

Reduktion von Szenariobäumen in der stochastischen Optimierung

Diplomarbeit

Holger Heitsch

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. W. Römisch

Februar 2001

Vorwort

In vielen Anwendungsbereichen der stochastischen Optimierung, wie zum Beispiel in der Kraftwerks-Einsatzoptimierung, sind Szenariobäume Teil des Optimierungsmodells. Dabei werden bei der Verwendung mehrstufiger Kompensationsmodelle Szenariobäume mit einer sehr großen Anzahl von Szenarios generiert.

Dabei wächst die Bedeutung effizienter Szenario-Reduktionsalgorithmen, die die Anzahl der Szenarios im Szenariobaum bezüglich einer Wahrscheinlichkeitsmetrik optimal verringern.

In dieser Arbeit werden verschiedenen Reduktionskonzepte hinsichtlich ihrer Effizienz und Güte untersucht. Darüberhinaus wird eine weiterentwickelte Version des Forward-Algorithmus vorgestellt. In umfangreichen numerischen Tests werden Vergleiche zwischen den Verfahren durchgeführt.

Ein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. W. Römisch für die Unterstützung meiner Arbeit und für seine zahlreichen Anregungen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Wahrscheinlichkeits-Metriken	5
2.1	Fortet-Mourier Metrik	5
2.2	Approximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen	7
3	Szenarioreduktion	8
3.1	Optimale und vorgeschriebene Neuverteilung	8
3.1.1	Eliminierung eines einzigen Szenarios	11
3.1.2	Eliminierung aller Szenarios bis auf ein Szenario	12
3.2	Der Backward-Algorithmus	12
3.3	Der Forward-Algorithmus	14
3.3.1	Das Forward-Schema	15
3.4	Vergleich zwischen Forward- und Backward-Algorithmus	17
3.4.1	Komplexität der Algorithmen	17
3.4.2	Güte der Approximation	18
3.5	Anwendung auf Szenariobäume	19
3.5.1	Binäre Szenariobäume	20
3.5.2	Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3	24
4	Numerische Ergebnisse	31
4.1	Anwendung auf binäre Szenariobäume	32
4.2	Anwendung auf Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3	36
4.3	Der elektrische Last-Szenariobaum	40
4.3.1	Verteilung der Szenarios nach der Reduktion	42
	Literaturverzeichnis	44

Kapitel 1

Einleitung

In der stochastischen Optimierung unterscheiden sich die Optimierungsmodelle von den deterministischen Modellen durch den zusätzlichen Einfluß von Zufallsgrößen. Gegenwärtig kommen zur Lösung solcher stochastischen Optimierungsprobleme zwei- oder mehrstufige Kompensationsmodelle zur Anwendung ([1],[4] und [9]).

Die Beschreibung des Zufalls gestaltet sich dabei zuweilen als äußerst kompliziert, da man oft keine genaue Kenntnis über die tatsächliche Verteilung der Zufallsgröße hat.

In der Regel genügen diskrete Approximationen der Zufallsgröße, in die statistische Vorhersagen über Erwartungswert und Varianz einfließen. Auch wenn eine stetige Verteilung der beteiligten Zufallsvariablen bekannt sein sollte, kann um die numerische Lösbarkeit des Problems zu garantieren, eine endliche diskrete Approximation der Zufallsgrößen nötig sein.

Mehrstufige stochastische Optimierungsmodelle dieser Art sind häufig durch eine ganz besondere Informationsstruktur gekennzeichnet. Die Approximation führt zu einem Szenariobaum, der die mit fortschreitender Zeit zunehmende Unsicherheit über die Realisierungen der Zufallsvariablen widerspiegelt. Es existieren verschiedene Ansätze zur Generierung solcher Szenariobäume. Ein Überblick über die derzeit verwendeten Methoden zur Szenariogenerierung ist zum Beispiel in Dupačová [6] enthalten.

