_{ec{\iota}\in\mathcal{I}}$$

heißt B-Spline-Basis mit N-dim. Urbild von Grad \vec{p} auf K.

Ein Beispiel ist in Abbildung 9 zu finden. Für die Tensorproduktbasis verallgemeinern sich viele Eigenschaften. Das folgende Lemma stellt eine Übertragung auf den mehrdimensionalen Fall dar. Das Lemma ist in Abbildung 10 verbildlicht.

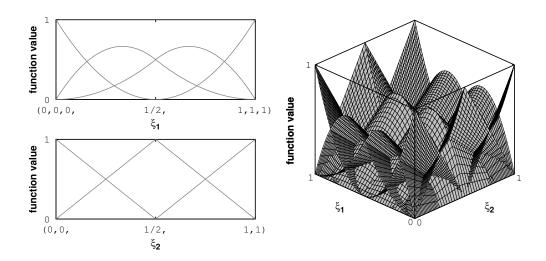


Abbildung 9: Beispiel Tensorproduktbasis links oben: $\{\mathcal{B}_{i,2}^1\}_{i\in I(\vec{\kappa}^1,2)}$ rechts: $\{\mathcal{B}_{\tilde{\iota},(2,1)}^2\}_{\tilde{\iota}\in\mathcal{I}}$ links unten: $\{\mathcal{B}_{i,1}^2\}_{i\in I(\vec{\kappa}^2,1)}$

Lemma 3.10 – Ableitung Tensorproduktbasis:

Sei n fest gewählt mit $p_n \geq 1$. Seien $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ und $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}-\vec{e}_n}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ zwei B-Spline-Basen von geeignetem Grad \vec{p} auf denselben Knotenvektoren \mathcal{K} . Wenn $\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\xi)$ in n-Richtung differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{d}{d\xi_n}\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) = p_n \cdot \left(\frac{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}-\vec{e}_n}(\vec{\xi})}{\kappa_{i_n+p_n}^n - \kappa_{i_n}^n} 0 - \frac{\mathcal{B}_{\vec{\iota}+\vec{e}_n,\vec{p}-\vec{e}_n}(\vec{\xi})}{\kappa_{i_n+1+p_n}^n - \kappa_{i_n+1}^n} 0 \right),$$

wobei \vec{e}_n der n-te Einheitsvektor ist.

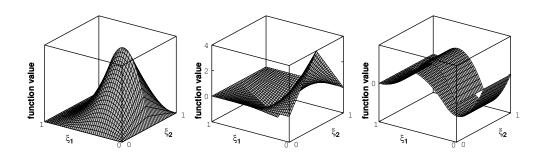


Abbildung 10: Beispiele von Ableitungen zu einer Tensorproduktbasisfunktion $\mathcal{B}_{(2,2),(2,1)}$ passend zu Abbildung 9 definiert.

links: $\mathcal{B}_{(2,2),(2,1)}$ mittig: $\frac{d}{d\xi_1}\mathcal{B}_{(2,2),(2,1)}$ rechts: $\frac{d}{d\xi_2}\mathcal{B}_{(2,2),(2,1)}$

Mithilfe dieser Basis ist es nun möglich, einen ganzen Funktionenraum zu bilden.

Definition 3.11 – B-Spline-Funktion und Kontrollpunkte:

Sei $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine B-Spline-Basis mit N-dim. Urbild. Sei $\{\vec{P}_{\vec{\iota}}\in\mathbb{R}^D\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine Menge von Punkten mit $D\in\mathbb{N}$, so wird

$$\vec{\mathcal{C}}: [0,1]^N \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$\vec{\xi} \longmapsto \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

B-Spline-Funktion in \mathbb{R}^D und $\vec{P}_{\vec{\iota}}$ Kontrollpunkt von $\vec{\mathcal{C}}$ genannt.

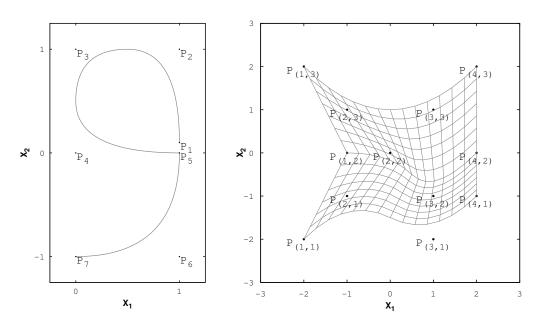


Abbildung 11: Beispiele zweier B-Spline-Funktionen mit Kontrollpunkten in \mathbb{R}^2 links: passend zur Basis aus Abbildung 7 rechts: passend zur Basis aus Abbildung 9

In Abbildung 11 sind zwei Beispiele für B-Spline-Funktionen dargestellt. Zu beachten ist, dass diese Funktionen die Kontrollpunkte nur annehmen, wenn die entsprechende Basisfunktion eins wird – zum Beispiel in \vec{P}_5 . Im Allgemeinen liegt das Bild einer B-Spline-Funktion nur in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

Für diesen Funktionenraum lassen sich offensichtlich auch die Ableitungen der Parametrisierung berechnen.

Bemerkung 3.12 – Ableitung B-Spline-Funktion: Sei $\vec{C}(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$ eine B-Spline-Funktion, für die alle $\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi})$ in *n*-Richtung differenzierbar sind.

Dann gilt

$$\frac{d}{d\xi_n}\vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \frac{d}{d\xi_n} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}},$$

wobe
i $\frac{d}{d\xi_n}\mathcal{B}_{\vec{t},\vec{p}}(\vec{\xi})$ aus Lemma 3.10 bekannt ist.

3.2 Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

B-Splines können verallgemeinert werden zu Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). Dies ermöglicht zum Beispiel das Zeichnen eines exakten Kreises als NURBS-Funktion, der Erweiterung einer B-Spline-Funktion. Das Zeichnen eines exakten Kreises ist nicht möglich mit einer B-Spline-Funktion. (Der Beweis ist zu finden in [18].)

Diese Verallgemeinerung kann man mit zwei verschiedenen Ansätzen erreichen. Der erste Ansatz ermöglicht eine bessere Anschauung für die Basis, während der zweite eine einfachere Implementierung in den meisten Programmiersprachen erlaubt.

3.2.1 NURBS-Funktionen über Gewichtung

Die Grundidee besteht darin, die B-Spline-Basisfunktionen unterschiedlich zu gewichten und so neue Basisfunktionen zu definieren, so dass die Eigenschaften aus Lemma 3.5 erhalten bleiben.

Um Missverständnissen vorzubeugen, wird folgendes angegeben:

$$\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}. \tag{3.5}$$

Definition 3.13 – Gewichtsvektor und Gewichtsfunktion:

Sei $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{T}}$ eine B-Spline-Basis mit N-dim. Urbild.

Dann nennt man $\{\omega_{\tilde{t}} \in \mathbb{R}^+\}_{\tilde{t} \in \mathcal{I}}$ Gewichtsvektor und die B-Spline-Funktion

$$\omega(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}} \cdot \omega_{\vec{\iota}} \tag{3.6}$$

Gewichtsfunktion.

Mithilfe dieser Gewichtsfunktion lassen sich jetzt die NURBS-Basisfunktionen definieren.

Definition 3.14 – NURBS-Basis mit N-dim. Urbild:

Seien $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine B-Spline-Basis mit N-dim. Urbild, $\{\omega_{\vec{\iota}}\in\mathbb{R}^+\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ ein Gewichtsvektor und $\omega(\vec{\xi})$ die zugehörige Gewichtsfunktion. Für $\vec{\xi}\in[0,1]^N$ wird

$$\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) = \frac{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}}}{\omega(\vec{\xi})}$$
(3.7)

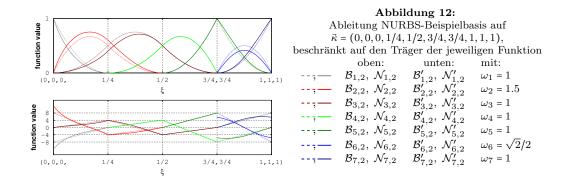
die $\vec{\imath}$ -te NURBS-Basisfunktion von Grad \vec{p} genannt.

Die Familie

$$\{\mathcal{N}_{ec{\iota},ec{p}}\}_{ec{\iota}\in\mathcal{I}}$$

heißt NURBS-Basis mit N-dim. Urbild von $Grad \vec{p}$ auf K.

Der Unterschied zwischen einer B-Spline-Basis und einer NURBS-Basis ist in Abbildung 12 zu sehen. NURBS-Basen stellen eine echte Verallgemeinerung der B-Spline-Basen dar. Sind nämlich alle Gewichte in einer NURBS-Basis gleich, so ist sie eine B-Spline-Basis. Jedoch ist in Abbildung 12 zu erkennen, dass das Ändern von ω_2 auch $\mathcal{N}_{1,2}$ und $\mathcal{N}_{3,2}$ verformt.



Eine nützliche Definition besteht darin, das Urbild in Gitterzellen zu unterteilen. Anhand von Gleichung (3.2) wurde bereits die Bedeutung der Knoten für den Träger deutlich. So definiert sich auch das Gitter durch die Knoten.

Definition 3.15 – Urbildgitter:

Sei $\{\mathcal{N}_{\vec{i},\vec{p}}\}_{\vec{i}\in\mathcal{I}}$ eine NURBS-Basis von geeignetem Grad \vec{p} auf $\mathcal{K} = \{\vec{\kappa}^n\}_{n=1}^N$ mit $\vec{\kappa}^n = (\kappa_1^n, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}_n}}^n)$. Das *Urbildgitter* $\underline{\mathcal{Z}}$ einer NURBS-Basis ist definiert durch

$$\underline{\mathcal{Z}} = \left\{ \bigotimes_{n=1}^N (\kappa_{j_n}^n, \kappa_{j_n+1}^n) : \text{für alle } \vec{j} = (j_1, \dots, j_N) \text{ mit } \kappa_{j_n}^n < \kappa_{j_n+1}^n, n \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Wie oben beschrieben bleiben die Eigenschaften der B-Splines erhalten. Sie übertragen sich sogar auf mehrere Dimensionen.

${\bf Lemma~3.16-Eigenschaften~von~NURBS\text{-}Basis funktionen:}$

Sei $\{\mathcal{N}_{\vec{\imath},\vec{p}}\}_{\vec{\imath}\in\mathcal{I}}$ eine NURBS-Basis von geeignetem Grad \vec{p} auf $\mathcal{K} = \{\vec{\kappa}^n\}_{n=1}^N$ mit $\vec{\kappa}^n = (\kappa_1^n, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}s}}^n)$.

(i) Für alle $\vec{\iota}$ in \mathcal{I} ist $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}$ nur abhängig von den Knoten

(ii) Für alle $\vec{\iota}$ in \mathcal{I} hat $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}$ kompakten Träger und es gilt

$$\operatorname{supp}(\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}) \subseteq \bigotimes_{n=1}^{N} [\kappa_{i_n}^n, \kappa_{i_n+p_n+1}^n].$$

- (iii) Nur für $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}$ mit $\vec{\iota}$ aus $\bigotimes_{n=1}^{N} \{j_n p_n, \dots, j_n\}$ gilt supp $(\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}) \cap Z \neq \emptyset$ mit $Z = \bigotimes_{n=1}^{N} (\kappa_{j_n}^n, \kappa_{j_n+1}^n)$ aus $\underline{\mathcal{Z}}$.
- (iv) Für alle $\vec{\iota} \in \mathcal{I}$ ist $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}$ eine nicht-negative Funktion, d.h. für alle $\vec{\xi}$ in $[0,1]^N$ gilt $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \geq 0$.
- (v) Die Menge $\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ ist eine Zerlegung der Eins, d.h. für jedes $\vec{\xi}$ in $[0,1]^N$ gilt $\sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi})=1$.
- (vi) Gilt $r_{\vec{\kappa}^n,p_n}(\xi) \ge -1$ für alle ξ in [0,1] und für alle n aus $\{1,\ldots,N\}$, so ist die Familie von Funktionen $\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{T}}$ linear unabhängig.
- (vii) Für alle $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ aus $(0,1)^N$ und $\vec{\iota}$ aus \mathcal{I} ist $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi})$ in n-Richtung $r(\vec{\xi}, n, i_n)$ -mal stetig differenzierbar für $r(\vec{\xi}, n, i_n) \geq 0$ und

$$r\left(\vec{\xi},n,i_{n}\right)=r_{\left(\kappa_{i_{n}}^{n},...,\kappa_{i_{n}+p_{n}+1}^{n}\right),p_{n}}\left(\xi_{s}\right).$$

Es gilt weiter: Für alle $\vec{\iota}$ aus \mathcal{I} ist $\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}$ in $C^{r_{\min}}([0,1]^N)$ mit

$$r_{\min} = \min_{n=1}^{N} \left(\min_{\xi \in (0,1)} r_{\vec{\kappa}^n, p_n} (\xi) \right),$$
 (3.8)

 $vorausgesetzt r_{min} ist nicht-negativ.$

Zu beachten ist, dass die Eigenschaften (iv) und (v), da sie auch für B-Spline-Basisfunktionen gelten, sicherstellen, dass die Gewichtsfunktion immer größer als null ist

$$\omega(\vec{\xi}) \stackrel{(3.6)}{=} \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}} \cdot \omega_{\vec{\iota}} \stackrel{(iv)}{\geq} \min_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \omega_{\vec{\iota}} \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}} \stackrel{(v)}{\geq} \min_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \omega_{\vec{\iota}} \cdot 1 \stackrel{(3.5)}{>} 0.$$
 (3.9)

Für eine andere Form der Beschreibung der Knotenvektoren wird eine mehrdimensionale Regularitätsfunktion definiert.

Definition 3.17 - N-dim. Regularitätsfunktion:

Sei $\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine NURBS-Basis von geeignetem Grad $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_N)$ auf $\mathcal{K}=\{\vec{\kappa}^n\}_{n=1}^N$. Die N-dim. Regularitätsfunktion ist gegeben durch

$$\vec{r}: [0,1]^N \longrightarrow [\mathbb{N} \cup \{\infty\}]^N$$

$$\vec{\xi} \longmapsto (r_{\vec{\kappa}^1, p_1}(\xi_1), \dots, r_{\vec{\kappa}^N, p_N}(\xi_N))$$

mit $r_{\vec{\kappa}^n,p_n}$ aus Gleichung (3.1).

Diese Funktion gibt auch gleichzeitig eine untere Schranke für die Differenzierbarkeit aller Basisfunktionen in jede jeweilige Richtung.

So lassen sich analog zu Definition $3.11~{\rm der}$ B-Spline-Funktion auch NURBS-Funktionen definieren.

Definition 3.18 – NURBS-Funktion:

Sei $\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ ein NURBS-Basis mit N-dim. Urbild. Sei $\{\vec{P}_{\vec{\iota}}\in\mathbb{R}^D\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ die Menge der Kontrollpunkte mit $D\in\mathbb{N}$. Dann ist die NURBS-Funktion in \mathbb{R}^D gegeben durch

$$\vec{\mathcal{D}}: [0,1]^N \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$\vec{\xi} \longmapsto \sum_{\vec{\imath} \in \mathcal{T}} \mathcal{N}_{\vec{\imath}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\imath}}.$$

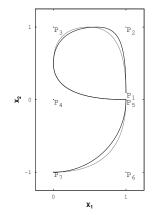


Abbildung 13: Beispiel
NURBS-Funktion
— B-Spline-Funktion aus
Abbildung 11
— NURBS-Funktion mit Basis
aus Abbildung 12 und
denselben Kontrollpunkten

3.2.2 NURBS-Funktionen über homogene Koordinaten

Die oben angesprochene Alternative, um NURBS-Funktionen zu erhalten, ist, eine B-Spline-Kurve mit homogenen Koordinaten in den \mathbb{R}^D abzubilden.

Definition 3.19 – Homogene Koordinaten und Transformationen: Sei $\mathbb{R}^D \ni \vec{P} = (p_1, \dots, p_D)^\mathsf{T}$ ein Punkt und $\omega \in \mathbb{R}$ ein zugehöriges Gewicht. Dann ist der Punkt

$$\mathbb{R}^{D+1} \ni \vec{P}^{\omega} = (\omega \cdot p_1, \dots, \omega \cdot p_D, \omega)^{\mathsf{T}}$$

der $Punkt \; \vec{P} \; dargestellt \; in homogenen Koordinaten.$ Sei

$$H: \mathbb{R}^{D+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{D} \cup \{\infty\}
(\tilde{p}_{1}, \dots, \tilde{p}_{D+1})^{\mathsf{T}} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\tilde{p}_{D+1}} \cdot (\tilde{p}_{1}, \dots, \tilde{p}_{D})^{\mathsf{T}} & \tilde{p}_{D+1} \neq 0 \\ \lim_{a \to \infty} a \cdot (\tilde{p}_{1}, \dots, \tilde{p}_{D})^{\mathsf{T}} & \tilde{p}_{D+1} = 0 \end{cases}$$
(3.10)

die Zentralprojektion von homogenen Koordinaten in den \mathbb{R}^D .

Es bleibt natürlich zu zeigen, dass man durch diese Projektion NURBS-Funktionen berechnen kann.

Lemma 3.20 – NURBS-Funktionen mit H:

Sei $\{\mathcal{N}_{\bar{\iota},\bar{p}}\}_{\bar{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine NURBS-Basis mit der Gewichtsfunktion $\omega(\vec{\xi})$ und den Gewichten $\{\omega_{\bar{\iota}}\in\mathbb{R}^+\}_{\bar{\iota}\in\mathcal{I}}$. Sei $\{\mathcal{B}_{\bar{\iota},\bar{p}}\}_{\bar{\iota}\in\mathcal{I}}$ die B-Spline-Basis mit denselben Knotenvektoren und demselben Grad. Sei $\{\vec{P}_{\bar{\iota}}\in\mathbb{R}^D\}_{\bar{\iota}\in\mathcal{I}}$ die Menge der Kontrollpunkte

 $mit \ D \in \mathbb{N}$.

Dann ist die NURBS-Funktion

$$\vec{\mathcal{D}}: [0,1]^N \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$\vec{\xi} \longmapsto \sum_{\vec{t} \in \mathcal{T}} \mathcal{N}_{\vec{t}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{t}}$$

äquivalent zur Transformation von homogenen Koordinaten einer B-Spline-Funktion

$$\vec{\mathcal{H}}: [0,1]^N \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

$$\vec{\xi} \longmapsto H\left(\sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}^{\omega_{\vec{\iota}}}\right).$$

Beweis: Eine Gleichung unter Anwendung der jeweiligen Definitionen zeigt

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{\xi}) = H\left(\sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}^{\omega_{\vec{\iota}}}\right)$$

$$\stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{\sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}}} \sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}} \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

$$\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{\omega(\vec{\xi})} \sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}} \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

$$= \sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \frac{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}}}{\omega(\vec{\xi})} \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

$$\stackrel{(3.7)}{=} \sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

$$= \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}).$$

Die NURBS-Basis ist in dieser Arbeit von besonderem Interesse. Auch für diese gibt es eine Darstellung mit homogenen Koordinaten.

Lemma 3.21 – Basisfunktionen mit H:

Seien $\{\mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ eine B-Spline-Basis, $\mathcal{N}_{\vec{\jmath},\vec{p}}$ eine NURBS-Basisfunktion mit denselben Knotenvektoren und demselben Grad. Seien $\{\omega_{\vec{\iota}}\in\mathbb{R}^+\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}}$ die Gewichte zu $\mathcal{N}_{\vec{\jmath},\vec{p}}$. Ist $\delta_{\vec{\iota},\vec{\jmath}}$ das Kronecker-Delta (7.4) und $\vec{P}_{\vec{\iota}}^{\omega_{\vec{\iota}}} = (\omega_{\vec{\iota}}\cdot\delta_{\vec{\iota},\vec{\jmath}},\omega_{\vec{\iota}})^{\mathsf{T}}$ für alle $\vec{\iota}\in\mathcal{I}$, sowie

$$\vec{\mathcal{H}} = H\left(\sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}^{\omega_{\vec{\iota}}}\right),\,$$

dann gilt $\mathcal{N}_{\vec{j},\vec{p}} = \vec{\mathcal{H}}$.

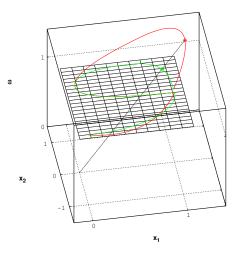


Abbildung 14: Visualisierung der Zentralprojektion H von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^2 passend zur schwarzen Kurve aus Abbildung 13

- $\sum_{\vec{t} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{t}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{t}}^{\omega t}$ - $H\left(\sum_{\vec{t} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{t}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{t}}^{\omega \tau}\right)$ - Zentralprojektion H bei $\xi = 0.1$

Beweis: Eine Gleichung unter Anwendung der jeweiligen Definitionen zeigt

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{\xi}) = H\left(\sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}^{\omega_{\vec{\iota}}}\right)
\stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{\sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}}} \sum_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota},\vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}} \cdot \delta_{\vec{\iota},\vec{j}}
\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{\omega(\vec{\xi})} \cdot B_{\vec{\jmath},\vec{q}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\jmath}}
\stackrel{(3.7)}{=} \mathcal{N}_{\vec{\jmath},\vec{p}}(\vec{\xi}).$$

Es gibt viele weitere praktische Anwendungen von homogenen Koordinaten. Zum Beispiel wirken sich bestimmte lineare Abbildungen für homogene Koordinaten als Translationen im \mathbb{R}^D nach Anwenden von H aus. Für einen Überblick muss hier auf die Literatur verwiesen werden.

Beim Behandeln von Differenzialgleichungen legt man natürlich immer besonderen Wert auf Aussagen über Ableitungen. Es folgt eine wichtige Eigenschaft der NURBS-Funktionen.

Lemma 3.22 – Ableitung von NURBS-Funktionen:

Seien $n \in \{1, ..., N\}$ und $\vec{\mathcal{D}}: [0, 1]^N \to \mathbb{R}^D$ eine NURBS-Funktion. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}) = \frac{\frac{\partial \vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi})}{\partial \xi_n} \omega(\vec{\xi}) - \vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi}) \frac{\partial \omega(\vec{\xi})}{\partial \xi_n}}{\omega(\vec{\xi})^2}$$

mit der B-Spline-Funktion $\vec{C}(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot (\omega_{\vec{\iota}} \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}})$ und der Gewichtsfunktion $\omega(\vec{\xi})$. Die Ableitungen beider B-Spline-Funktionen, $\vec{C}(\vec{\xi})$ und $\omega(\vec{\xi})$, sind gegeben durch Bemerkung 3.12. Beweis: Für alle $\vec{\xi}$ ist $\omega(\vec{\xi})$ größer als null – siehe (3.9) – und damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{n}} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \xi_{n}} \sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{N}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}$$

$$\stackrel{(3.7)}{=} \frac{\partial}{\partial \xi_{n}} \frac{\sum_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\vec{\iota}, \vec{p}}(\vec{\xi}) \cdot \omega_{\vec{\iota}} \cdot \vec{P}_{\vec{\iota}}}{\omega(\vec{\xi})}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_{n}} \frac{\vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi})}{\omega(\vec{\xi})}$$

$$= \frac{\frac{\partial \vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi})}{\partial \xi_{n}} \omega(\vec{\xi}) - \vec{\mathcal{C}}(\vec{\xi}) \frac{\partial \omega(\vec{\xi})}{\partial \xi_{n}}}{\omega(\vec{\xi})^{2}}.$$

Bemerke, dass insbesondere auch die Ableitungen von NURBS-Basisfunktionen durch Lemma 3.22 gegeben sind.

Bemerkung 3.23 – Ableitungen sind keine NURBS-Funktionen:

Die Ableitungen von NURBS-Funktionen enthalten Produkte von Basisfunktionen und sind somit keine NURBS-Funktionen nach Definition 3.18. Insbesondere gilt dies für NURBS-Basisfunktionen.

Mithilfe von NURBS-Funktionen lässt sich nun die Frage nach der Implementierung des Gebietes aus Bemerkung 2.7 beantworten.

Definition 3.24 – Gebietsfunktion:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^D$. Dann heißt \mathcal{D} Gebietsfunktion zu Ω , wenn folgendes gilt:

- $\vec{\mathcal{D}}: [0,1]^D \to \mathbb{R}^D$ ist eine NURBS-Funktion,
- $\vec{\mathcal{D}}$ ist ein Diffeomorphismus und
- das Bild von $\vec{\mathcal{D}}$ ist $\overline{\Omega}$.

Es wird zunächst in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass es zu Ω eine geeignete Gebietsfunktion gibt. In Abschnitt 4.3 wird dieser Ansatz noch weiter verallgemeinert.

Bemerkung 3.25:

Es gibt Gebiete, die sich nicht als Gebietsfunktion darstellen lassen. Für diese Gebiete kann aber meist eine sehr gute Näherung gefunden werden. Algorithmen zum Approximieren des Gebietes sind zum Beispiel in [18] zu finden.

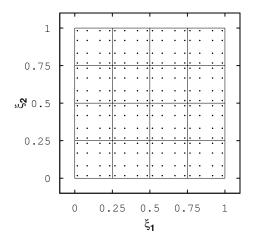
Die Definition 3.15 teilt das Urbild in Gitterzellen. Die folgende Definition vergittert dagegen das Bild wie in der Numerik üblich. Die beiden Gitter werden in Abbildung 15 verglichen.

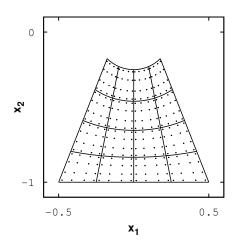
Definition 3.26 – Bildgitter:

Seien $\vec{\mathcal{D}}$ eine Gebietsfunktion und $\underline{\mathcal{Z}}$ das Urbildgitter zur Basis dieser Gebietsfunktion. Dann ist das *Bildgitter* \mathcal{Z} einer NURBS-Basis definiert durch

$$\mathcal{Z} = \left\{ \vec{\mathcal{D}} \left(Z \right) \subset \Omega : Z \in \underline{\mathcal{Z}} \right\}. \tag{3.11}$$

•





 $\begin{array}{cccc} \textbf{Abbildung 15:} & \textbf{Gittervergleich} \\ \textbf{links:} & \textbf{Urbildgitter} & \textbf{rechts:} & \textbf{Bildgitter} \\ \textbf{---} & \textbf{Gitterlinien} & \bullet & \textbf{Gaußpunkte} \end{array}$

3.3 Verfeinerung

Die NURBS-Funktionen eignen sich nicht nur zur Implementierung des Gebietes. Als Funktionen über einer Basis kann man sie außerdem dazu verwenden, die Testräume zu definieren.

Zur Vereinfachung werden die folgenden Argumentationen und Techniken in nur einer Dimension geführt. Sie lassen sich jedoch ohne Schwierigkeiten auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.

Für die Konvergenz numerischer Probleme mit Finite-Elemente-Techniken ist von entscheidender Bedeutung, wie groß der Wert von h aus Gleichung (2.14) ist. Anhand von der Gleichung (3.2) aus Lemma 3.5 ist ersichtlich, dass die Größe des Trägers im Urbildraum direkt mit dem Abstand der Knoten im Knotenvektor zusammenhängt. Bei einer feineren Zerlegung von [0,1] in mehr Knoten ist der Träger einer Basisfunktion kleiner als der Träger einer Basisfunktion mit gleichem Grad bei einer gröberen Zerlegung von [0,1] – vergleiche hierfür das erste und dritte Bild auf der rechten Seite von Abbildung 16. Dies überträgt sich, wie man an der späteren Konstruktion sieht, auch auf den Bildraum.

Ein großer Vorteil der NURBS-Funktionen ergibt sich aus der Möglichkeit, aus einer Darstellung des Gebietes aus den Knotenvektoren und den Kontrollpunkten eine andere Darstellung mit feineren Knotenvektoren und mehr Kontrollpunkten zu errechnen, ohne die Parametrisierung des Bildes der Funktion zu ändern. Dies ist in Abbildung 16 daran zu erkennen, dass sich der Halbkreis oben und unten auf der linken Seite nicht ändert. Diesen Vorgang nennt man h-Verfeinerung (engl. "h-refinement" oder "knot insertion").

3.3.1 h-Verfeinerung

Wie der englische Begriff "knot insertion" nahe legt, geht es um das Hinzufügen von Knoten in den Knotenvektor. Sei

$$\vec{\mathcal{D}}^{\mathrm{alt}}(\xi) = H\left(\sum_{i \in I(\vec{\kappa}^{\mathrm{alt}}, p)} \mathcal{B}_{i,p}^{\mathrm{alt}}(\xi) \cdot \vec{P}_i^{\omega_{\mathrm{alt}}}\right)$$

eine NURBS-Funktion auf $\vec{\kappa}^{\text{alt}} = (\kappa_1^{\text{alt}}, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}}^{\text{alt}})$. Sei κ^+ in $[\kappa_j^{\text{alt}}, \kappa_{j+1}^{\text{alt}})$, der Knoten der hinzugefügt werden soll. Ziel der h-Verfeinerung ist es, eine NURBS-Funktion $\vec{\mathcal{D}}^{\text{neu}}(\xi) = H\left(\sum_{i \in I(\vec{\kappa}^{\text{neu}},p)} \mathcal{B}_{i,p}^{\text{neu}}(\xi) \cdot \vec{P}_i^{\omega_{\text{neu}}}\right)$ auf

$$\vec{\kappa}^{\text{neu}} = \left(\kappa_1^{\text{neu}} = \kappa_1^{\text{alt}}, \dots, \kappa_j^{\text{neu}} = \kappa_j^{\text{alt}}, \kappa_{j+1}^{\text{neu}} = \kappa^+, \kappa_{j+2}^{\text{neu}} = \kappa_{j+1}^{\text{alt}}, \dots, \kappa_{N_{\bar{\kappa}}+1}^{\text{neu}} = \kappa_{N_{\bar{\kappa}}}^{\text{alt}}\right)$$

zu finden, so dass $\vec{\mathcal{D}}^{\rm alt} = \vec{\mathcal{D}}^{\rm neu}$ gilt.

Man erhält Gleichheit, wenn man die homogenen Kontrollpunkte wie folgt

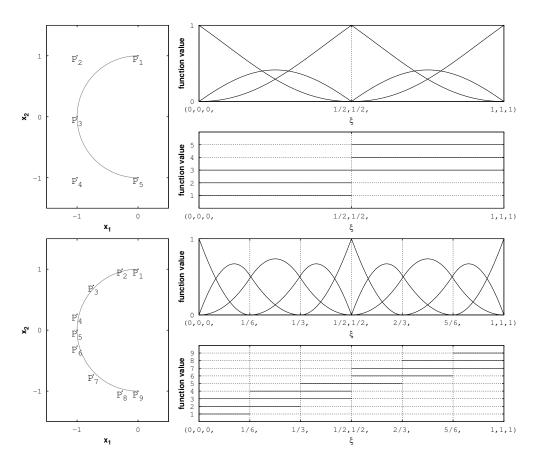


Abbildung 16: Beispiel h-Verfeinerung

links oben: NURBS-Funktion mit Kontrollpunkten $H(\vec{P}_i^{\omega_{\rm alt}})$

 $\begin{array}{ll} \text{rechts Bild 1:} & \mathcal{N}_{i,2}^{\text{alt}} \\ \text{rechts Bild 2:} & i \cdot \chi_{\text{supp} \, \mathcal{N}_{i,2}^{\text{alt}}} \end{array}$

links unten: NURBS-Funktion mit Kontrollpunkten $H(\vec{P}_i^{\omega_{\text{neu}}})$ rechts Bild 3: $\mathcal{N}_{i,2}^{\text{neu}}$

rechts Bild 4: $i \cdot \chi_{\text{supp } \mathcal{N}_{i,2}}^{\text{neu}}$

vor h-Verfeinerung vor h-Verfeinerung vor h-Verfeinerung

nach h-Verfeinerung nach h-Verfeinerung nach h-Verfeinerung

wählt:

$$\vec{P}_i^{\omega_{\text{neu}}} = \alpha_i \vec{P}_i^{\omega_{\text{alt}}} - (1 - \alpha_i) \vec{P}_{i-1}^{\omega_{\text{alt}}}$$

 $_{
m mit}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq j-p \\ \frac{\kappa^+ - \kappa_i}{\kappa_{i+p} - \kappa_i} & j-p+1 \leq i \leq j \\ 0 & j+1 \leq i \end{cases}.$$

Die Rechnung ist in [18] zu finden.

Es gibt effiziente Algorithmen für diesen Basiswechsel zum Beispiel in [18],

auch wenn mehrere Knoten gleichzeitig hinzugefügt werden und mehrere Dimensionen vorhanden sind. Berechnet werden die neuen Kontrollpunkte. Bedingungen dafür, dass die Parametrisierung bei einer h-Verfeinerung erhalten bleibt, ist lediglich, dass die Ursprungsknoten im neuen Knotenvektor vorhanden sind und dass der Grad der Basis sich nicht ändert.

Wurde ein Knoten zu einem früheren Zeitpunkt hinzugefügt und kein Basiswechsel zu einem höheren Grad unternommen, kann man diesen auch wieder entfernen, ohne die Parametrisierung zu ändern. Im Allgemeinen ändert sich jedoch nicht nur die Parametrisierung, sondern auch das Bild von einer NURBS-Funktion beim algorithmischen Entfernen von Knoten.

Für die einfache Isogeometrische Analysis ohne Multigrid-Ansätze ist jedoch nur das Hinzufügen von Knoten von Bedeutung. Die einfachste Möglichkeit, ein Gitter zu verfeinern, ist ein globales gleichmäßiges Hinzufügen von n Knoten in jede Zelle.

Definition 3.27 – Uniforme h-Verfeinerung in (n+1) Teilzellen:

Fügt man in den Knotenvektor $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_{N_{\vec{\kappa}}})$ einer NURBS-Funktion für alle j mit $\kappa_j < \kappa_{j+1}$ die n Knoten

$$\frac{1}{n+1} \cdot (\kappa_{j+1} - \kappa_j) + \kappa_j, \dots, \frac{n}{n+1} \cdot (\kappa_{j+1} - \kappa_j) + \kappa_j$$

ein, so spricht man von einer uniformen h-Verfeinerung in (n+1) Teilzellen.

Diese Verfeinerung wurde für alle numerischen Tests innerhalb dieser Arbeit verwendet. In Abbildung 16 ist eine Verfeinerung in drei Teilzellen zu sehen.

Bemerkung 3.28 – Globale uniforme h-Verfeinerung:

Die uniforme h-Verfeinerung in (n + 1) Teilzellen ist eine globale Verfeinerung.

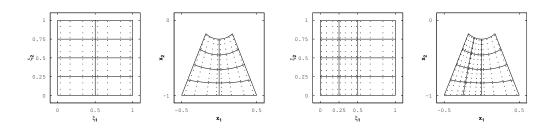


Abbildung 17: Gittervergleich bei Hinzufügen des Knoten ¹/4 in den ersten Knotenvektor links: Urbildgitter ohne Verfeinerung mittig rechts: Urbildgitter mit Verfeinerung rechts: Bildgitter mit Verfeinerung rechts: Bildgitter mit Verfeinerung Gütterlinien

■ Gitterlinien Gaußpunkte

Eine der wenigen Schwächen der Isogeometrischen Analysis mit NURBS ist, dass es keine rein lokale Verfeinerung gibt.

Bemerkung 3.29 – h-Verfeinerung hat globalen Einfluss:

Das Einfügen eines neuen Knoten in einen Knotenvektor teilt alle Gitterzellen im Urbildgitter und Bildgitter in der entsprechenden Richtung.

Diesen Effekt kann man in Abbildung 17 beobachten.

Bemerkung 3.30 - h-Verfeinerung kommutativ in Richtungen:

Die h-Verfeinerung ist kommutativ in den Richtungen.

Zum Beispiel führt das Hinzufügen von einem Knoten κ_1 in den ersten Knotenvektor und anschließendes Hinzufügen von einem Knoten κ_2 in den zweiten Knotenvektor zur selben Darstellung wie das Hinzufügen von κ_2 den zweiten Knotenvektor und anschießendes Hinzufügen von κ_1 in den ersten Knotenvektor.

3.3.2 p-Verfeinerung

Für fast alle numerischen Verfahren ist der Grad der Basisfunktionen von entscheidender Bedeutung für die Konvergenzordnung. Deshalb ist auch eine weitere Verfeinerungsmethode für die Isogeometrische Analysis von großem Interesse. Die p-Verfeinerung stellt einen Weg dar, den Grad der Basis zu erhöhen, ohne dabei die Form einer NURBS-Funktion zu verändern. Sei $\vec{\mathcal{D}}^{\text{alt}}(\xi) = H\left(\sum_{i \in I(\vec{\kappa}^{\text{alt}},p)} \mathcal{B}_{i,p}^{\text{alt}}(\xi) \cdot \vec{P}_i^{\omega_{\text{alt}}}\right)$ eine NURBS-Funktion auf

$$\vec{\kappa}^{\mathrm{alt}} = \big(\underbrace{\zeta_1 = 0, \dots, \zeta_1 = 0}_{p+1}, \underbrace{\zeta_2, \dots, \zeta_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\zeta_{k-1}, \dots, \zeta_{k-1}}_{m_{k-1}}, \underbrace{\zeta_k = 1, \dots, \zeta_k = 1}_{p+1}\big)$$

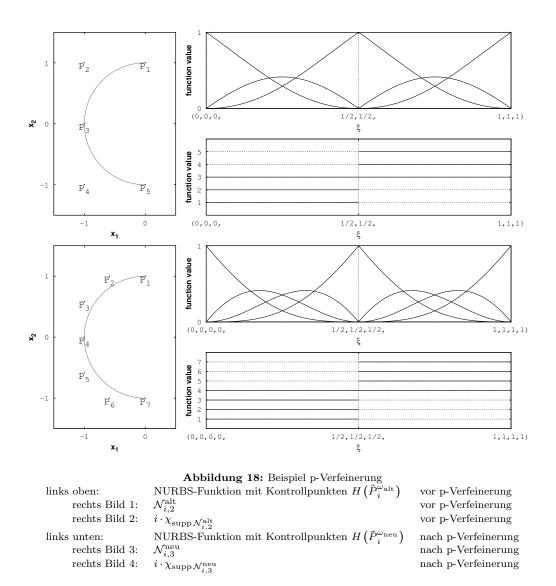
mit $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Dann ist das Ziel der p-Verfeinerung um einen Grad, den Knotenvektor $\vec{\kappa}^{\text{neu}}$ und $\vec{P}_i^{\omega_{\text{neu}}}$ zu bestimmen, so dass für alle ξ in [0,1] gilt

$$\vec{\mathcal{D}}^{\mathrm{alt}}(\xi) = \vec{\mathcal{D}}^{\mathrm{neu}}(\xi) = H\left(\sum_{i \in I(\vec{\kappa}^{\mathrm{neu}}, p+1)} \mathcal{B}^{\mathrm{neu}}_{i, p+1}(\xi) \cdot \vec{P}^{\omega_{\mathrm{neu}}}_{i}\right).$$

Es ist im allgemeinen Fall möglich, die $\vec{P}_i^{\omega_{\text{neu}}}$ algorithmisch zu berechnen, wenn $\vec{\kappa}^{\text{neu}}$ wie folgt gewählt wird

$$\vec{\kappa}^{\text{neu}} = (\underbrace{\zeta_1 = 0, \dots, \zeta_1 = 0}_{p+2}, \underbrace{\zeta_2, \dots, \zeta_2}_{m_2+1}, \dots, \underbrace{\zeta_{k-1}, \dots, \zeta_{k-1}}_{m_{k-1}+1}, \underbrace{\zeta_k = 1, \dots, \zeta_k = 1}_{p+2}).$$

Wieder sind die Algorithmen in [18] zu finden, auch für den mehrdimensionalen Fall und für Verfeinerungen um mehr als einen Grad.