Ein bedeutender Anwendungsbereich liegt in der Kraftwerks-Einsatzoptimierung, bei der generierte Lastszenariobäume Teil des Optimierungsmodells sind. Dabei werden zur Lösung der Optimierungsaufgaben zunächst eine Vielzahl möglicher Szenarios erzeugt. Die Modellanpassung an die vorliegenden Lastdatenreihen über ein diskretisiertes Zeitintervall erfolgt mit klassischen Methoden der Zeitreihenanalyse ([2]). Aufgrund des besonderen zyklischen Verhaltens der Lastdaten, werden in erster Linie SARIMA-Modelle genutzt, die zur Beschreibung nichtstationärer Prozesse mit polynomialen Trends und periodischen Komponenten geeignet sind.

Die so generierten Szenariobäume sind Ausgangspunkt deterministischer Optimierungsmethoden. Da die Zahl der generierten Szenarios für gute Optimierungsergebnisse im allgemeinen sehr hoch sein muß, wird die Durchführung der Optimierungsverfahren sehr aufwendig oder gar aus Gründen zu hoher Rechenkomplexität unmöglich.

Daher wächst die Bedeutung effizienter Szenario-Reduktionsalgorithmen, um die Dimensionen der Optimierungsprobleme entscheidend zu verringern. Für einen gegebenen Szenariobaum besteht die Aufgabe darin, eine Teilmenge von Szenarios mit vorgeschriebener Anzahl derart zu bestimmen, daß diese Teilmenge möglichst gut

den gesamten Szenariobaum approximiert.

Um die Güte solcher Approximationen beurteilen zu können, bedarf es Wahrscheinlichkeitsmetriken, die einen Abstand zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen definieren. Eine kanonische Metrik dieser Art ist die Fortet-Mourier Metrik.

In den folgenden Kapiteln soll ein Überblick über verschiedene approximative Reduktionskonzepte gegeben werden und diese hinsichtlich ihrer Effizienz und Güte an Beispielen untersucht werden. Grundlage für die theoretischen Entwicklungen, aber auch für die numerischen Tests ist hier die Arbeit von Dupačová, Gröwe-Kuska und Römisch [5]. Dort wurden bereits zwei Reduktionsalgorithmen vorgestellt, der Backward- und Forward-Algorithmus.

In dieser Arbeit wird neben umfangreichen numerischen Tests und Vergleichen zwischen den Verfahren im letzten Kapitel, in Kapitel 3 eine Weiterentwicklung des Forward-Algorithmus präsentiert, die deutliche Vorteile in der Rechenzeit gegenüber der bisherigen Form des Algorithmus aufweist. Desweiteren werden in Kapitel 3 eine Reihe von Hilfsmittel hergeleitet, die für speziell konstruierte Szenariobäume Aussagen zur Güte der verwendeten Reduktionsalgorithmen treffen können.

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeits- Metriken

Häufig wird die Aufgabe nach einer guten Approximation eines beliebigen Maßes $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ durch ein Maß $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ gestellt, Ω sei dabei eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^s und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Maße auf der Sigma-Algebra (Ω, \mathcal{B}) und \mathcal{B} die Borel-Mengen über Ω . Eine mögliche Situation wäre gegeben, falls ein unendliches Maß P durch ein diskretes Maß Q mit endlichem Träger approximiert werden soll. Auch wenn das Maß P selbst diskret ist, aber eine sehr große Zahl von Atomen besitzt, kann die Suche nach einer Näherung durch ein Maß Q mit einer sehr viel kleineren Anzahl von Atomen (Szenarios) bedeutungsvoll sein.

Um solchen Fragen nachzugehen, benötigt man Wahrscheinlichkeitsmetriken, die den Abstands begriff für Wahrscheinlichkeitsmaße definieren. Im folgenden soll es um spezielle Wahrscheinlichkeitsmetriken gehen.

2.1 Fortet-Mourier Metrik

Als kanonische Wahrscheinlichkeitsmetriken, auch in Hinblick auf Stabilität, sind die Wahrscheinlichkeitsmetriken mit ζ -Struktur (vgl. [11] und [15]). Der Abstand zweier Maße P und Q wird bestimmt durch:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}(P, Q) &= \sup_{f \in \mathcal{F}} |\mathbb{E}_P f(\omega) - \mathbb{E}_Q f(\omega)| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) - \int_{\Omega} f(\omega) Q(d\omega) \right|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

\mathcal{F} ist dabei eine geeignete Menge messbarer Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$ sowie P und Q aus $\mathcal{P}(\Omega)$. Bei konvexen stochastischen Problemen hat die Menge \mathcal{F}_c eine besondere Bedeutung, definiert durch:

$$\mathcal{F}_c = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f(\omega) - f(\tilde{\omega}) \leq c(\omega, \tilde{\omega}) \text{ für alle } \omega, \tilde{\omega} \in \Omega\}$$

mit einer stetigen und symmetrischen Funktion $c : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $c(\omega, \tilde{\omega}) = 0$, falls $\omega = \tilde{\omega}$. In diesem Fall wird die zugehörige Wahrscheinlichkeitsmetrik auch mit

$$\zeta_c(P, Q) := d_{\mathcal{F}_c}(P, Q) \quad (2.2)$$

bezeichnet. Zur speziellen Wahl von c und zu Fragen der Stabilität sei hier auf [5], Abschnitt 2 verwiesen.

Besitzt die Funktion c die Gestalt

$$c_h(\omega, \tilde{\omega}) = \|\omega - \tilde{\omega}\| \max\{1, h(\|\omega - \omega_0\|), h(\|\tilde{\omega} - \omega_0\|)\} \quad (2.3)$$

für alle $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$, $\omega_0 \in \mathbb{R}^s$ fixiert und $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige monoton wachsende Funktion, so wird die entsprechende Metrik

$$\zeta_{c_h}(P, Q) := d_{\mathcal{F}_{c_h}}(P, Q)$$

im allgemeinen *Fortet-Mourier Metrik* genannt [11].

Ist das Maß P diskret und durch eine endliche Zahl von Atomen gegeben und soll dieses beispielsweise durch ein Maß Q mit einer weitaus geringeren Zahl von Atomen approximiert werden, so stellt in dem Fall der Abstand $\zeta_c(P, Q)$ den Optimalwert eines endlich-dimensionalen linearen dualen Transportproblems dar. Für

$P = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{\omega_i}$ und $Q = \sum_{j=1}^M q_j \delta_{\tilde{\omega}_j}$ gilt demnach:

$$\zeta_c(P, Q) = \max\left\{ \sum_{i=1}^N p_i u_i + \sum_{j=1}^M q_j v_j : u_i + v_j \leq c(\omega_i, \tilde{\omega}_j), \forall i, j \right\}. \quad (2.4)$$

$\delta_w \in \mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet hierbei das Dirac-Maß.

Einen weiteren Abstand zwischen Maßen definiert das *Kantorovich-Rubinstein Funktional* (vgl. [13]):

$$\begin{aligned} \mu_c(P, Q) &:= \inf \left\{ \int_{\Omega \times \Omega} c(\omega, \tilde{\omega}) \eta(d(\omega, \tilde{\omega})) : \eta \text{ ist endliches Borel-Maß auf } \mathcal{B}(\Omega \times \Omega), \right. \\ &\quad \left. \eta(B \times \Omega) - \eta(\Omega \times \tilde{B}) = P(B) - Q(\tilde{B}) \text{ für alle } B, \tilde{B} \in \mathcal{B} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es sei als nächstes ein grundlegender Satz zitiert, der einen Zusammenhang zwischen der Fortet-Mourier Metrik und dem Kantorovich-Rubinstein Funktional herstellt. Dieser Satz ist [5] und [11] entnommen.