Bemerkung 3.31 - p-Verfeinerung kommutativ in Richtungen:

Die p-Verfeinerung ist kommutativ in den Richtungen.

Leider erhöht die p-Verfeinerung nicht auch noch die Regularität. Dies wäre häufig wünschenswert, da die physikalische Lösung meistens als glatt angenommen wird. Man hofft durch eine häufiger stetig-differenzierbare Annäherung, eine bessere Approximation an die glatte physikalische Lösung zu erhalten.

Bemerkung 3.32 – p-Verfeinerung erhöht nicht Regularität:

Die p-Verfeinerung erhöht nicht die Regularität der vorhandenen Knoten.

Aber alle durch h-Verfeinerung hinzugefügten Knoten – und tendenziell auch jede an diesen Knoten beteiligte Basisfunktion – hat eine höhere Regularität, als würde man den Knoten in die Basis mit niedrigerem Grad hinzufügen. Dies ist der Grund, warum man in fast allen Fällen erst p-verfeinert und anschließend h-verfeinert. Dies motiviert auch folgende Namensgebung.

Bemerkung 3.33 – k-Verfeinerung:

Das Hintereinanderschalten von p-Verfeinerung und anschließender h-Verfeinerung in dieser Reihenfolge nennt man auch k-Verfeinerung.

Zu beachten ist auch, dass die Anzahl an Basisfunktionen, die ungleich null sind, in jeder Zelle durch eine p-Verfeinerung steigt. Dies ist auch in den Bildern auf der rechten Seite in Abbildung 18 zu sehen. Die Anzahl der Zellen verändert sich hingegen nicht.

Anschließend noch eine aus den Knotenvektoren ersichtliche Bemerkung.

Bemerkung 3.34 – p- und h-Verfeinerung nicht kommutativ:

Die p- und h-Verfeinerungen sind nicht kommutativ. Im Allgemeinen führt eine p-Verfeinerung mit anschließender h-Verfeinerung zu einer anderen Darstellung als eine h-Verfeinerung mit anschließender p-Verfeinerung.

Ein neuer Knoten κ^+ , dessen Wert vorher nicht im Knotenvektor $\vec{\kappa}^{\text{alt}}$ vorkommt, hat beim Hinzufügen die Regularität von p-1. Bei anschließender p-Verfeinerung bleibt die Regularität bei (p+1)-2=p-1.

Wird dagegen erst $\vec{\kappa}^{\text{alt}}$ einmal p-verfeinert und dann κ^+ hinzugefügt, so ist die Regularität von κ^+ gleich (p+1)-1=p.

Es wurde schon in Lemma 3.23 benutzt, dass NURBS-Basisfunktionen auch formal als NURBS-Funktion schreiben kann. Dies kann man ausnutzen um das Folgende zu bemerken.

Bemerkung 3.35 – Darstellung von Basisfunktionen:

Insbesondere Basisfunktionen auf einen groben Knotenvektor können durch Basisfunktionen eines h- oder p-verfeinerten Knotenvektors dargestellt werden.

In Abbildung 19 wird diese exemplarisch an einer B-Splinebasisfunktion eine uniformen h-Verfeinerung und eine p-Verfeinerung durchgeführt.

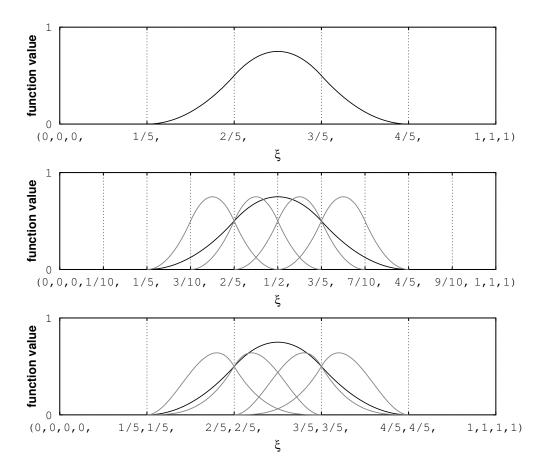


Abbildung 19: Darstellung einer Basisfunktionen unter h- und p-Verfeinerung original Basis $\mathcal{B}^{\mathrm{alt}}_{i,2}$ – h-verfeinerte Basis $\mathcal{B}^{\mathrm{neu}_h}_{i,2}$ – p-verfeinerte Basis $\mathcal{B}^{\mathrm{neu}_p}_{i,3}$

4 Galerkin-Methode der IGA

In diesem Kapitel werden die endlichen Räume V_h und Q_h definiert und damit die Bemerkung 2.4 wieder aufgegriffen. Es werden alle notwendigen Schritte für eine numerische Berechnung erläutert und es wird eine mögliche Approximation der Dirichlet-Randwertbedingung vorgestellt – siehe Bemerkung 2.5.

4.1 Taylor-Hood-Raum

Der Grundgedanke für die Konstruktion der endlich-dimensionalen Räume ist, dass die gleichen Basisfunktionen sowohl für die Definition des Gebietes als auch für V_h und Q_h benutzt werden. Dies spiegelt sich auch in der Bezeichnung "isogeometrisch" wider, da man dies mit "gleichgeometrischen" übersetzen kann.

Die Konstruktion von V_h und Q_h hat Ähnlichkeiten mit derjenigen von einer "mapped"-Version von klassischen Finite-Elementen. Jedoch besteht der große Unterschied darin, dass eine globale Funktion zum Transformieren benutzt wird. Dies hat zur Folge, dass die Differenzierbarkeit erhalten bleibt.

Definition 4.1 – Taylor-Hood-Raum:

Sei $\vec{\mathcal{D}}$ eine Gebietsfunktion. Dann ist der Taylor-Hood-Raum (V_h, Q_h) definiert als

$$\begin{split} V_h &= \{\vec{\phi}_i(\vec{x})\}_{i=1}^{N_V} \\ &= \{\vec{\phi}_i(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}))\}_{i=1}^{N_V} \\ Q_h &= \{\psi_i(\vec{x})\}_{i=1}^{N_Q} \\ &= \{\underline{\psi}_i(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}))\}_{i=1}^{N_Q}. \end{split}$$

Seien weiter $\left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},p_V\cdot\vec{1}}^V\right\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}_V}$ und $\left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},p_Q\cdot\vec{1}}^Q\right\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}_Q}$ zwei NURBS-Basen von $\vec{\mathcal{D}}$ mit $p_V>p_Q$ und den D-dimensionalen Regularitätsfunktionen \vec{r}_V und \vec{r}_Q zu diesen Basen mit $\vec{r}_V(\vec{\xi})=\vec{r}_Q(\vec{\xi})\geq -1$, für alle $\vec{\xi}\in[0,1]^D$. Definiere weiter

$$\begin{split} & \{\underline{\vec{\phi}}_{i}\left(\vec{\xi}\right)\}_{i=1}^{N_{V}} = \bigcup_{d=1}^{D} \left\{\vec{e}_{d} \cdot \mathcal{N}_{\vec{\iota}_{V}, p_{V} \cdot \vec{1}}^{V} : \operatorname{Tr}\left(\vec{e}_{d} \cdot \mathcal{N}_{\vec{\iota}, p_{V} \cdot \vec{1}}^{V}\right) = \vec{0}\right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_{V}} \\ & \{\underline{\psi}_{i}\left(\vec{\xi}\right)\}_{i=1}^{N_{Q}} = \begin{cases} \left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota}, p_{Q} \cdot \vec{1}}^{Q}\right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_{Q}, \vec{\iota} \neq \vec{1}} & \Gamma_{\operatorname{natr.}} = \varnothing \\ \left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota}, p_{Q} \cdot \vec{1}}^{Q}\right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_{Q}} & \Gamma_{\operatorname{natr.}} \neq \varnothing \end{cases}, \end{split}$$

wobei \vec{e}_d der d-te Einheitsvektor ist.

Zu beachten ist, dass die Gitter von $\left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},p_V\cdot\vec{1}}^V\right\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}_V}$ und $\left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},p_Q\cdot\vec{1}}^Q\right\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}_Q}$ gleich sind, da $\vec{r}_V(\vec{\xi}) = \vec{r}_Q(\vec{\xi})$ für alle $\vec{\xi}\in[0,1]^D$ gilt.

Bemerkung 4.2 – Lokale Bedingung für Druckkonstante:

Im Falle, dass es keinen Rand mit natürlichen Randwertbedingungen bei der Galerkin-Methode gibt, ist es üblich, die globale Bedingung

$$\int_{\Omega} q_h \, d\vec{x} = 0 \tag{4.1}$$

aus Gleichung (2.2) durch die lokale Bedingung

$$\mathcal{N}_{\vec{1},p_Q\cdot\vec{1}}^Q = 0 \tag{4.2}$$

zu ersetzen. Beide Bedingungen erfüllen den Zweck, die Konstante des Druckraums zu fixieren und sind damit gleichwertig. Sei \tilde{q}_h der durch die Forderung (4.2) erhaltene Druck, dann erfüllt

$$q_h = \tilde{q}_h - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{q}_h \, d\vec{x} \tag{4.3}$$

Gleichung
$$(4.1)$$
.

Bemerkung 4.3 – Konstruktion von Taylor-Hood-Räumen:

Ein Weg zur Konstruktion eines Taylor-Hood-Raumes ist, eine möglichst einfache Gebietsfunktion durch folgende Schritte anzupassen:

- 1. Speichern der Gebietsfunktion für alle späteren Rechnungen,
- 2. Erhöhen des Grades durch p-Verfeinerungen auf den gewünschten Grad von p_Q ,
- 3. Einfügen von genügend Knoten, sodass das gewünschte h erreicht wird,
- 4. Speichern der Basis als Q_h ,
- 5. Vornehmen einer weiteren p-Verfeinerung und
- 6. Speichern dieser Basis als eine Koordinate von V_h .

4.1.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrix

Für die Anwendung der Galerkin-Methode wird ein Taylor-Hood-Raum gewählt. Für die Berechnung der Gleichungen (2.9) bis (2.13) ist ein Term von besonderer Bedeutung: $\nabla_{\vec{x}} \vec{\phi}_i(\vec{x})$.

Es wird begonnen, diesen Term umzuformen mit dem Ziel, dass die Abhängigkeit von \vec{x} in eine Funktion von $\vec{\xi}$ umgestellt wird. Nach Kettenregel gilt

$$\nabla_{\vec{x}}\vec{\phi}_{i}(\vec{x}) = \nabla_{\vec{x}} \left[\vec{\phi}_{i} \left(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}) \right) \right]$$

$$= \nabla_{\xi}\vec{\phi}_{i} \left(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}) \right) \nabla_{\vec{x}}\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}). \tag{4.4}$$

Dies ist der erste Teil der Umformung. Für den zweiten Teil wird folgender Ansatz gemacht

$$\begin{split} \operatorname{Id} &= \nabla_{\vec{\xi}} \vec{\xi} \\ &= \nabla_{\vec{\xi}} \left[\vec{\mathcal{D}}^{-1} \left(\vec{\mathcal{D}} (\vec{\xi}) \right) \right] \\ &= \left[\nabla_{\vec{x}} \vec{\mathcal{D}}^{-1} \right] \left(\vec{\mathcal{D}} (\vec{\xi}) \right) \nabla_{\vec{\xi}} \vec{\mathcal{D}} (\vec{\xi}) \end{split}$$

mit der direkten Folge

$$\left[\nabla_{\vec{x}}\vec{\mathcal{D}}^{-1}\right]\left(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right) = \left[\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right]^{-1}.\tag{4.5}$$

Beiden Rechnungen werden kombiniert, indem $\tilde{\mathcal{D}}(\vec{\xi})$ für \vec{x} substituiert und Gleichung (4.5) in (4.4) eingesetzt wird:

$$\nabla_{\vec{x}}\vec{\phi}_{i}\left(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right) = \nabla_{\xi}\underline{\vec{\phi}}_{i}\left(\vec{\xi}\right)\left[\nabla_{\vec{x}}\vec{\mathcal{D}}^{-1}\right]\left(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right)$$

$$= \nabla_{\xi}\underline{\vec{\phi}}_{i}\left(\vec{\xi}\right)\left[\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right]^{-1}$$

$$= \Lambda_{i}(\vec{\xi}). \tag{4.6}$$

Damit ist eine von \vec{x} und $\vec{\mathcal{D}}^{-1}$ unabhängige Umformung gefunden. Aus Lemma 3.22 folgt als grundlegende Eigenschaft, dass alle Komponenten von $\underline{\Lambda}_i(\vec{\xi})$ bestimmt werden können.

Unter Verwendung des Transformationssatzes für Integrale (7.6) und der eben gewonnen Gleichung (4.6) kann mit der Berechnung von (2.9) begonnen wer-

den:

$$a_{i,j} = a\left(\vec{\phi}_{j}, \vec{\phi}_{i}\right)$$

$$= \nu \int_{\Omega} \left\langle \nabla_{\vec{x}} \vec{\phi}_{j}(\vec{x}), \nabla_{\vec{x}} \vec{\phi}_{i}(\vec{x}) \right\rangle d\vec{x}$$

$$= \nu \int_{[0,1]^{D}} \left\langle \nabla_{\vec{x}} \vec{\phi}_{j}\left(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right), \nabla_{\vec{x}} \vec{\phi}_{i}\left(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})\right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \nu \int_{[0,1]^{D}} \left\langle \underline{\Lambda}_{j}(\vec{\xi}), \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \nu \sum_{Z \in \underline{Z}} \int_{Z} \left\langle \underline{\Lambda}_{j}(\vec{\xi}), \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \nu \sum_{Z \subset \left[\text{supp }\underline{\Lambda}_{j}(\vec{\xi}) \cup \text{supp }\underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi})\right]} \int_{Z} \left\langle \underline{\Lambda}_{j}(\vec{\xi}), \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}.$$

Es bleibt eine Quadratur für Gitterzellen zu wählen. Angenommen, es wird eine Gauß-Quadratur gewählt mit N_{α} Gauß-Punkten. Seien γ_{α} die Gauß-Punkte und λ_{α} die zugehörigen Gauß-Gewichte auf [-1,1] für alle α in $\{1,\ldots,N_{\alpha}\}$. Für eine beliebige Funktion

$$f: \bigotimes_{d=1}^{D} (\kappa_{l_d}^d, \kappa_{l_{d+1}}^d) = Z \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi_1, \dots, \xi_D) \longmapsto f(\xi_1, \dots, \xi_D)$$

mit $\kappa^d_{l_d} < \kappa^d_{l_{d+1}}$ für alle $d \in \{1, \dots, D\}$ und der Transformation

$$\zeta_{Z}: [-1,1]^{D} \longrightarrow Z \subset [0,1]^{D}$$

$$\vec{y} \longmapsto \left(\frac{\kappa_{l_{1}+1}^{1} - \kappa_{l_{1}}^{1}}{2} y_{1} + \frac{\kappa_{l_{1}+1}^{1} + \kappa_{l_{1}}^{1}}{2}, \dots, \frac{\kappa_{l_{D}+1}^{D} - \kappa_{l_{D}}^{D}}{2} y_{D} + \frac{\kappa_{l_{D}+1}^{D} + \kappa_{l_{D}}^{D}}{2}\right)$$

gilt

$$\int_{\vec{\xi} \in Z} f(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \int_{\vec{y} \in [-1,1]^{D}} f(\zeta_{Z}(\vec{y})) |\det(\nabla \zeta_{Z})| d\vec{y}$$

$$\approx \sum_{\alpha_{1}=1}^{N_{\alpha}} \dots \sum_{\alpha_{D}=1}^{N_{\alpha}} \left(\prod_{d=1}^{D} \lambda_{\alpha_{d}} \right) f(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z}) |\det(\nabla \zeta_{Z})|$$

$$= \sum_{\vec{\alpha} \in \{1, \dots, N_{\alpha}\}^{D}} \lambda_{\vec{\alpha}} f(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z}) |\det(\nabla \zeta_{Z})|$$

mit $\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z = \zeta_Z(\gamma_{\alpha_1}, \dots, \gamma_{\alpha_D})$, $\lambda_{\vec{\alpha}} = \prod_{d=1}^D \lambda_{\alpha_d}$ und $|\det(\nabla \zeta_Z)| = \left|\prod_{d=1}^D \frac{\kappa_{l_d+1}^d - \kappa_{l_d}^d}{2}\right|$. Die Lage von Gauß-Punkten im Urbild und im Bild kann man zum Beispiel

in Abbildung 15 auf Seite 30 sehen. Schließlich ergibt sich

$$a_{i,j} \approx \nu \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \underline{\Lambda}_{j} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right), \underline{\Lambda}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right)| \det (\nabla \zeta_{Z})|.$$
 (4.7)

Bemerkung 4.4 – Fehler durch die Gauß-Quadratur:

Es gibt eine Gauß-Quadratur angepasst an NURBS in [11]. In dieser Arbeit wurde jedoch die Standard-Gauß-Quadratur für Polynome verwendet – auch wenn diese die rationalen NURBS-Basisfunktionen nicht exakt integriert. Die Anzahl an Gauß-Punkten N_{α} wurde dabei so gewählt, dass $2(N_{\alpha}-1)$ mindestens so groß wie p_V+p_{ω} ist, wobei p_{ω} maximale der Grad der Gewichtsfunktion von $\vec{\mathcal{D}}$ ist. Diese Konstruktion ist immerhin auf Gittern mit B-Spline-Basisfunktionen (alle NURBS-Gewichte sind gleich) und, wenn der Term $|\det \nabla \vec{\mathcal{D}} (\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z)|$ ein Polynom von niedrigem Grad ist, eine exakte Integration aufgrund von Lemma 3.6.

Bemerkung 4.5 – B-Splinebasis statt NURBS-Basis:

Einige Autoren benutzten statt den NURBS-Basisfunktionen die B-Spline-basisfunktionen für die Definition der Testräume, da diese besser integrierbar sind und leichter zu berechnen. Allerdings ist auch hier die Integration durch den Term $|\det \nabla \vec{\mathcal{D}}\left(\vec{\xi}_{\tilde{\alpha}}^{Z}\right)|$ nicht exakt.