Satz 2.1 *Sei Ω eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^s und $c : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige messbare Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

- (C1) $c(\omega, \tilde{\omega}) = 0$ falls $\omega = \tilde{\omega}$;
- (C2) $c(\omega, \tilde{\omega}) = c(\tilde{\omega}, \omega)$ für alle $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$;
- (C3) $\sup\{c(\omega, \tilde{\omega}) : \omega, \tilde{\omega} \in B, \|\omega - \tilde{\omega}\| \leq \delta\} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ und $B \subseteq \Omega$ beschränkt;
- (C4) es existiert eine messbare Abbildung $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet und die Eigenschaft $c(\omega, \tilde{\omega}) \leq \lambda(\omega) + \lambda(\tilde{\omega})$ für alle $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ erfüllt.

Dann gilt:

$$\zeta_c(P, Q) = \mu_c(P, Q)$$

für beliebige Maße $P, Q \in \mathcal{P}_c(\Omega) = \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) : \int_{\Omega} \lambda(\omega) Q(d\omega) < \infty\}$.

Im Fall daß Ω kompakt ist, genügt die Stetigkeit von c , um die Bedingungen (C3) und (C4) zu erfüllen. Ein wichtiges Beispiel für ein c , welches alle Bedingungen (C1)-(C4) erfüllt, ist die Abbildung c_h in der Form von (2.3). Klar ist, daß dieses c_h den Bedingungen (C1)-(C3) genügt. (C4) wird erfüllt mit der Abbildung $\lambda_h(\omega) := \|\omega - \omega_0\| \max\{1, h(\|\omega - \omega_0\|)\}$.

2.2 Approximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Der Wahrscheinlichkeits-Abstand $\zeta_c(P, Q)$ zweier Maße $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ und $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ wird hier die Grundlage für die Approximation eines gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßes P durch Q sein.

Im wesentlichen können zwei Fälle unterschieden werden:

1. Optimale Szenario-Generierung

Für ein spezielles Maß $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein diskretes Maß $Q^* \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit M Szenarios in Ω zu finden, so daß gilt:

$$\zeta_c(P, Q^*) = \min \left\{ \zeta_c \left(P, \sum_{j=1}^M q_j \delta_{\omega_j} \right) : \sum_{j=1}^M q_j = 1, q_j \geq 0, \omega_j \in \Omega, j = 1, \dots, M \right\} \quad (2.6)$$

Die Grundidee für die Reduktion einer gegebenen diskreten Approximation Q^* von P sieht wie folgt aus:

2. Optimale Szenario-Reduktion

Man bestimme eine Indexmenge $J^* \subset \{1, \dots, M\}$ mit fester Anzahl $\#J^* = k$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^* = \sum_{j \in J^*} q_j^* \delta_{\omega_j}$, so daß:

$$\zeta_c(P, Q^*) = \min \left\{ \zeta_c \left(P, \sum_{j \in J^*} q_j \delta_{\omega_j} \right) : J \subset \{1, \dots, M\}, \sum_{j \in J} q_j = 1, q_j \geq 0 \right\} \quad (2.7)$$

Im allgemeinen ist es sehr schwer, solche Maße Q^* zu finden. Das Problem (2.7) beschreibt ein nicht-konvexes Optimierungsproblem, welches nicht differenzierbar und in den praktischen Anwendungsfällen von sehr großer Dimension ist. Eine generelle algorithmische Lösung erscheint aussichtslos. Für Spezialfälle wird in [10] ein Lösungsversuch unternommen.

Kann vorausgesetzt werden, daß das Maß P diskret ist mit endlichem Träger, oder gut durch ein diskretes Maß approximiert werden kann, ändert sich die Situation.

Dann ergibt sich der Fortet-Mourier Abstand $\zeta_c \left(P, \sum_{j=1}^M q_j \delta_{\omega_i} \right)$ als optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems (siehe Kapitel 3).