Die Matrizen und Vektoren (2.10) bis (2.13) können auf ähnliche Weise berechnet werden. Für Gleichung (2.10) wird der Spuroperator für Matrizen tr benötigt

$$b_{j,i} = b\left(\vec{\phi}_{i}, \psi_{j}\right)$$

$$= -\int_{\Omega} \left\langle \nabla \cdot \vec{\phi}_{i}(\vec{x}), \psi_{j}(\vec{x}) \right\rangle d\vec{x}$$

$$= -\int_{\Omega} \left\langle \operatorname{tr} \nabla \vec{\phi}_{i}(\vec{x}), \psi_{j}(\vec{x}) \right\rangle d\vec{x}$$

$$= -\int_{[0,1]^{D}} \left\langle \operatorname{tr} \nabla \vec{\phi}_{i}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})), \psi_{j}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= -\int_{[0,1]^{D}} \left\langle \operatorname{tr} \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}), \underline{\psi}_{j}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= -\sum_{Z \in \underline{Z}} \int_{Z} \left\langle \operatorname{tr} \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}), \underline{\psi}_{j}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= -\sum_{Z \subset \left[\operatorname{supp} \underline{\psi}_{j} \cup \operatorname{supp} \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi})\right]} \int_{Z} \left\langle \operatorname{tr} \underline{\Lambda}_{i}(\vec{\xi}), \underline{\psi}_{j}(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}.$$

Mit Einsetzen der Quadratur folgt

$$b_{j,i} \approx -\sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \operatorname{tr} \underline{\Lambda}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right), \underline{\psi}_{j} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle | \det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) | \det (\nabla \zeta_{Z}) |. \tag{4.8}$$

Sei $\vec{u}_h^{\ell-1}(\vec{x}) = \underline{\vec{u}}_h^{\ell-1}(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x})) = (\vec{\mu}_h^{\ell-1}(\vec{x}) + \vec{w}(\vec{x}))$ die Lösung aus dem vorigen Iterationsschritt. Es gibt für Gleichung (2.11) die nachfolgende Rechnung

$$c_{i,j}^{\ell-1} = c(\vec{u}_h^{\ell-1}, \vec{\phi}_j, \vec{\phi}_i)$$

$$= \int_{\Omega} \left\langle (\vec{u}_h^{\ell-1}(\vec{x}) \cdot \nabla) \vec{\phi}_j(\vec{x}), \vec{\phi}_i(\vec{x}) \right\rangle d\vec{x}$$

$$= \int_{\Omega} \left\langle \nabla \vec{\phi}_j(\vec{x}) \vec{u}_h^{\ell-1}(\vec{x}), \vec{\phi}_i(\vec{x}) \right\rangle d\vec{x}$$

$$= \int_{[0,1]^D} \left\langle \underline{\Lambda}_j(\vec{\xi}) \underline{\vec{u}}_h^{\ell-1}(\vec{\xi}), \underline{\vec{\phi}}_i(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \sum_{Z \subset \left[\text{supp } \underline{\vec{\phi}}_i \cup \text{supp } \underline{\Lambda}_j(\vec{\xi}) \right]} \int_{Z} \left\langle \underline{\Lambda}_j(\vec{\xi}) \underline{\vec{u}}_h^{\ell-1}(\vec{\xi}), \underline{\vec{\phi}}_i(\vec{\xi}) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$\approx \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \underline{\Lambda}_j(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z) \underline{\vec{u}}_h^{\ell-1}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z), \underline{\vec{\phi}}_i(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z)| \det (\nabla \zeta_Z)|. \tag{4.9}$$

Der Kraftterm der rechten Seite wird wie folgt bestimmt

$$F(\vec{\phi}_{i}) = \int_{\Omega} \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{\phi}_{i}(\vec{x}) \rangle d\vec{x}$$

$$= \int_{[0,1]^{D}} \langle \vec{f}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})), \underline{\vec{\phi}}_{i}(\vec{\xi}) \rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \sum_{Z \in \text{supp}} \int_{\underline{\vec{\phi}}_{i}} \int_{Z} \langle \vec{f}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})), \underline{\vec{\phi}}_{i}(\vec{\xi}) \rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$\approx \sum_{Z} \sum_{\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}} \langle \vec{f}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\bar{\alpha}}^{Z})), \underline{\vec{\phi}}_{i}(\vec{\xi}_{\bar{\alpha}}^{Z}) \rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\bar{\alpha}}^{Z})| |\det (\nabla \zeta_{Z})|. \tag{4.10}$$

Für die rechte Seite der Geschwindigkeit (Gleichung (2.12)) wird die Gleichung (4.10) mit zwei Ergebnissen kombiniert, die analog zu den Gleichungen (4.7) und (4.9) berechnet werden

$$\begin{split} f_{i}^{\ell-1} &= F_{\vec{w}} \left(\vec{\mu}_{h}^{\ell-1}, \vec{\phi}_{i} \right) \\ &= F(\vec{\phi}_{i}) - a(\vec{w}, \vec{\phi}_{i}) - c(\vec{u}_{h}^{\ell-1}, \vec{w}, \vec{\phi}_{i}) \\ &\approx \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \vec{f} \left(\vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right), \underline{\vec{\phi}}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) || \det (\nabla \zeta_{Z}) || \\ &- \nu \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \nabla \vec{w} \left(\vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right), \underline{\Lambda}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) || \det (\nabla \zeta_{Z}) || \\ &- \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \nabla \vec{w} \left(\vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right), \underline{\vec{u}}_{h}^{\ell-1} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right), \underline{\vec{\phi}}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) || \det (\nabla \zeta_{Z}) || \end{split}$$

Für die rechte Seite des Druckes (Gleichung (2.13)) wird analog zu Gleichung (4.8) vorgegangen

$$\begin{split} g_{i} &= G_{\vec{w}}(\psi_{i}) \\ &= -b(\vec{w}, \psi_{i}) \\ &\approx + \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \left\langle \operatorname{tr} \nabla \vec{w} \left(\vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right), \underline{\psi}_{i} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) \right\rangle |\det \nabla \vec{\mathcal{D}} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z} \right) || \det (\nabla \zeta_{Z}) || \end{split}$$

Durch diese Rechnungen ist die gesamte Galerkin-Methode aus Gleichung (2.8) auf Seite 6 gegeben. Dies ist die Grundlage für die numerische Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen mit der Isogeometrischen Analysis.

4.1.2 Anmerkungen zur Steifigkeitsmatrix

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix ist sicherlich der schwierigste Teil der Implementierung - obwohl es in vielen Programmiersprachen schon Umsetzungen von NURBS-Funktionen in Paketen gibt. Deshalb sollen in diesem Teilabschnitt einige Anmerkungen zur Matrix gemacht werden.

Bemerkung 4.6 – Berechnung durch Schleifen:

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, die Matrix- oder Vektoreinträge (2.9) bis (2.13) durch Schleifen im Computer zu berechnen.

Entweder es wird eine Schleife über j in eine Schleife über i geschachtelt. Dann können Terme wie $Z \subset \operatorname{supp} \underline{\Lambda}_j(\vec{\xi})$ mithilfe von Eigenschaft (ii) aus Lemma 3.16 berechnet werden. Dies hat den Nachteil, dass zum Beispiel $\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z$, $[\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z)]^{-1}$ und $|\det(\nabla \zeta_Z)|$ häufiger bestimmt werden müssen.

Oder es wird mit einer Schleife über alle Zellen begonnen und die Indexpaare (i, j), die ein Update brauchen, mithilfe von Eigenschaft (iii) aus Lemma 3.16 bestimmt. Dies hat zur Folge, dass mehrmals die Ableitungen einer Basisfunktion berechnet werden müssen.

In der Implementierung für diese Arbeit wurde der zweite Weg benutzt. Die Entscheidung wurde allerdings ohne einen Geschwindigkeitsvergleich getroffen, sondern vielmehr weil die Implementierung direkter umzusetzen war. Ein Vergleich wäre nötig um die Rechenzeit zu optimieren.

Ein weiterer Weg, die Rechenzeit zu verringern, ist es, unnötige Rechnungen auszuschließen. Sei

$$\underline{\vec{\phi}}_i\left(\vec{\xi}\right) = \vec{e}_{d(i)} \cdot \mathcal{N}^V_{\vec{\iota}(i), p_V \cdot \vec{1}}.$$

Dann ist festzustellen, dass nur eine Spalte der Matrix $\nabla_{\xi} \underline{\vec{\phi}}_{i}(\overline{\xi})$ und damit auch der Matrix $\underline{\Lambda}_{i}(\overline{\xi})$ von null verschieden ist. Insbesondere folgen die vereinfachten Rechnungen

$$\left\langle \underline{\Lambda}_{j}, \underline{\Lambda}_{i} \right\rangle = \begin{cases}
0 & d(j) \neq d(i) \\
\left(\left[\nabla_{\xi} \mathcal{N}_{\vec{\iota}(j), p_{V} \cdot \vec{1}}^{V} \right]^{\mathsf{T}} \left[\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\mathcal{D}} \right]^{-1}, \left[\nabla_{\xi} \mathcal{N}_{\vec{\iota}(i), p_{V} \cdot \vec{1}}^{V} \right]^{\mathsf{T}} \left[\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\mathcal{D}} \right]^{-1} \right) & d(j) = d(i) \end{cases}$$

$$\left\langle \underline{\Lambda}_{j} \underline{\vec{u}}_{h}^{\ell-1}, \underline{\vec{\phi}}_{i} \right\rangle = \begin{cases}
0 & d(j) \neq d(i) \\
\left(\left[\nabla_{\xi} \mathcal{N}_{\vec{\iota}(j), p_{V} \cdot \vec{1}}^{V} \right]^{\mathsf{T}} \left[\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\mathcal{D}} \right]^{-1} \cdot \underline{\vec{u}}_{h}^{\ell-1}, \mathcal{N}_{\vec{\iota}(i), p_{V} \cdot \vec{1}}^{V} \right) & d(j) = d(i) \end{cases}$$

Ist nun d(i) der äußere Index, so ergibt sich die Blockstruktur

$$A = \begin{pmatrix} A_* & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_* \end{pmatrix} \qquad C^{\ell-1} = \begin{pmatrix} C_*^{\ell-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_*^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

mit $A_*, C_* \in \mathbb{R}^{\frac{N_V}{D} \times \frac{N_V}{D}}$.

Bemerkung 4.7 – Blockstruktur:

Insgesamt hat das Gleichungssystem (2.8)

$$\left(-\frac{A + C^{\ell-1}}{B} - \frac{B^{\mathsf{T}}}{0} - \right) \begin{pmatrix} \vec{U}^{\ell} \\ \vec{P}^{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}^{\ell-1} \\ \vec{G} \end{pmatrix}$$

die Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} A_* + C_*^{\ell-1} & 0 & 0 & B_1^\mathsf{T} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & A_* + C_*^{\ell-1} & B_D^\mathsf{T} \\ --\bar{B}_1 & \dots & \bar{B}_D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_1^\ell \\ \vdots \\ \vec{U}_D^\ell \\ \vec{P}^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1^{\ell-1} \\ \vdots \\ \vec{F}_{D}^{\ell-1} \\ \vec{G} \end{pmatrix}$$

mit

$$A_*, C_* \in \mathbb{R}^{\frac{N_V}{D} \times \frac{N_V}{D}} \qquad \qquad U_d^{\ell}, F_d^{\ell-1} \in \mathbb{R}^{\frac{N_V}{D}}$$

$$B_d \in \mathbb{R}^{N_Q \times \frac{N_V}{D}} \qquad \qquad \vec{P}^{\ell}, \vec{G} \in \mathbb{R}^{N_Q}$$

für alle $d \in \{1, ..., D\}$. Zu beachten ist, dass A_* und C_* unabhängig von der Dimension sind.

Bemerkung 4.8 – Schwach besetzte Matrix:

Die Eigenschaft (ii) aus Lemma 3.16 besagt, dass der Träger einer Basisfunktion höchstens $(p_V + 1)^D$ Zellen hat. Eigenschaft (iii) desselben Lemmas besagt, dass es in jeder Zelle $(p_V + 1)^D$ verschieden Basisfunktionen gibt, die ungleich null sind. Folglich besitzt jede Zeile der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A + C^{\ell-1} & B^{\mathsf{T}} \\ B & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

aus Gleichung (2.8) höchstens $2(p_V + 1)^{2D}$ Einträge, die ungleich null sind. Ebenso gilt dies für jede Spalte der Matrix. Damit ist die Matrix schwach besetzt.

Zusammengefasst: M aus Gleichung (4.11) ist eine schwach besetzte Steifigkeitsmatrix mit Blockstruktur.

Bemerkung 4.9 – Lösung des linearen Gleichungssystems:

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems wurde in der Implementierung für diese Arbeit ein direktes Verfahren verwendet. Es sind aber in der Literatur für die Isogeomtrische Analysis bei anderen Differenzialgleichungen auch Multigrid-Verfahren benutzt worden.

In [8, 10] werden geometrische Multigrid-Verfahren für das Lösen der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f$$

vorgestellt. Hierbei wird in [8] die Konvergenz der Zwei-Level-Methode bewiesen. Später folgen Aussagen über den V- und W-Zyklus. Beim Gauß-Seidel-Glätter bleibt allerdings die Anzahl der Iterationen von der Anzahl an Freiheitsgraden abhängig. Außerdem ist der Glätter für einen Grad größer als vier ungeeignet. Insgesamt ist die Isogeometrische Analysis aber gut geeignet für einen Ansatz mit geometrischen Multigrid-Verfahren, da die Verfeinerungen automatisiert sind und zusätzlich aus den Verfeinerungen die Transformation der Level abgeleitet werden kann – vergleiche dafür Bemerkung 3.35. Der Vorgang wird anhand von Abbildung 19 auf Seite 37 deutlich. Hier ist eine Basisfunktion auf einem groben Gitter durch die gewichtete Summe mehrerer Basisfunktionen auf einem feinen Gitter dargestellt.

In [6] wird dagegen ein "symbol-based"-Ansatz gewählt. Dieser ermöglicht eine Konvergenzrate unabhängig von den Anzahl der Freiheitsgrade für Differenzialgleichungen des Typs

$$-\Delta u + \vec{a} \cdot \nabla u + au = f.$$

In [6] ist außerdem eine Zusammenfassung vieler bis zur Veröffentlichung 2014 erschienenen Multigrid-Verfahren enthalten. Der interessierte Leser wird an diese verwiesen.

4.1.3 Anmerkungen zur numerischen Lösung

Auch zur berechneten Lösung sind noch Anmerkungen zu machen. Hierbei werden jedoch alle Aussagen über die Konvergenzordnung erst im nachfolgenden Abschnitt getätigt. Zuerst wird Bemerkung 4.2, lokale Bedingung für Druckkonstante, wieder aufgegriffen.

Bemerkung 4.10 – Anpassung des Druckes an Bedingung (4.1): Es mag nötig sein, den Druck an die globale Bedingung (4.1)

$$\int_{\Omega} q_h \, d\vec{x} = 0$$

wieder anzupassen. Die analytische Formel ist in Gleichung (4.3) gegeben durch

 $q_h = \tilde{q}_h - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{q}_h \, d\vec{x}.$

Die Approximation der analytischen Integrale folgt auf demselben Weg wie in Gleichung (4.7) durch

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, d\vec{x}$$

$$= \int_{[0,1]^D} |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}$$

$$= \sum_{Z \in \underline{Z}} \int_{Z} |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}$$

$$\approx \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z})| |\det (\nabla \zeta_{Z})|,$$

$$\int_{\Omega} \tilde{q}_{h}(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{[0,1]^D} \tilde{q}_{h}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}$$

$$= \sum_{Z \in \underline{Z}} \int_{Z} \tilde{q}_{h}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}$$

$$\approx \sum_{Z} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} \tilde{q}_{h}(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z})| \det (\nabla \zeta_{Z})|.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft in numerischen Verfahren ist die schwache Divergenzfreiheit der Approximation für das Geschwindigkeitsfeld. Gilt wie in Gleichung (2.4)

$$b(\vec{u}_h,q)=0 \qquad \forall q \in Q,$$

dann ist \vec{u}_h schwach divergenzfrei. Zu beachten ist, dass q aus Q und nicht nur aus Q_h ist.

Bemerkung 4.11 – Nicht schwach divergenzfrei:

Im Allgemeinen ist $\vec{u}_h^{\ell} = \vec{\mu}_h^{\ell} + \vec{w}$ als Lösung von Gleichung (2.8) mit dem Taylor-Hood-Raum nicht schwach divergenzfrei.

Eine weitere wichtige Eingenschaft ist die Differenzierbarkeit.

Bemerkung 4.12 – Differenzierbarkeit der Approximation:

Sei $(\vec{\mu}_h^{\ell}, p_h^{\ell})$ Lösung von Gleichung (2.8) mit dem Taylor-Hood-Raum, so sind $\vec{\mu}_h^{\ell}, p_h^{\ell} \in C^{r_{\min}}(\Omega)$ mit r_{\min} aus Gleichung (3.8). Letzteres ist für das Geschwindigkeitsfeld und den Druck gleich, da im Taylor-Hood-Raum $\vec{r}_V(\vec{\xi}) = \vec{r}_Q(\vec{\xi})$ für alle $\vec{\xi} \in [0, 1]^D$ gilt.

Lokal kann die Differenzierbarkeit auch höher sein, da ein mehrfacher Knoten auch nur lokalen Einfluss hat - siehe Abbildungen 8 und 16 auf den Seiten 18 und 32. Im Allgemeinen haben alle Ableitungen in die ξ_d -Richtungen Einfluss auf die Differenzierbarkeit in x_1 -Richtung, wie man anhand von Gleichung (4.6) sieht. Analoge Aussagen gelten für x_2 bis x_D .

4.1.4 Konvergenzaussagen

Die Isogeometrische Analysis ist zum aktuellen Zeitpunkt dieser Arbeit ein noch nicht vollständig erforschtes Gebiet. Dies hat zur Folge, dass es nach Wissen des Autors keine Quelle für die folgenden Vermutungen gibt. Ein ausführlicher Beweis ist im Rahmen dieser Masterarbeit auch nicht möglich, jedoch legt eine Beweisskizze die Gültigkeit nahe.

Vermutung 4.13 – Konvergenzordnung in natürlicher Norm:

Sei $(u, p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^D \times H^k(\Omega)$ eine eindeutige Lösung der schwachen Navier-Stokes-Gleichungen (2.4).

Sei \mathcal{D} eine Gebietsfunktion. Wähle (V_h, Q_h) als Taylor-Hood-Raum mit

$$k = p_V = p_O + 1$$
.

Sei $\tilde{f} \in H^{-1}(\Omega)$ und $\tilde{w} \in W$, so dass das Fixpunktverfahren (2.6) eine Kontraktion und das diskrete Fixpunktverfahren (2.7) eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstanten unabhängig von h bildet.

Dann ist die Konvergenzordnung der IGA gegeben durch

$$\|\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \le h^k \cdot C_1 \cdot \left(\|\vec{u}\|_{[H^{k+1}(\Omega)]^D} + \|p\|_{H^k(\Omega)} \right),$$

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \le h^k \cdot C_2 \cdot \left(\|\vec{u}\|_{[H^{k+1}(\Omega)]^D} + \|p\|_{H^k(\Omega)} \right).$$

Die folgende Beweisskizze orientiert sich am Beweis in [3] für die Konvergenzordnung der Stokes-Gleichung.

Beweisskizze: In [3] ist bewiesen, dass die NURBS-Taylor-Hood-Räume die inf-sup-Bedingung erfüllen

$$\inf_{p \in Q_h} \sup_{\vec{v} \in V_h} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle}{\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)^d} \|p\|_{L^2(\Omega)}} \ge \beta > 0. \tag{4.12}$$

Diese globale inf-sup-Bedingung folgt durch den sogenannten Verfürth-Trick und eine Makroelement-Technik aus einer lokalen inf-sup-Bedingung

$$\inf_{p \in Q_h(\mathcal{M})} \sup_{\vec{v} \in V_h(\mathcal{M})} \frac{\langle \vec{v}, \nabla p \rangle}{|\vec{v}|_{H^1(\Omega)^d} |p|_{L^2(\Omega)}} \ge \beta_{\text{macro}} > 0.$$

Hierbei stellen sich Bedingungen an das Gitter bzw. die Makroelemente, sowie an die Gebietsfunktion $\vec{\mathcal{D}}$:

- $\vec{\mathcal{D}}$ ist ein Homomorphismus und
- $\operatorname{ess\,sup\,det}(\nabla \vec{\mathcal{D}}(\xi)) > 0.$

Laut [16] gelten für eine Finite-Elemente-Methode, wenn sie die inf-sup-Bedingung (4.12) erfüllt, folgende Ungleichungen für die endlich-dimensionalen Oseen-Gleichungen gelten

$$\|\nabla \vec{u}^{\ell} - \nabla \vec{u}_{h}^{\ell}\|_{L^{2}} \leq C_{1}(\beta) \cdot \left(\inf_{\vec{v}_{h} \in V_{h}} \|\nabla \vec{u}^{\ell} - \nabla \vec{v}_{h}\|_{L^{2}} + \inf_{q_{h} \in Q_{h}} \|p^{\ell} - q_{h}\|_{L^{2}}\right),$$

$$\|p^{\ell} - p_{h}^{\ell}\|_{L^{2}} \leq C_{2}(\beta) \cdot \left(\inf_{\vec{v}_{h} \in V_{h}} \|\nabla \vec{u}^{\ell} - \nabla \vec{v}_{h}\|_{L^{2}} + \inf_{q_{h} \in Q_{h}} \|p^{\ell} - q_{h}\|_{L^{2}}\right),$$

$$(4.13)$$

wobei $(\vec{u}^{\ell}, p^{\ell})$ die Lösung von (2.6) und die Lösung $(\vec{u}_h^{\ell}, p_h^{\ell})$ von (2.7) sind mit $(\vec{u}^{\ell-1}, p^{\ell-1}) = (\vec{u}_h^{\ell-1}, p_h^{\ell-1})$. In [22] ist zu finden, dass, wenn \vec{u} in $[H^{p_V+1}(\Omega)]^D$ und p in $H^{p_Q+1}(\Omega)$ sind, folgendes gilt

$$\inf_{\vec{v}_h \in V_h} \|\nabla \vec{u}^{\ell} - \nabla \vec{v}_h\|_{L^2} \le C \cdot h^{p_V + 1 - 1} \|\vec{u}^{\ell}\|_{[H^{p_V + 1}(\Omega)]^D},
\inf_{q_h \in Q_h} \|p^{\ell} - q_h\|_{L^2} \le C \cdot h^{p_Q + 1} \|p^{\ell}\|_{H^{p_Q + 1}(\Omega)}, \tag{4.14}$$

wobei C unabhängig von h ist. Einsetzen von Gleichung (4.14) in Gleichung (4.13), zusammen mit den Annahme über kontrahierende Fixpunktverfahren, sollten zur Aussage der Vermutung führen.

Bemerkung 4.14 – Konvergenzordnung und r_{\min} :

Es fällt auf, dass die Konvergenzordnung nicht von r_{\min} aus Gleichung (3.8) abhängt. Die Konstante C für den Bestapproximationsfehler in Gleichung (4.14) hängt jedoch von r_{\min} ab. Untersuchungen in [12] zeigen, dass diese Abhängigkeit die Stabilität von bestimmten Systemen stark beeinflusst. Bei Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen hingegen zeigen die numerischen Untersuchungen in [3, 9, 17] geringen Einfluss von r_{\min} .

Aus der Analogie zur Theorie für klassische Finite-Elemente-Methoden kann aus der Vermutung 4.13 folgende zweite Vermutung aufgestellt werden.

Vermutung 4.15 – Konvergenzordnung von \vec{u} :

Sei $(u, p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^D \times H^k(\Omega)$ eine eindeutige Lösung der schwachen Navier-Stokes-Gleichungen (2.4).

Sei $\tilde{\mathcal{D}}$ eine Gebietsfunktion. Wähle (V_h, Q_h) als Taylor-Hood-Raum mit

$$k = p_V = p_Q + 1.$$

Sei $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)$ und $\vec{w} \in W$, so dass das Fixpunktverfahren (2.6) eine Kontraktion und das diskrete Fixpunktverfahren (2.7) eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstanten unabhängig von h bildet.

Dann ist die Konvergenzordnung von \vec{u} in der IGA zu vermuten mit

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)} = h^{k+1} \cdot C_1 \cdot \left(\|\vec{u}\|_{[H^{k+1}(\Omega)]^D} + \|p\|_{H^k(\Omega)} \right). \tag{4.15}$$

4.2 Berechnung der Dirichlet-Randbedingung

In diesem Teil der Arbeit wird die Bemerkung 2.5 aus Kapitel 2 wieder aufgegriffen. Zur Erinnerung: Es geht um die Annäherung von \vec{w} durch eine Funktion \vec{w}_h . Das \vec{w} war dabei eine beliebige Funktion in $[H^1(\Omega)]^D$, die die Dirichlet-Randbedingung $\text{Tr}\,\vec{w} = \vec{u}_{\text{Diri.}}$ erfüllt. Ein Beispiel ist in Abbildung 20 zu sehen.

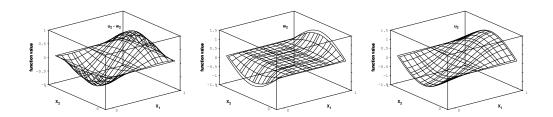


Abbildung 20: Beispiel für die Addition von μ_h^2 und w_h^2 zu u_h^2 mit $u^2 = -\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$ auf dem Einheitsquadrat links: $\mu_h^2(\vec{x})$ mittig: $w_h^2(\vec{x})$ rechts: $u_h^2(\vec{x})$

Seien $\vec{u}_{\text{Diri.}} = (u^1_{\text{Diri.}}, \dots, u^D_{\text{Diri.}})$ und $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_J$ so gewählt, dass $\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_j) \in \Gamma_{\text{Diri.}}$ ist für alle $j \in \{1, \dots, J\}$. Dann soll ein $\vec{w}_h \in W_h$ gefunden werden, so dass für alle d in $\{1, \dots, D\}$

$$\sum_{j=1}^{J} \left| w_h^d(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_j)) - u_{\text{Diri.}}^d(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_j)) \right|^2$$

$$(4.16)$$

minimal ist.

Es wird folgender Ansatz für die Basis von W_h gewählt

$$\begin{aligned} W_h &= \bigcup_{d=1}^D \left\{ \vec{e}_d \cdot \pi(\vec{x}) \right\}_{n=1}^{N_{\text{Diri.}}} \\ &= \bigcup_{d=1}^D \left\{ \vec{e}_d \cdot \underline{\pi} \left(\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x}) \right) \right\}_{n=1}^{N_{\text{Diri.}}}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass $\underline{\pi}$ eine skalare Funktion ist. Sei $\mathcal{N}_{\overline{\iota},p_V\cdot\overline{1}}^V$ die Basis einer Dimension von V_h aus der Definition 4.1 für den Taylor-Hood-Raum. Für diesen Raum wird W_h passend durch

$$\left\{\underline{\pi}(\vec{\xi})\right\}_{n=1}^{N_{\mathrm{Diri.}}} = \left\{\mathcal{N}_{\vec{\iota}, p_V \cdot \vec{\mathbf{1}}}^V(\vec{\xi}) : \mathrm{Tr}\left(\mathcal{N}_{\vec{\iota}, p_V \cdot \vec{\mathbf{1}}}^V\right) \neq 0\right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_V}$$

definiert. Dabei soll $\operatorname{Tr}\left(\mathcal{N}_{\vec{t}_V,p_V\cdot\vec{1}}^V\right)\neq 0$ bedeuten, dass es ein $\vec{\xi}^*$ mit $\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}^*)$ in $\Gamma_{\operatorname{Diri.}}$ gibt, so dass $\mathcal{N}_{\vec{t}_V,p_V\cdot\vec{1}}^V(\vec{\xi}^*)$ ungleich null ist. Einsetzen von

$$w_h^d(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_j)) = \sum_{n=1}^{N_{\text{Diri.}}} w_n^d \cdot \underline{\pi}(\vec{\xi}_j)$$

ergibt für Gleichung (4.16), dass für alle d in $\{1, \ldots, D\}$

$$\sum_{j=1}^{J} \left| \sum_{n=1}^{N_{\text{Diri.}}} w_n^d \cdot \underline{\pi}(\vec{\xi}_j) - u_{\text{Diri.}}^d(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_j)) \right|^2$$

minimal sein soll.

Durch folgende Definitionen

$$O = \begin{pmatrix} \underline{\pi}_1 \begin{pmatrix} \vec{\xi}_1 \end{pmatrix} & \dots & \underline{\pi}_{N_{\text{Diri.}}} \begin{pmatrix} \vec{\xi}_1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\pi}_1 \begin{pmatrix} \vec{\xi}_J \end{pmatrix} & \dots & \underline{\pi}_{N_{\text{Diri.}}} \begin{pmatrix} \vec{\xi}_J \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \vec{W}^d = \begin{pmatrix} w_1^d \\ \vdots \\ w_{N_{\text{Diri.}}}^d \end{pmatrix}, \quad \vec{B}^d = \begin{pmatrix} u_{\text{Diri.}}^d (\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_1)) \\ \vdots \\ u_{\text{Diri.}}^d (\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}_J)) \end{pmatrix}$$

lässt sich das Problem umformulieren in die für diesen Fall notwendige Bedingung

$$\frac{d}{d\vec{W}^d} \left\langle O\vec{W}^d - \vec{B}^d, O\vec{W}^d - \vec{B}^d \right\rangle = 0.$$

Dies führt letztendlich zum linearen Gleichungssystem

$$O^{\mathsf{T}}O\vec{W}^d = O^{\mathsf{T}}\vec{B}^d. \tag{4.17}$$

Bemerkung 4.16 – Wahl der Randpunkte:

In [18] ist eine Möglichkeit angegeben, die Randpunkte $\vec{\xi}_1, ..., \vec{\xi}_J$ so zu wählen, dass das lineare Gleichungssystem (4.17) garantiert regulär ist. Jedoch wurden für die numerischen Ergebnisse am Ende dieser Arbeit äquidistante Werte mit $J > N_{\text{Diri.}}$ benutzt. Dies führte auch zu einer regulären Matrix in den berechneten Beispielen.

Bemerkung 4.17 – Zu bevorzugende Minimierung:

Es würde besser zur Theorie passen, den $L^2(\Gamma_{\text{Diri.}})$ -Abstand

$$\sqrt{\int_{\Gamma_{\text{Diri.}}} \left| \vec{w}_h(\xi) - \vec{u}_{\text{Diri.}}(\xi) \right|^2 ds}$$

zu minimieren, nicht nur den quadratischen Abstand an bestimmen Punkten, vergleiche (4.16). Dies ist im Allgemeinen jedoch schwieriger zu implementieren. Für die hier berechneten Ergebnisse hat (4.16) ausgereicht.

Zu erreichen wäre eine solche Minimierung, indem man Quadraturpunkte wählt und entsprechend gewichtet.

4.3 Multipatch

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Anforderungen an die Gebietsfunktion weiter zu verallgemeinern, um keine starre Tensorprodukt-Struktur zu haben. Der Grundgedanke dabei ist, das Gebiet nicht aus dem Bild einer einzelnen, globalen NURBS-Funktion, sondern aus den Bildern von mehreren NURBS-Funktionen, die sich nicht überlappen, zusammenzusetzen. Die Funktionen, die das Gebiet darstellen, oder auch das Bild der Funktionen werden Patches genannt. Hierbei müssen Anforderungen gestellt werden, damit die numerischen Lösungen auch über die Grenzen einzelner Patches hinweg stetig sind.

Definition 4.18 – Ω durch Patches dargestellt:

Sei $\bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{\Omega}_{\ell} = \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{D}$, sei Ω_{ℓ} offen für alle $\ell, k \in \{1, \dots, L\}$ und für $\ell \neq k$ gelte

$$\overset{\circ}{\Omega}_{\ell} \cap \overset{\circ}{\Omega}_{k} = \varnothing.$$

 Ω ist durch Patches dargestellt, wenn es für alle $\ell \in \{1, ..., L\}$ eine Gebietsfunktion $\vec{\mathcal{D}}_{\ell}$ zu Ω_{ℓ} gibt und für alle $\ell, k \in \{1, ..., L\}$ gilt

$$\vec{\mathcal{D}}_{\ell}|_{\partial\Omega_{\ell}\cap\partial\Omega_{k}}=\vec{\mathcal{D}}_{k}|_{\partial\Omega_{\ell}\cap\partial\Omega_{k}}.$$

Ein Beispiel einer Patchaufteilung eines Ausschnittes des Gebietes für den zweidimensionalen Fluss ist in Abbildung 21 links unten zu sehen. Die Patches sind unterschiedlich eingefärbt. Wie man an Definition 4.1 sieht, ist für die Galerkin-Methode eine Basis in Ω wichtig.

Definition 4.19 – Unstetige globale Basis über \vec{x} :

Sei Ω durch L Patches dargestellt und $\{\mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}_{\ell}}^{\ell}\}_{\vec{\iota}\in\mathcal{I}_{\ell}}$ die Basis zu $\vec{\mathcal{D}}_{\ell}$ für alle $\ell\in\{1,\ldots,L\}$. Die globale Basis über x ist definiert als

$$\hat{\theta}_{(\ell,\vec{\iota})}(\vec{x}) = \begin{cases} \mathcal{N}_{\vec{\iota},\vec{p}_{\ell}}^{\ell} \left(\vec{\mathcal{D}}_{\ell}^{-1}(\vec{x}) \right) & \vec{x} \in \overline{\Omega}_{\ell} \\ 0 & \vec{x} \in \overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{\ell} \end{cases}$$

für alle $(\ell, \vec{\iota}) \in \bigcup_{\ell=1}^{L} {\{\ell\}} \times \mathcal{I}_{\ell} = \hat{\mathcal{I}}^{L}$.

Gilt zusätzlich $\vec{p}_{\ell} = p \cdot \vec{1}$ für alle $\ell \in \{1, ..., L\}$, dann hat die Basis den einheitlichen Grad p.

Diese Basis entspricht auch weiterhin den Gedanken der Isogeometrischen Analysis, denn die Basis ist auch weiterhin aus den Basisfunktionen geformt, die die Geometrie beschreiben.

Diese Basis wäre für eine konforme Galerkin-Methode nicht geeignet, weil

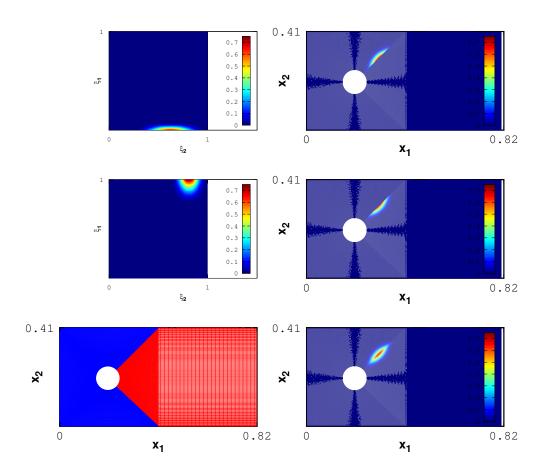


Abbildung 21: Beispiel zweier unstetiger Multipatch-Basisfunktionen gegenüber einer stetigen Multipatch-Basisfunktion

links oben: $\mathcal{N}_{\tilde{\iota},2}^1(\vec{\xi})$ rechts oben: $\hat{\theta}_{(1,\tilde{\iota})}(\vec{x})$ links mittig: $\mathcal{N}_{\tilde{\jmath},2}^2(\vec{\xi})$ rechts mittig: $\hat{\theta}_{(2,\tilde{\jmath})}(\vec{x})$ links unten: $\Omega_1 \cup \Omega_2$ rechts unten: $\theta_{[(1,\tilde{\iota})]}(\vec{x}) = \theta_{[(2,\tilde{\jmath})]}(\vec{x})$

die Basisfunktionen über die Grenze eines Patchrandes zum anderen Patch hinweg unstetig sind. Diesen Effekt sieht man in Abbildung 21 rechts oben. Bei dieser Basis gibt es keinen Informationsaustausch zwischen den Patches. Wenn die NURBS-Funktionen jedoch auf bestimmte Weise konstruiert wurden, gibt es eine zweite Basisfunktion, die auf dem Rand zwischen den Patches die gleichen Funktionswerte annimmt. In Abbildung 21 ist ein Beispiel dafür rechts mittig zu sehen. Zu beachten ist, dass diese beiden Basisfunktionen zwar auf dem Rand die gleichen Werte annehmen, aber in der Urbildebene $[0,1]^2$ unterschiedlich parametrisiert sind. Dies kann man an den beiden oberen Bildern auf der linken Seite sehen.

In diesen Fall kann man sich eine neue stetige Basis konstruieren, indem

man die beiden einzelnen Basisfunktionen durch deren Summe ersetzt. Die Summe dieser Basisfunktionen ist in Abbildung 21 rechts unten abgebildet. Diese Funktion ist stetig, aber nicht differenzierbar. Dies wird im folgenden formalisiert.

Definition 4.20 – Identifizierbare Multiindizes:

Zwei Multiindizes $(\ell, \vec{\iota}), (k, \vec{\jmath})$ sind *identifizierbar* und es wird

$$(\ell, \vec{\iota}) \sim (k, \vec{\jmath})$$

geschrieben, wenn

$$(\ell, \vec{\iota}) = (k, \vec{\jmath})$$

oder

$$0 \neq \hat{\theta}_{(\ell,\vec{t})}|_{\partial\Omega_{\ell}\cap\partial\Omega_{k}} = \hat{\theta}_{(\vec{t},k)}|_{\partial\Omega_{\ell}\cap\partial\Omega_{k}}$$

gilt.

Diese Relation erlaubt es, die Basisfunktionen herauszusuchen, die miteinander identifiziert werden.

Lemma 4.21 – Reflexivität und Symmetrie:

Die Relation "identifizierbar" ist reflexiv:

Für alle $(\ell, \vec{\iota}) \in \hat{\mathcal{I}}^L$ folgt $(\ell, \vec{\iota}) \sim (\ell, \vec{\iota})$.

Die Relation "identifizierbar" ist symmetrisch:

Es gilt für alle
$$(\ell, \vec{\iota}), (k, \vec{\jmath}) \in \hat{\mathcal{I}}^L$$
 mit $(\ell, \vec{\iota}) \sim (k, \vec{\jmath})$ auch $(k, \vec{\jmath}) \sim (\ell, \vec{\iota})$.