Kapitel 3

Szenarioreduktion

Wie in Kapitel 2 betrachtet, ist es generell sehr schwer, gute Approximationen für Wahrscheinlichkeitsmaße zu erhalten. In diesem Kapitel wenden wir uns deshalb einer speziellen Situation zu, in der wir nur diskrete Maße betrachten. Damit vereinfachen sich die Probleme (2.7) und (2.8) und es lassen sich eine Reihe von Aussagen herleiten.

Zu diesem Zweck sei von jetzt ab ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß P mit einer endlichen Zahl von N Szenarios $\omega_i \in \Omega$ mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i , für $i = 1, \dots, N$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Dabei gelte $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Gesucht ist ein bezüglich der Fortet-Mourier Metrik optimales diskretes Maß Q mit Szenarios auf einer Teilmenge von $\{\omega_i : i = 1, \dots, N\}$.

3.1 Optimale und vorgeschriebene Neuverteilung

Wir betrachten obige Ausgangssituation, d.h. es sei $P = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{\omega_i}$. Weiter sei $J \subset \{1, \dots, N\}$ eine beliebige Teilmenge von $\{1, \dots, N\}$.

Definition 3.1 Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt reduziert bezüglich P , falls $Q = \sum_{j \in J} q_j \delta_{\omega_j}$ mit $q_j \geq 0$ und $\sum_{j \in J} q_j = 1$.

Ein reduziertes Maß Q ergibt sich demnach durch entfernen aller Szenarios ω_j mit $j \in J$ und einer Neuverteilung der Wahrscheinlichkeitsgewichte für ω_j mit $j \notin J$. Für jedes reduzierte Maß Q läßt sich nach Formel (2.4) der Fortet-Mourier-Abstand berechnen. Dazu führen wir die Bezeichnung $D(J, q)$ ein.

Definition 3.2

$$D(J, q) := \zeta_c \left(\sum_{i=1}^N p_i \delta_{\omega_i}, \sum_{j \in J} q_j \delta_{\omega_j} \right) = \max \left\{ \sum_{i=1}^N p_i u_i + \sum_{j \in J} q_j v_j : u_i + v_j \leq c(\omega_i, \omega_j) \right\} \quad (3.1)$$

Der Ausdruck (3.1) entspricht einem linearen Optimierungsproblem für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ und $j \notin J$. Für eine optimale Szenario-Reduktion muß eine Indexmenge J gefunden werden, so daß der Abstand $D(J, q)$ des originalen und des reduzierten

Maßes minimal bezüglich aller Indexmengen mit vorgegebener Anzahl von Elementen ist.

Im folgenden werden zwei grundlegende Sätze aus [5] zitiert, die den Abstand $D(J, q)$ näher charakterisieren. Dabei werden die zwei Fälle der *optimalen* und *vorgeschriebenen* Gewichte $q_j, j \in J$ unterschieden.

Satz 3.3 (optimale Neuverteilung)

Für eine vorgegebene Indexmenge $J \subset \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$D_J := \min\{D(J, q) : q_j \geq 0, \sum_{j \notin J} q_j = 1\} = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c(\omega_i, \omega_j). \quad (3.2)$$

Das Minimum wird angenommen in (optimale Neuverteilungsregel):

$$\hat{q}_j = p_j + \sum_{i \in J, j(i)=j} p_i \quad \forall j \notin J$$

wobei $j(i) \in \arg \min_{j \notin J} c(\omega_i, \omega_j)$ für $i \in J$.