Wäre "identifizierbar" zusätzlich transitiv, dann wäre die Relation eine Äquivalenzrelation. Dies ist aber an T-Kreuzungen von Patches nicht unbedingt gegeben, so dass dies eine zusätzliche Voraussetzung sein muss.

Definition 4.22 – Patches mit stetiger globaler Basis über \vec{x} :

Sei "identifizierbar" eine Äquivalenzrelation.

Sei für alle $[(\ell, \vec{\iota})] \in \mathcal{I}^L = \hat{\mathcal{I}}^L/\sim \min [(\ell, \vec{\iota})] = \{(k, \vec{\jmath}) \in \hat{\mathcal{I}}^L : (k, \vec{\jmath}) \sim (\ell, \vec{\iota})\}$ die Funktion

$$\theta_{\left[(\ell,\vec{\iota})\right]}(\vec{x}) = \frac{\sum_{(k,\vec{\jmath}) \in \left[(\ell,\vec{\iota})\right]} \hat{\theta}_{(k,\vec{\jmath})}(\vec{x})}{\sum_{(k,\vec{\jmath}) \in \left[(\ell,\vec{\iota})\right]} \chi_{\operatorname{supp} \hat{\theta}_{(k,\vec{\jmath})}}(\vec{x})} 0$$

in $C^0(\Omega)$, wobei $\chi_{\text{supp}\hat{\theta}_{(k,\bar{\jmath})}}$ die charakteristische Funktion (7.5) des Trägers ist. Dann ist $\{\theta_{[(\ell,\bar{\iota})]}\}_{[(\ell,\bar{\iota})]\in\mathcal{I}^L}$ eine stetige globale Basis. Hat $\{\hat{\theta}_{(\ell,\bar{\iota})}\}_{\ell,\bar{\iota}\in\hat{\mathcal{I}}^L}$ einen einheitlichen Grad p, dann hat auch $\{\theta_{[(\ell,\bar{\iota})]}\}_{[(\ell,\bar{\iota})]\in\mathcal{I}^L}$ einen einheitlichen Grad p.

Bemerkung 4.23 – Randüberschneidungen im selben Patch:

Zu beachteten ist, dass dies auch einschließt, dass der Rand von ein und demselben Patch sich überschneiden kann.

Definition 4.24 – Taylor-Hood für Multipatch mit stetiger Basis:

Sei Ω durch L Patches dargestellt. Seien $\{\theta_{\lceil (\ell, \bar{\iota}) \rceil}^V\}_{\lceil (\ell, \bar{\iota}) \rceil \in \mathcal{I}_V^L}$ eine stetige Basis vom einheitlichen Grad p_V und $\{\theta_{\lceil (\ell, \bar{\iota}) \rceil}^Q\}_{\lceil (\ell, \bar{\iota}) \rceil \in \mathcal{I}_Q^L}$ eine stetige Basis vom einheitlichen Grad p_Q mit $p_V > p_Q$. Seien die D-dimensionalen Regularitätsfunktionen \vec{r}_V^ℓ und \vec{r}_Q^ℓ zu diesen Basen für jedes Patch mit $\vec{r}_V^\ell(\vec{\xi}) = \vec{r}_Q^\ell(\vec{\xi}) \geq -1$ für alle $\vec{\xi} \in [0, 1]^D$ und $\ell \in \{1, \dots, L\}$ gegeben.

Dann ist der Taylor-Hood-Raum (V_h, Q_h) definiert als

$$\begin{split} V_h &= \{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^{N_V} \\ &= \bigcup_{d=1}^D \left\{\vec{e}_d \cdot \theta^V_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor} : \operatorname{Tr} \left(\vec{e}_d \cdot \theta^V_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor}\right) = \vec{0}\right\}_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor \in \mathcal{I}_V^L}, \\ Q_h &= \left\{\psi_i\right\}_{i=1}^{N_Q} \\ &= \left\{\begin{cases}\theta^Q_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor}\right\}_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor \in \mathcal{I}_Q^L, \lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor \neq \lfloor \vec{1} \rfloor} & \Gamma_{\text{natr.}} = \varnothing \\ \left\{\theta^Q_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor}\right\}_{\lfloor (\ell, \vec{\iota}) \rfloor \in \mathcal{I}_Q^L} & \Gamma_{\text{natr.}} \neq \varnothing\end{cases}, \end{split}$$

wobei \vec{e}_d der d-te Einheitsvektor ist.

In der Galerkin-Methode sind viele Integrale zu berechnen. Deshalb wird in der folgenden Bemerkung nochmals beispielhaft eine Funktion über ein durch Patches dargestelltes Gebiet mithilfe der Notation aus Abschnitt 4.1.1 integriert.

Bemerkung 4.25 – Integration im Multipatch:

Sei Ω durch Patches dargestellt und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine beliebige integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_{\ell}} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \int_{[0,1]^{D}} f(\vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}_{\ell}} \int_{Z} f(\vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}$$

$$\approx \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}_{\ell}} \sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} f(\vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}_{\ell}(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z}) || \det(\nabla \zeta_{Z})|.$$

Beim Multipatch-Ansatz gilt nach wie vor, dass die Steifigkeitsmatrix Blockstruktur hat und schwach besetzt ist. Allerdings hängt die maximale Anzahl von Einträgen, die ungleich null sind, nun zusätzlich von der Anzahl der Patches ab.

Durch mehrere Patches lassen sich noch mehr Gebiete darstellen. Außerdem kann eine Aufteilung dazu führen, dass das Bildgitter entzerrt wird. Abschließend ist gibt es noch eine Anmerkung, die für diese Arbeit unbedeutend ist, aber das Potenzial von NURBS verdeutlicht.

Bemerkung 4.26 – Klassische Gitter:

Ist Ω durch Patches dargestellt, dann können die Eckpunkte einer Vergitterung der Urbilder nach Ω abgebildet werden. Im Gebiet können diese Punkte wieder entsprechen verbunden werden. Dadurch kann Ω für klassische Finite-Elemente-Methoden vergittert werden.

5 Numerische Studien

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für das in den vorherigen Kapiteln beschriebene Verfahren der Isogeometrischen Analysis vorgestellt. Die Implementierung in OCTAVE mithilfe des Paketes NURBS-1.3.6 ist unabhängig von der Anzahl der Dimensionen. Es wurden alle Beispiele aus Abschnitt 2.2 berechnet. Für alle Ergebnisse wurde dasselbe Abbruchkriterium für die Fixpunktiteration benutzt. Das Verfahren wurde beendet, wenn folgendes gilt

$$\|(\vec{U}^{\ell+1}, \vec{P}^{\ell+1}) - (\vec{U}^{\ell}, \vec{P}^{\ell})\|_2 < 10^{-6}.$$
 (5.1)

Des Weiteren muss die Berechnung von h aus Gleichung (2.14) im Bildbereich angegeben werden

$$\begin{split} h & \propto \max_{\beta \in V_h \cup Q_h} \operatorname{diam}\left(\operatorname{supp}(\beta)\right) \\ & \propto \max_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}} \operatorname{diam}\left(\vec{\mathcal{D}}(Z)\right) \\ & \propto \max_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}} \sqrt[D]{\int_{\vec{\mathcal{D}}(Z)} 1 \, d\vec{x}} \\ & \approx \max_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}} \sqrt[D]{\sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}\left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^Z\right) || \det(\nabla \zeta_Z)|}. \end{split}$$

Wenn Ω durch L Patches dargestellt ist, verändert sich die Berechnung wie folgt

$$h \approx \max_{\ell \in \{1, \dots, L\}} \max_{Z \in \underline{\mathcal{Z}}_{\ell}} \sqrt[D]{\sum_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\alpha}} |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}_{\ell} \left(\vec{\xi}_{\vec{\alpha}}^{Z}\right) ||\det (\nabla \zeta_{Z})|}.$$

Dies ermöglicht eine gute Approximation von h bei Gittern mit viereckigen Zellen.

5.1 Einheitsquadrat mit Wirbel

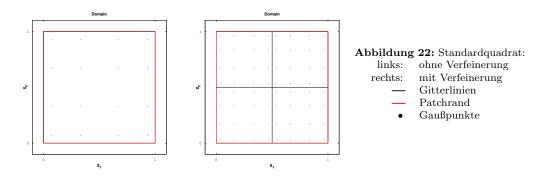
Das Einheitsquadrat wurde auf verschiedene Arten implementiert, um die unterschiedlichen Effekte der Gebietsfunktion auf die Konvergenzordnung zu studieren. Es wird mit der einfachsten Art begonnen. Diese dient später als Referenz.

5.1.1 Standardquadrat

Das Standardquadrat ist wie folgt definiert

$$\begin{split} \vec{\kappa}^1 &= (0,0,1,1), \qquad \vec{P}^{\omega}_{(1,1)} &= (0,0,1)^{\mathsf{T}}, \qquad \vec{P}^{\omega}_{(1,2)} &= (0,1,1)^{\mathsf{T}}, \\ \vec{\kappa}^2 &= (0,0,1,1), \qquad \vec{P}^{\omega}_{(2,1)} &= (1,0,1)^{\mathsf{T}}, \qquad \vec{P}^{\omega}_{(2,2)} &= (1,1,1)^{\mathsf{T}}. \end{split}$$

Diese Definition hat eine lineare und regelmäßige Parametrisierung, wie in Abbildung 22 zu sehen ist.



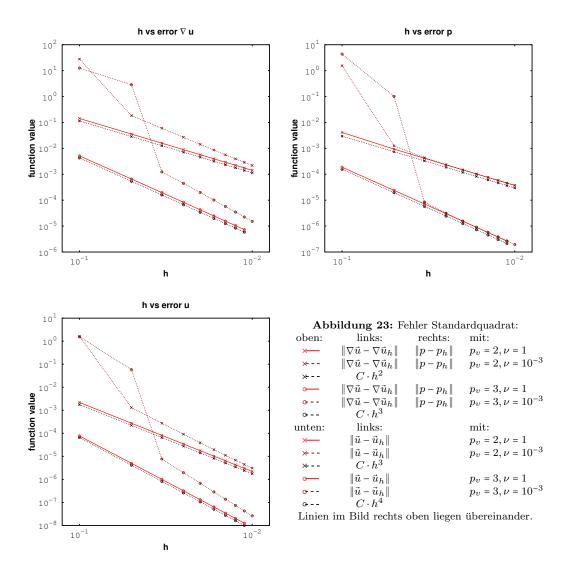
Für diese Parametrisierung des Gebietes wurden numerische Tests durchgeführt. Die analytische Lösung ist dabei die durch Gleichung (2.15) gegebene Funktion. Die externe Kraft \vec{f} und die Randwerte sind so gewählt, dass die numerische Approximation diese Funktion annähert. Dabei ergeben sich homogene Dirichlet-Randwerte. Homogene Dirichlet-Randwerte werden innerhalb der Maschinengenauigkeit approximiert, wodurch der Fehler der Randwerte zu vernachlässigen ist.

Für die Berechnungen wurde außerdem die kinematische Viskosität variiert mit $\nu = 1$ und $\nu = 10^{-3}$. Anschließend wurden die Fehler $\|\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$, $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ evaluiert, um zu überprüfen, ob die theoretischen Konvergenzordnungen aus den Vermutungen 4.13 und 4.15 erreicht werden. Die Integration der L^2 -Norm erfolgte dabei über Bemerkung 4.25 und $\nabla \vec{u}_h$ wurde analog zu Gleichung (4.6) bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 23 zu sehen.

Abbildung 23 zeigt deutlich, dass für $\nu=1$ die optimalen Konvergenzordnungen erreicht werden. Für $\nu=10^{-3}$ ist anfänglich sogar eine schnellere Konvergenz zu beobachten, jedoch gleicht sich diese später der durch die Theorie gegebenen Konvergenz an.

5.1.2 Das nicht unitäre Quadrat

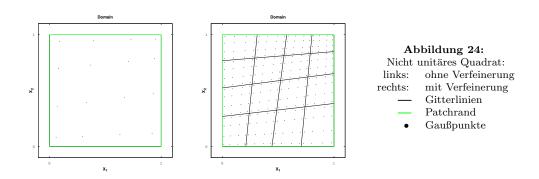
Das Standardquadrat hat nur Gewichte von eins. Das heißt, dass die Basisfunktionen nur mit B-Splines definiert werden können. Um den Effekt der



unterschiedlichen Gewichtung zu verdeutlichen wurde eine zweite Parametrisierung gewählt. In dieser haben alle Kontrollpunkte unterschiedliche Gewichte und dadurch auch alle Basisfunktionen der Ansatz- und Testräume. Die zweite Parametrisierung ist definiert durch

$$\vec{\kappa}^1 = (0, 0, 1, 1), \qquad \vec{P}^{\omega}_{(1,1)} = (0.0, 0.0, 1.0)^{\mathsf{T}}, \qquad \vec{P}^{\omega}_{(1,2)} = (0.0, 1.1, 1.1)^{\mathsf{T}}, \\ \vec{\kappa}^2 = (0, 0, 1, 1), \qquad \vec{P}^{\omega}_{(2,1)} = (0.8, 0.0, 0.8)^{\mathsf{T}}, \qquad \vec{P}^{\omega}_{(2,2)} = (1.5, 1.5, 1.5)^{\mathsf{T}}.$$

Dies ergibt gezerrte Gitterzellen wie Abbildung 24 zeigt. Für diese Parametrisierung wurden auch Fehleranalysen für die Funktion (2.15) mit $\nu=1$ gemacht. In Abbildung 25 sind Zusammenfassungen der Ergebnisse zu finden.

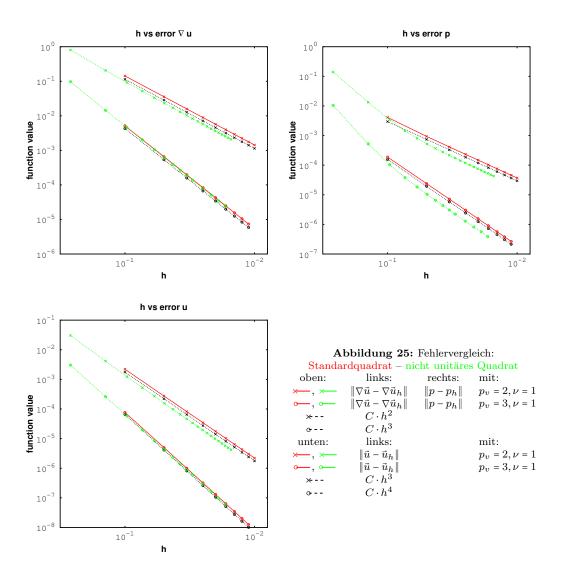


Die Abbildungen verdeutlicht, dass auch in diesem Fall die optimale Konvergenzordnung aus den beiden Vermutungen 4.13 und 4.15 erreicht wurde. Es mag verwundern, dass die gezerrte Parametrisierung schneller zu konvergieren scheint. Dies ist jedoch der Darstellung geschuldet. Ein Auftragen über das maximale h im Bildraum hat für jede Parametrisierung eine andere Aussage über die Anzahl der Freiheitsgrade. So wurden in diesem Fall für jeden n-ten Datenpunkt, markiert durch "ד oder "o", gleich viele Freiheitsgrade verwendet. Vergleicht man die Datenpunkte mit jeweils gleicher Anzahl an Freiheitsgraden, so weist der Datenpunkt des Standardquadrats immer einen kleineren Fehler auf. Insbesondere ist der letzte Datenpunkt des Standardquadrats immer unterhalb der Parametrisierung mit ungleichmäßigen Gewichten. Diese Art der Darstellung wurde jedoch gewählt, um eine Vergleichbarkeit aller drei Parametrisierungen zu geben, ohne die Darstellung jedes Mal zu ändern.

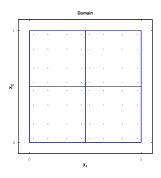
5.1.3 Geteiltes Quadrat

Für die letzte Implementierung des Einheitsquadrat wurde es in X-Richtung in zwei Patches aufgeteilt. Außerdem wurde in Y-Richtung ein weiterer Knoten eingefügt, um ein quadratisches Gitter zu erhalten. Die Aufteilung ist in Abbildung 26 dargestellt. Auch für diese Version des Einheitsquadrates wurde eine Analyse mit Gleichung (2.15) durchgeführt. Jedoch ist dieser Fall nicht mehr durch die Vermutung 4.13 abgedeckt, da es sich um eine Aufteilung in zwei Patches handelt. In Abbildung 27 ist dennoch deutlich zu sehen, dass die gleichen Konvergenzordnungen wie in den beiden vorigen Fällen erreicht werden – der Fehler ist sogar fast der gleiche wie im Standardquadrat. Dies ist dadurch zu erklären, dass in Vermutung 4.13 durch eine Makroelement-Technik argumentiert wurde – es gelten lokale inf-sup-Bedingungen pro Patch.

Auch wenn dieselbe Konvergenzordnung erreicht wird, sind besonders bei



einem sehr groben Gitter Qualitätsunterschiede festzustellen. Die Approximation im geteilten Quadrat ist nur stetig, während sich die Approximation für das Standardquadrat in $C^{p_V-1}(\Omega)$ befindet. So kann man in diesem Beispiel eine Unstetigkeit in $\partial u_1/\partial x$ für eine zugegeben sehr grobe Gitterweite von h=0.25 beobachten. Diese Unstetigkeit scheint sich jedoch für feinere Gitter zu schließen, wie Abbildung 28 zeigt.



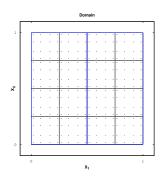
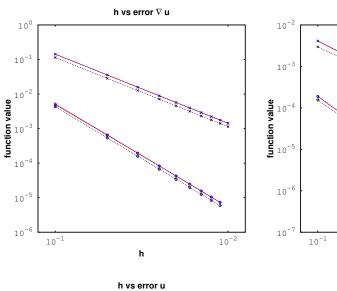
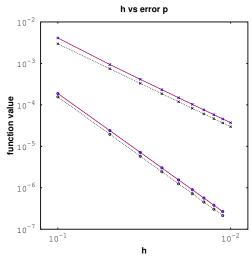


Abbildung 26:

Geteiltes Quadrat:
ks: ohne Verfeinerung
ts: mit Verfeinerung links: rechts: Gitter linienPatchrand Gaußpunkte





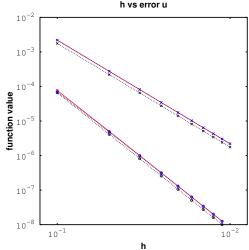
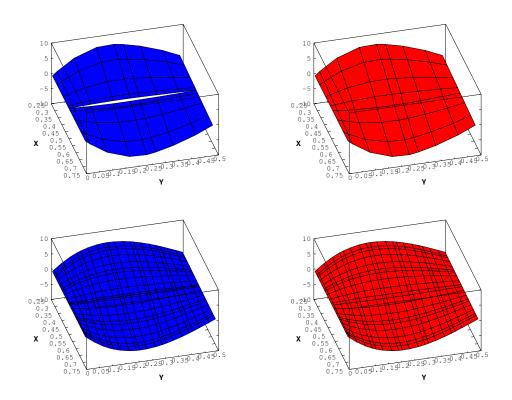


Abbildung 27: Fehlervergleich:

Standardquadrat - Geteiltes Quadrat n: links: rechts: mit:

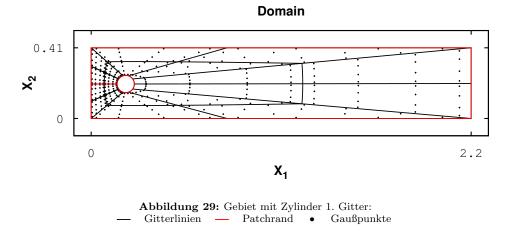
oben: $\|\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}_h\|$ $||p-p_h||$ p_v = 2, ν = 1 $||p-p_h||$ p_v = 3, ν = 1 $C\cdot h^3$ o- - links: unten: mit: $\begin{aligned} &\|\vec{u} - \vec{u}_h\| \\ &\|\vec{u} - \vec{u}_h\| \\ &C \cdot h^3 \end{aligned}$ $p_v=2, \nu=1$ $p_v = 3, \nu = 1$ $C\cdot h^4$

Die blauen und roten Linien liegen übereinander.



5.2 2D Strömung um einen Zylinder

Für die Strömung um einen Zylinder wurden ebenfalls verschiedene Gitter untersucht. Da der Zylinder ein Patchrand sein muss, gibt es verschiedene Möglichkeiten das Gebiet aufzuteilen. Es wird mit der einfachsten Möglichkeit begonnen. Diese besteht in einer Variante mit einem Patch, das an zwei Enden "verklebt" wurde – siehe Bemerkung 4.23. Dargestellt ist dies in Abbildung 29.



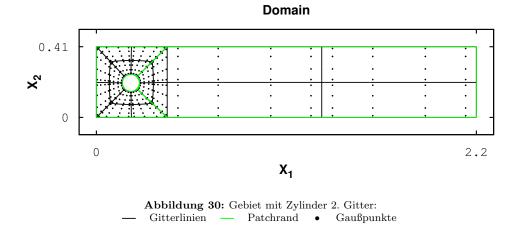
Die numerische Lösung vom niedrigsten Grad ist in Abbildung 35 zu sehen. $p_V=3$ ist der niedrigste Grad, der möglich ist, da das Gebiet selbst einen Grad von 2 besitzt.

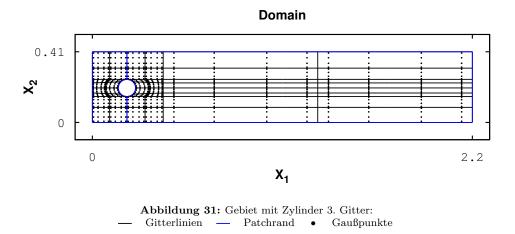
Das zweite Gitter versucht, eine bessere Lösung durch ein weniger verzerrtes Gitter zu erreichen. Dafür ist jedoch eine Einteilung in zwei Patches nötig. Abbildung 30 zeigt das zweite Gitter.

Vergleicht man die Abbildungen 36 und 35, dann unterscheiden sich die Approximationen auf den ersten Blick kaum. Auch die für dieses Problem charakteristischen Wirbel hinter dem Zylinder befinden sich an ähnlichen Positionen – siehe Abbildung 37.

Das dritte Gitter – siehe Abbildung 31 – besteht ebenfalls aus zwei Patches. Diesmal ist es allerdings an anderen Stellen "verklebt". Die Aufteilung nimmt viele Eigenschaften der Lösung auf. So gibt es zum Beispiel eine hohe Auflösung hinter dem Zylinder und viele Gitterlinien sind in Stromrichtung, was sich bei anderen Diskretisierungen als förderlich erwiesen hat. Ein ähnliches Gitter hat beim Konvektion-Diffusion-Problem in [15] die besten Ergebnisse geliefert.

Beim vierten Gitter, zu sehen in Abbildung 32, verlaufen ebenfalls viele Gitterlinien in Stromrichtung. Es gibt jedoch eine eher grobe Auflösung hinter

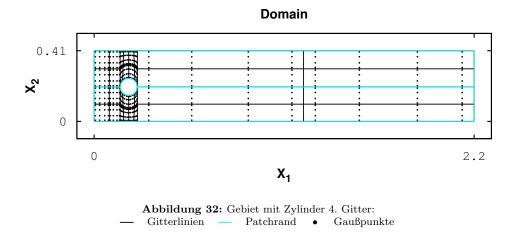


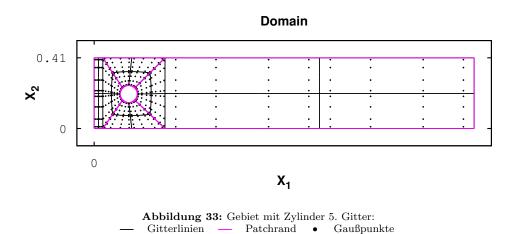


dem Zylinder. Dies könnte die Ursache für den qualitativen Unterschied zum dritten Gitter sein.

Das fünfte Gitter – siehe Abbildung 33 – besteht aus vier Patches und wurde hauptsächlich als Vorbereitung für den dreidimensionalen Fall entwickelt. Es erinnert stark an das zweite Gitter, nur dass es zusätzlich noch einen hochaufgelösten Einlass besitzt. Dies verbessert die Approximation besonders beim Druckunterschied.

Auch für das dritte, vierte und fünfte Gitter ist die Approximation vom Optischen her nicht von den anderen zu unterscheiden. Jedoch wurden zusätzlich die Kennzahlen ΔP , $C_{\rm drag}$ und $C_{\rm lift}$ aus den Gleichungen (2.16) und (2.22) berechnet, um die Gitter zu vergleichen. Zum Vergleich sind Referenzwerte einer "high order method" [9, 13] angegeben. Die Ergebnisse sind in Abbildung 38 und Tabelle 1 zu finden. Die Gitter 2, 3 und 5 sind dabei weitaus





genauer als das erste und vierte Gitter.

Zu sehen ist auch, dass die Näherung mit höherem Grad besser ist. Es gab jedoch einige Schwierigkeiten beim Lösen des linearen Gleichungssystems. Ab einer bestimmten Zahl an Freiheitsgraden warnte das Lösungsverfahren. Von V. John wurden freundlicherweise außerdem Daten von klassischen Finite-Elementen bereit gestellt. Diese sind als zusätzliche Vergleichsmöglichkeit in Abbildung 38 zu sehen.

Bemerkung 5.1 – Nomenklatur für klassische Finite-Elemente:

Die Nomenklatur für klassische Finite-Elemente-Methoden (kFEM) in der Legende sind vom Typ X_i/Y_j . Der erste Buchstabe beschreibt den diskreten Geschwindigkeitsraum, während der zweite Buchstabe den Druckraum kennzeichnet. Ein Q bezeichnet ein Quadergitter und einem liegt P ein Sim-

plexgitter zugrunde. Der Index am Buchstaben gibt dabei den Grad der stückweisen Polynome an. Ein ^{disc} wird angefügt, wenn die Testfunktionen nicht stetig sind.

Die Isogeometrische Analysis erreicht ähnliche Genauigkeiten wie die klassischen Finite-Elemente. Es ist hier kein Vorteil durch die höhere Differenzierbarkeit zu erkennen. Allerdings ist das von V. John benutzte Gitter gezielt um den Zylinder verfeinert [13]. Dies verschafft den klassischen Finite-Elementen einen weiteren Vorteil, den die hier benutzten isogeometrischen Gitter nicht haben.

Die These, dass die Verfeinerung um den Zylinder den Vorteil von klassischen Finite-Elementen erklärt, wurde weiter getestet. Es wurde ein letztes Gitter als eine verfeinerte Variante des zweiten Gitters konstruiert. Knoten wurden so eingefügt, dass sich das Gitter bei uniformer Verfeinerung dichter um den Zylinder sammelt – siehe Abbildung 34. Dies führte zu deutlich besseren Ergebnissen in der Druckdifferenz, die in Abbildung 39 zu sehen sind, und zeigt die Bedeutung gezielten Verfeinerns.

Gitter 2 und 5 ähneln sehr dem Gitter in [9], welches für ΔP einen vergleichbaren Wert für gleich viele Freiheitsgrade liefert. Zu beachten ist, dass in [9] B-Spline-Basisfunktionen verwendet werden und eine andere Berechnung für C_{drag} und C_{lift} angegeben ist. Dies wirkt sich negativ auf C_{drag} und C_{lift} aus. Die Werte erreichen zwar eine ähnliche Genauigkeit, insgesamt jedoch nähert sich die Approximation mit NURBS-Basisfunktionen schneller an die Referenzwerte an als die Werte aus [9] – vergleiche Abbildung 40.

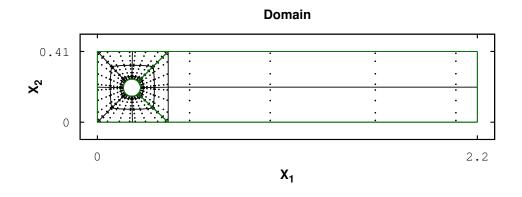


Abbildung 34: Gebiet mit Zylinder 6. Gitter:

— Gitterlinien — Patchrand

◆ Gaußpunkte

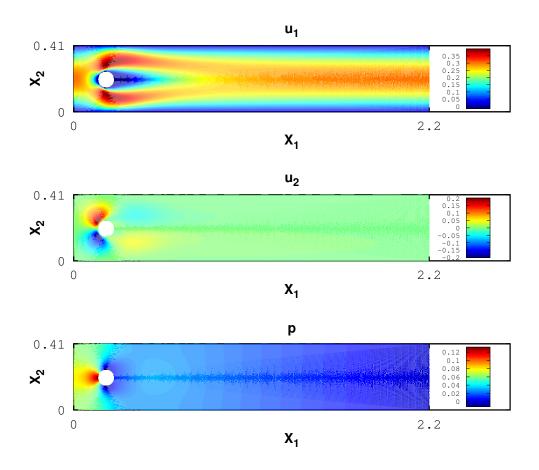


Abbildung 35: (\vec{u},p) im 1. Gitter mit feinstem Gitter und p_V = 3

Gitter	Raum	$N_{ m dof}$	ΔP	$C_{ m drag}$	C _{lift}
1	$p_V = 3$	92890	0.117882357622734593	5.57905045721647674	0.0105939252846114895
1	$p_V = 4$	30402	0.117957392972816696	5.57874601750127663	0.0104414308324836894
2	$p_V = 3$	92890	0.117514710819855497	5.57953533525422785	0.0106189113223266202
2	$p_V = 4$	58292	0.117522493055754296	5.57953328227225409	0.0106189139483775299
3	$p_V = 3$	100503	0.117495897458224793	5.57952020915241764	0.0106190210768219804
3	$p_V = 4$	27875	0.117505629681714199	5.57953670332942497	0.0106190411077791199
4	$p_V = 3$	90458	0.1180040656587652	5.57959693859510963	0.0105709740055105507
4	$p_V = 4$	48686	0.117876883355233594	5.57956873432964962	0.0105582335159523193
5	$p_V = 3$	88252	0.117519189849658298	5.57953533463930995	0.0106189302689215
5	$p_V = 4$	51842	0.117521211929515798	5.57953397938181528	0.0106189223012178001
6	$p_V = 3$	95530	0.117520110424429197	5.57953528369836516	0.0106189352177478904
6	$p_V = 4$	82376	0.117520176597426695	5.57953513051648908	0.0106189391215307603
kFEM	Q_3/Q_2	72797	0.117517236224483998	5.57953631010227014	0.0106188090059121509
kFEM	Q_4/Q_3	135941	0.117520267055173405	5.5795351365105752	0.0106189407315695605
			$\Delta P^{ m ref}$	$C_{ m drag}^{ m ref}$	C _{lift}
			0.11752016697	5.57953523384	0.010618948146

Tabelle 1: Kennzahlen – Anzahl der Freiheitsgrade $N_{
m dof}$ Referenzwerte aus [9] – Bezeichnungen nach Bemerkung 5.1

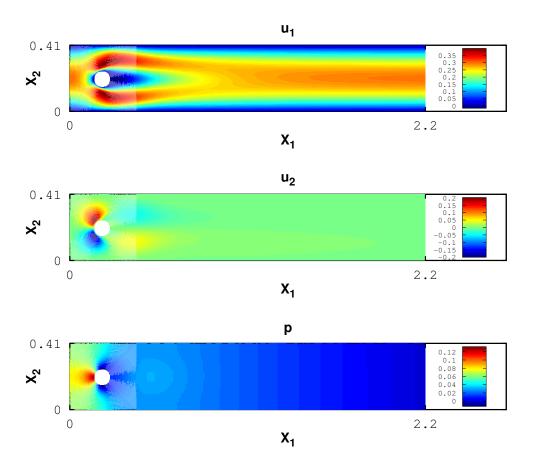


Abbildung 36: (\vec{u},p) im 2. Gitter mit feinstem Gitter und p_V = 3

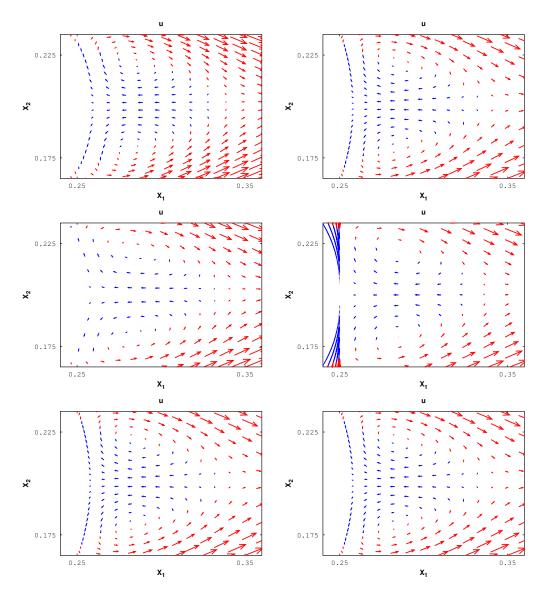
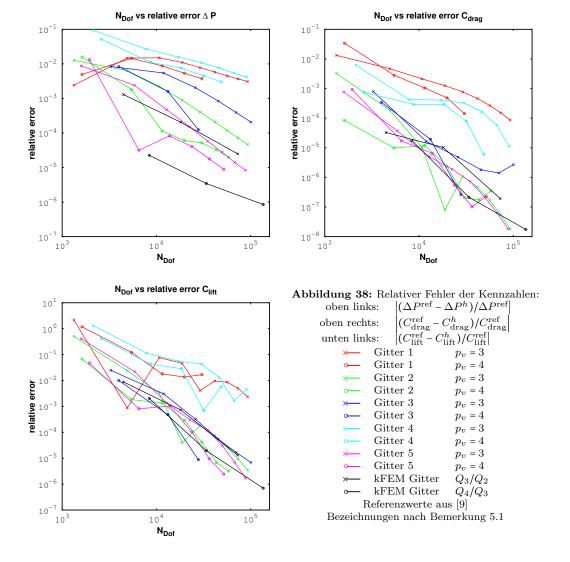
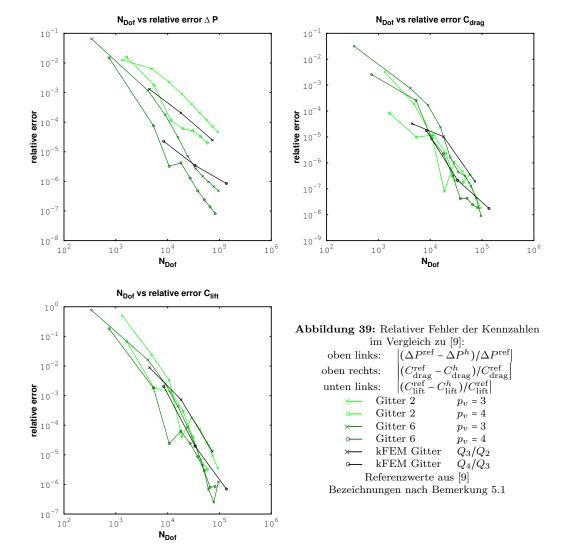
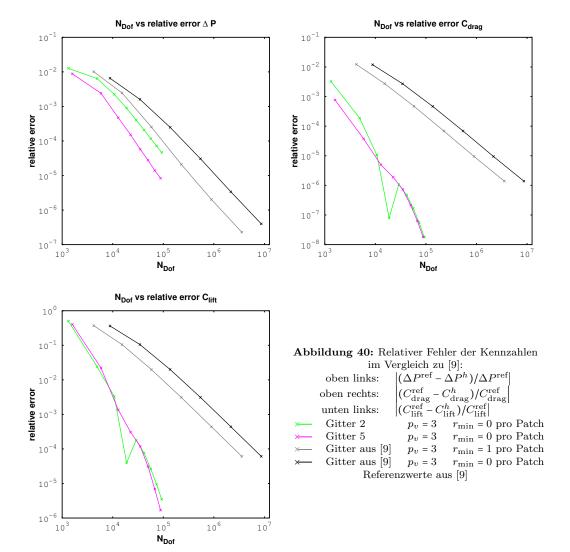


Abbildung 37: Wirbel hinter dem Zylinder mit feinstem Gitter und $p_V=3$: rot: $u_1>0$ blau: $u_1<0$

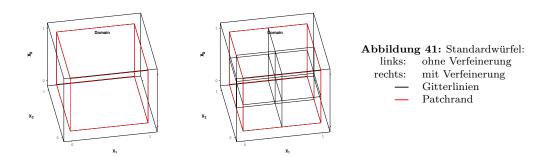
oben links: Gitter 1 oben rechts: Gitter 2 mittig links: Gitter 3 mittig rechts: Gitter 4 unten links: Gitter 5 unten rechts: Gitter 6



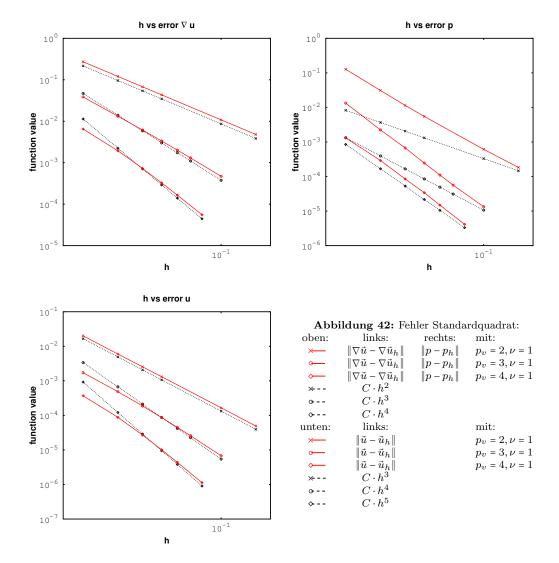




5.3 Einheitswürfel mit Wirbel



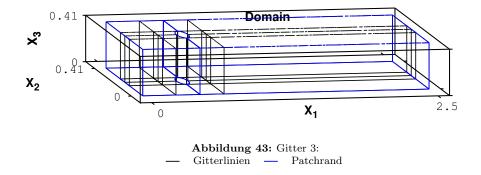
Wie vorher beschrieben, ist ein weiterer Vorteil der Isogeometrischen Analysis, dass sie für mehrere Dimensionen analog formuliert werden kann. Dies ermöglicht eine Implementierung, die sowohl zweidimensionale als auch dreidimensionale Fälle berechnen kann. Als erstes wurde deshalb ein Test im Einheitswürfel vorgenommen. Wie im ersten Beispiel wurde eine analytische Lösung approximiert. Diese ist gegeben durch (2.19). Durch das kubische Wachstum der Anzahl der Freiheitsgrade waren weniger Verfeinerungen möglich. Es kann trotzdem beobachtet werden, dass optimale Konvergenz erreicht wird, trotz nicht homogener Randwerte – siehe Abbildung 42.

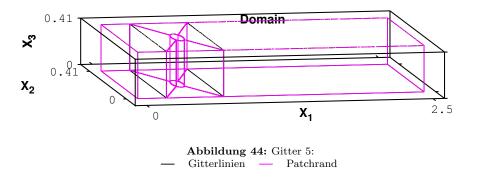


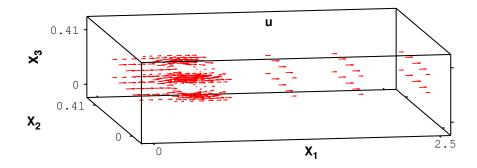
5.4 3D Strömung um einen Zylinder

Für die dreidimensionale Strömung um einen Zylinder wurden Gitter benutzt, die sich stark an den besten Gittern der Strömung in zwei Dimensionen orientieren. Aus den Abbildungen 43 und 44 wird ersichtlich, dass sich das Gitter 3 beziehungsweise das Gitter 5 an das entsprechende zweidimensionale Gitter anlehnt.

Durch das direkte Lösen des linearen Gleichungssystems waren nicht viele Verfeinerungsschritte möglich. Deshalb zeigen Abbildung 46 und Tabelle 2 keine große Übereinstimmung mit den Referenzwerten aus [13]. Es gibt wieder Vergleichswerte zu klassischen Finite-Elemente-Methoden von V. John. Eine erste Vorstellung der Lösung kann man mithilfe von Abbildung 45 gewinnen.







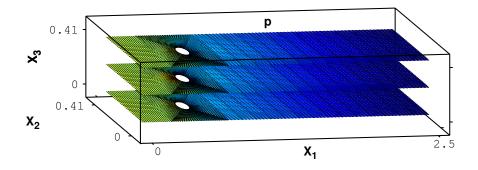
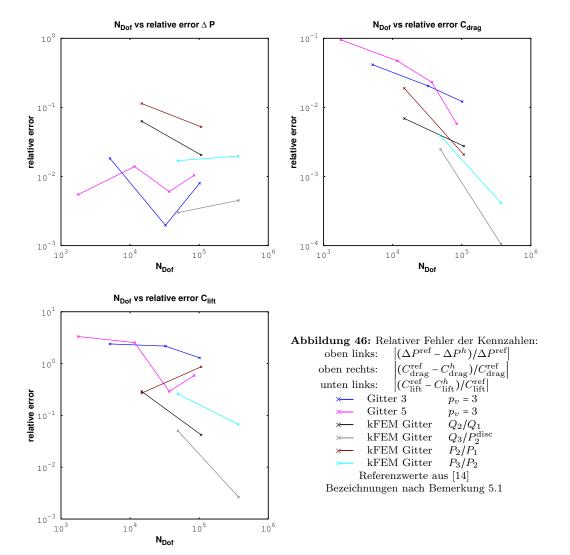


Abbildung 45: (\vec{u},p) mit feinstem Gitter 5 und p_V = 3

Gitter	Raum	$N_{ m dof}$	ΔP	$C_{ m drag}$	$C_{ m lift}$
3	$p_V = 3$	101332	0.169462307320612793	6.11023558426484659	0.0215263726990178386
5	$p_V = 3$	84504	0.169049937506227294	6.14944835031806036	0.0149224073462885104
kFEM	Q_2/Q_1	106680	0.17432636268937271	6.16828162472591668	0.00979680833071476867
kFEM	Q_3/P_2^{disc}	371400	0.170056804530663214	6.18597529548955816	0.00942594931324791489
kFEM	P_2/P_1	106680	0.179771199256761188	6.17247664073915026	0.0175346451369128992
kFEM	P_3/P_2	367000	0.174191262368057487	6.18274807584345698	0.0100316434300352503
			ΛP^{ref}	Cref	Cref
				$C_{ m drag}^{ m ref}$	C _{lift}
			0.170826996	6.1853267	0.0094009839

Tabelle 2: Kennzahlen – Anzahl der Freiheitsgrade $N_{
m dof}$ Referenzwerte aus [14] – Bezeichnungen nach Bemerkung 5.1



6 Ausblick und Schlussbemerkungen

Die Möglichkeiten, die stationären Navier-Stokes-Gleichungen mithilfe der Isogeometrischen Analysis zu untersuchen, sind mit dem Ende dieser Arbeit noch nicht ausgeschöpft. In diesem Kapitel sollen einige Vorschläge gemacht werden, welche möglichen Themenfelder es noch zu untersuchen gäbe.

6.1 Raviart-Thomas-Raum

Der Taylor-Hood-Raum ist nicht der einzige interessante Raum im Bereich der Isogeometrischen Analysis. Es gibt noch weitere Räume, bei denen infsup-Stabilität nachgewiesen worden ist. Ein Raum, der untersucht werden könnte, ist der Raviart-Thomas-Raum. Bei diesem Raum ist das Besondere, dass er schwach divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder liefert, während der Taylor-Hood-Raum dies nicht tut, siehe Bemerkung 4.11. Es ist bekannt, dass ein Raum, bei dem

$$\{\nabla \cdot \vec{u}_h : \vec{u} \in V_h\} \subset Q_h$$

gilt schwach divergenzfrei ist. Aus Bemerkung 3.23 auf Seite 29 geht hervor, dass dies für NURBS-Basisfunktionen nicht zu erreichen ist. Jedoch besagt Lemma 3.10 auf Seite 20, dass eine ähnliche Eigenschaft für B-Spline-Basisfunktionen gilt. Für den Raviart-Thomas-Raum gelten

$$\frac{\nabla \vec{\mathcal{D}} \vec{u}_h}{\det(\nabla \vec{\mathcal{D}})} (\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x})) \in \operatorname{span} \left\{ \mathcal{B}_{\vec{\iota}, k \cdot \vec{1} + \vec{e}_1} \right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_1} \times \ldots \times \left\{ \mathcal{B}_{\vec{\iota}, k \cdot \vec{1} + \vec{e}_D} \right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}_D}
p_h (\vec{\mathcal{D}}^{-1}(\vec{x})) \in \operatorname{span} \left\{ \mathcal{B}_{\vec{\iota}, k \cdot \vec{1}} \right\}_{\vec{\iota} \in \mathcal{I}},$$

wobei $\frac{\nabla \vec{\mathcal{D}} \vec{u}_h}{\det(\nabla \vec{\mathcal{D}})}$ die Piola-Abbildung (siehe [4, 7, 20]) ist und die Knotenvektoren der Basen so sein sollten, dass folgendes gilt:

$$\frac{d}{d\xi_d} \mathcal{B}_{\bar{\iota}, k \cdot \bar{1} + \vec{e}_d} \in \operatorname{span} \left\{ \mathcal{B}_{\bar{\iota}, k \cdot \bar{1}} \right\}_{\bar{\iota} \in \mathcal{I}}.$$

Die genaue Definition ist zu finden in [4, 7]. Diese Konstruktion bringt aber auch mehrere Schwierigkeiten mit sich:

(i) Der Grundgedanke der Isogeometrischen Analysis, die gleichen Basisfunktionen für Gebiet und Galerkin-Methode zu benutzen, ist abgeschwächt. Es werden lediglich sehr ähnliche Basen verwendet.

- (ii) Wenn es keine natürlichen Randwerte gibt, reicht es nicht aus, einen Freiheitsgrad auf Null zu setzen siehe Bemerkung 4.2 sondern es muss eine aufwändigere Konstruktionen gewählt werden, um einen infsup-stabilen Raum zu erhalten.
- (iii) Um den Grundgedanken der Isogeometrischen Analysis aufrecht zu erhalten, müsste jede der beteiligten Basen das Gebiet trotz der verschiedenen Grade parametrisieren.
- (iv) Alle beteiligten Basen müssen linear unabhängig sein dies stellt Anforderungen an die Knotenvektoren, siehe hierzu Bemerkung 3.8. Dies erfordert gegebenfalls verschiedene Indizierungen der Basen.
- (v) Die Steifigkeitsmatrix M hat folgende Struktur:

$$\begin{pmatrix} A_1 + C_1^{\ell-1} & 0 & 0 & B_1^{\mathsf{T}} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & A_D + C_D^{\ell-1} & B_D^{\mathsf{T}} \\ - B_1 & \dots & B_D & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zum Taylor-Hood-Raum ist zu beachten, dass A_d und $C_d^{\ell-1}$ von der Dimension abhängen – vergleiche Bemerkung 4.7.

(vi) Bei der Konstruktion eines Gebietes durch mehrere Patches muss man zusätzlich die Orientierung der Patches beachten.

Ausführliche Beweise zur Konvergenz und Konvergenzordnung sind in [7] zu finden. Zusätzliche numerische Studien enthält die Veröffentlichung von [4]. Bemerkung 6.1 auf Seite 83 nennt eine Quelle für die Umsetzung des Raviart-Thomas-Raum in MATLAB und OCTAVE.

6.2 Lokale Verfeinerungen

Ein Punkt, der weitere Untersuchungen beanspruchen würde, ist das Verfeinern der Gitter. Hier könnte bei der Strömung um den Zylinder gezielt das Gitter um den Zylinder verfeinert werden. Zu bedenken ist die Bemerkung 3.29, dass es keine wirkliche lokale Verfeinerung gibt. Um dieses Problem anzugehen, gibt es in der Literatur schon verschiedene Lösungsvorschläge. Einer der meistgenannten ist eine weitere Verallgemeinerung von NURBS, sogenannte T-Splines.

T-Splines machen sich die Eigenschaft (i) aus Lemma 3.16 zunutze. Diese Eigenschaft besagt, dass ein lokaler Teil der Knotenvektoren ausreicht, um eine B-Spline-Basisfunktion eindeutig zu definieren. Die Idee von T-Splines ist, die Basisfunktionen mithilfe von lokalen Knotenvektoren zu definieren. Diese lokalen Knotenvektoren stammen dabei nicht, wie bei NURBS, unabhängig vom Multiindex aus denselben Knotenvektoren. Vielmehr werden die lokalen Knotenvektoren mithilfe eines T-Gitters berechnet. Dies erlaubt, dass in Abhängigkeit vom Multiindex gewisse Knoten übersprungen werden. Im zweidimensionalen Fall zum Beispiel ist folgendes möglich: Die Basisfunktion mit Index (1,2) hat einen größeren Träger in ξ_1 -Richtung als die Basisfunktion (1,1). Das ist durch die Tensorprodukt-Struktur bei NURBS nicht möglich. T-Splines bilden also einen weiteren Weg, die Tensorprodukt-Struktur aufzulösen. Ist das T-Gitter ein Tensorprodukt, dann erhält man eine normale B-Spline-Basis. Die Basisfunktionen können gewichtet werden, womit sie eine Verallgemeinerung von NURBS werden.

Eine lokale Verfeinerung ist auch für die Implementierung des Gebietes von Vorteil. Eine detailreiche Region kann mit vielen Kontrollpunkten aufgelöst werden, während glatte Flächen mit wenig Kontrollpunkten definiert werden können. Dies ermöglicht eine erhebliche Verringerung der Zeit für die Modellierung.

Da T-Splines eine lokale Verfeinerung erlauben, gibt es bereits Vorschläge für adaptive Verfeinerungsverfahren. Diese sind aber noch immer Gegenstand der aktuellen Forschung.

Der Nachteil von T-Splines ist, dass die Implementierung noch schwieriger ist, da sie weniger strukturiert sind und weniger verbreitet.

Eine sehr gute Aufbereitung von T-Splines ist in [1] zu finden.

Bemerkung 6.1 – GeoPDE:

Im GeoPDEs Projekt gibt es eine Umsetzung für T-Splines für MATLAB und Octave [5]. In diesem Projekt sind auch schon viele Umsetzungen von Isogeometrischer Analysis unter anderem für die Stokes-Gleichungen für Taylor-Hood-Raum und Raviart-Thomas-Raum verwirklicht – nicht aber für die Navier-Stokes-Gleichungen.

6.3 Schlussbemerkungen

Die Isogeometrische Analysis ist ein beeindruckendes numerisches Verfahren. Eine Umsetzung mit NURBS kann fast alle Anforderungen erfüllen, die man an ein numerisches Verfahren stellt: automatische globale Verfeinerung, hohe Differenzierbarkeit der Approximation, Verfahren mit hoher Konvergenzordnung und häufig keine Approximationsfehler des Gebietes. Die Verwendung von T-Splines bietet zusätzlich eine Möglichkeit zur automatischen lokalen Verfeinerung.

Insbesondere ist für die meisten Simulationen der Navier-Stokes-Gleichungen von großer Bedeutung, dass kein zusätzlicher Fehler durch die Implementierung des Gebietes auftritt. Häufig ist die Strömung an der Oberfläche eines Gegengenstandes von besonderem Interesse. Die hier implementierte Variante mit NURBS bietet in den Benchmarkproblemen gute Ergebnisse. Der einzige Nachteil beim direkten Lösen des linearen Gleichungssystems ist die komplizierte Implementierung.

Die IGA ist ein leistungsfähiges und vielseitiges Verfahren für das Approximieren partieller Differenzialgleichungen. Es werden immer mehr Umsetzungen folgen und die Verfahren aufgrund weiterer Forschung verfeinert.

In Zukunft könnte ein standardisierter Arbeitsprozess entstehen, in dem nicht jeder Schritt eine selbstgeschriebene Implementierung benötigt.

7 Addendum

Dieser Teil beinhaltet einige Notationen, die im Allgemeinen nicht eindeutig sind, und einige Formeln zum Nachschlagen.

Raum Nomenklatur:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 0$. Es ist

- $L^2(\Omega)$ der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen von Ω nach \mathbb{R} , deren Quadrat integrierbar ist,
- $H^k(\Omega)$ der k-te Sobolev-Hilbertraum mit Funktionen von Ω nach \mathbb{R} ,
- $H^{-k}(\Omega)$ der Dualraum zu $H^k(\Omega)$,
- $C^p(\Omega)$ der Raum der stetigen Funktionen von Ω nach \mathbb{R}^D .

Der Nabla-Operator:

Sei $q: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $\vec{v}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^D$ mit $D \ge 2$.

Dann ist

$$\nabla q = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial x_N^2} \end{pmatrix} \text{ und } \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_D}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_D}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Der Laplace-Operator:

Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^D$.

Dann ist

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_n^2} \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 v_D}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Das Frobenius-Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{N \times M} \otimes \mathbb{R}^{N \times M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \longmapsto \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{i,j} b_{i,j}$$

$$(7.3)$$

Das Kronecker-Delta:

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases} \tag{7.4}$$

Die charakteristische Funktion:

Sei A eine Menge.

Dann ist

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
 (7.5)

Transformationssatz:

Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $\vec{\mathcal{D}}: A \to \mathbb{R}^D$ ein Diffeomorphismus.

Dann gilt

$$\int_{\vec{x}\in\vec{\mathcal{D}}(A)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{\xi}\in A} f(\vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})) |\det \nabla \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}.$$
 (7.6)

Partielle Integration:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ kompakt mit abschnittsweise glattem Rand. Sei $[H^1(\Omega)]^D \ni \vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^D$ und $H^1(\Omega) \ni q : \Omega \to \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla q \cdot \vec{v} \, d\vec{x} = -\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{v} \, d\vec{x} + \int_{\partial \Omega} q \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}} \, ds, \tag{7.7}$$

wobei \vec{n} der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor ist.

8 Literatur

- [1] BAZILEVS, Yuri, et al.: Isogeometric analysis using T-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199. Jg., Nr. 5, S. 229-263.
- [2] BRESSAN, Andrea: Isogeometric regular discretization for the Stokes problem. IMA journal of numerical analysis, 2011, 31. Jg., Nr. 4, S. 1334-1356
- [3] BRESSAN, Andrea; Sangalli, Giancarlo: Isogeometric discretizations of the Stokes problem: stability analysis by the macroelement technique. IMA Journal of Numerical Analysis, 2013, 33. Jg., Nr. 2, S. 629-651.
- [4] BUFFA, A.; DE FALCO, C.; SANGALLI, G.: Isogeometric analysis: stable elements for the 2D Stokes equation. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 65. Jg., Nr. 12, S. 1407-1422.
- [5] BUFFA, A.: GeoPDEs: a research tool for IsoGeometric Analysis of PDEs http://geopdes.apnetwork.it/, 19.09.2015
- [6] DONATELLI, MARCO, ET AL.: Symbol-based multigrid methods for Galerkin B-spline isogeometric analysis. TW Reports, 2014.
- [7] EVANS, JOHN A.; HUGHES, THOMAS JR: Isogeometric divergence-conforming B-splines for the steady Navier–Stokes equations. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2013, 23. Jg., Nr. 08, S. 1421-1478.
- [8] GAHALAUT, K. P. S.; KRAUS, J. K.; TOMAR, S. K. Multigrid methods for isogeometric discretization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 253. Jg., S. 413-425.
- [9] HOSSEINI, B.; MÖLLER, M.; TUREK, S.: Isogeometric Analysis of the Navier-Stokes equations with Taylor-Hood B-spline elements. Applied Mathematics and Computation, 2015.
- [10] HOFREITHER, CLEMENS, ET AL.: Multigrid methods for isogeometric analysis with THB-splines. 2015
- [11] HUGHES, THOMAS JR; REALI, A.; SANGALLI, G.: Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199. Jg., Nr. 5, S. 301-313.

- [12] HUGHES, THOMAS JR; EVANS, JOHN A.: Isogeometric analysis. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2012. S. 299-325.
- [13] JOHN, VOLKER; MATTHIES, GUNAR: Higher order finite element discretizations in a benchmark problem for incompressible flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2001, 37. Jg., Nr. 8, S. 885-903.
- [14] JOHN, Volker: Higher order finite element methods and multigrid solvers in a benchmark problem for the 3D Navier-Stokes equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2002, 40. Jg., Nr. 6, S. 775-798.
- [15] JOHN, VOLKER; SCHUMACHER, LIESEL: A study of isogeometric analysis for scalar convection-diffusion equations. Applied Mathematics Letters, 2014, 27. Jg., S. 43-48.
- [16] JOHN, Volker: Lecture notes: Numerical methods for incompressible flow problems II. Chapter 4, http://www.wiasberlin.de/people/john/LEHRE/NUM_NSE_14/num_nse_4.pdf, 21.08.2015.
- [17] NIELSEN, PETER NØRTOFT, ET AL.: Discretizations in isogeometric analysis of Navier–Stokes flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200.45 (2011): 3242-3253.
- [18] PIEGL, Les; TILLER, WAYNE: *The NURBS book.* Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] QUEIROLO, Elena: Isogemetric Analysis for Navier-Stokes equations. Masterarbeit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2014.
- [20] ROGNES, MARIE E.; KIRBY, ROBERT C.; LOGG, ANDERS: Efficient assembly of H(div) and H(curl) conforming finite elements. SIAM Journal on Scientific Computing, 2009, 31. Jg., Nr. 6, S. 4130-4151.
- [21] SCHUMACHER, LIESEL: Isogemetric Analysis for Scalar Convection-Diffusion Equations. Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, 1998.
- [22] TAGLIABUE, Anna; DEDÈ, Luca; QUARTERONI, Alfio: Isogeometric analysis and error estimates for high order partial differential equations in fluid dynamics. Computers & Fluids, 2014, 102. Jg., S. 277-303.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Datum:	21. September 2015	Unterschrift:	Berlin,
			Come Inneis Dulling
			Georg Jannis Bulling