Beweis: Wir setzen $I := \{1, \dots, N\}$ und $c_{ij} := c(\omega_i, \omega_j)$ für alle $i, j \in I$. Zum Beweis nutzen wir die beiden nach Satz 2.1 äquivalenten Beschreibungen (2.4) und (2.5) des optimalen Abstands $D(J; q)$:

$$\begin{aligned} D(J; q) &= \min\left\{\sum_{i,j} c_{ij} \eta_{ij} : \eta_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} \eta_{ij} = 1, \sum_{j \notin J} \eta_{ij} - \sum_{i=1}^N \eta_{ij} = p_i - p_j, i \in I, j \notin J\right\} \\ &= \max\left\{\sum_{i=1}^N p_i u_i + \sum_{j \notin J} q_j v_j : u_i + v_j \leq c_{ij}, i \in I, j \notin J\right\}. \end{aligned}$$

Als erstes zeigen wir für ein beliebiges, den Voraussetzungen genügendes q :

$$\sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_{ij} \leq D(J; q).$$

Wir wollen zunächst die zweite der obigen Gleichungen für $D(J; q)$ anwenden. Dazu definieren wir folgende spezielle u_i und v_j :

$$\begin{aligned} u_i &:= \min_{j \notin J} c_{ij} \quad \forall i \in I \\ v_j &:= 0 \quad \forall j \notin J \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$u_i + v_j = \begin{cases} u_i & , \text{ falls } i \in J \text{ und } j \notin J \\ 0 & , \text{ falls } i, j \notin J \end{cases}.$$

Folglich gilt:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i \in I, j \notin J.$$

Durch Einsetzen erhalten wir so für beliebiges q die Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^N p_i u_i + \sum_{j \notin J} q_j v_j = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_{ij} \leq D(J; q).$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß für ein spezielles \hat{q} in der Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt. Dazu wenden wir nun die erste Gleichung zur Bestimmung von $D(J; q)$ an.

Wir wählen $j(i) \in \arg \min_{j \notin J} c_{ij}$ für alle $i \in J$ und definieren:

$$\eta_{ij} = \begin{cases} p_i & , \text{ falls } i = j(i) \text{ und } j \in J \\ p_i & , \text{ falls } i = j \text{ und } j \notin J \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Wir setzen:

$$\hat{q}_j := \sum_{i=1}^N \eta_{ij} \quad \forall j \notin J.$$

Die so definierten \hat{q} und η_{ij} erfüllen die Restriktionsbedingung des Minimums der ersten Gleichung zur Bestimmung von $D(J; \hat{q})$ und es gilt:

$$D(J; \hat{q}) \leq \sum_{i,j} c_{ij} \eta_{ij} = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_{ij}.$$

Somit gilt insgesamt:

$$D_J = D(J; \hat{q}) = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_{ij}$$

mit der optimalen Wahl von \hat{q}

$$\hat{q}_j = p_j + \sum_{i \in J, j(i)=j} p_i \quad \forall j \notin J.$$

Das war zu zeigen. □

Der Satz beschreibt eine explizite Vorschrift zur Berechnung optimaler Gewichte bei vorgegebener Indexmenge J der zu eliminierenden Szenarios. Er besagt, daß sich das Gewicht der eliminierten Szenarios jeweils auf das Gewicht des zu ihnen in Bezug auf c am nächsten liegende Szenario addiert.

Eine andere Situation liegt vor, wenn wir die Neuverteilung der Gewichte vorschreiben. Dann läßt sich eine Abschätzung für den optimalen Abstand $D(J, q)$ angeben, wie der folgende Satz zeigt (vgl. [5]).

Satz 3.4 (vorgeschriebene Neuverteilung)

Die Summe der Gewichte $p_J = \sum_{i \in J} p_i$ der von P zu eliminierenden Szenarios sei wie folgt auf die Gewichte des reduzierten Maßes Q verteilt:

$$q_j = p_j + \lambda_j p_J$$

für $j \notin J$, wobei $\lambda_j \geq 0$ für alle $j \notin J$ und $\sum_{j \notin J} \lambda_j = 1$. Dann gilt für den Abstand

$D_J(J; q)$:

$$D(J; q) \leq \sum_{i \in J} p_i \sum_{j \notin J} \lambda_j c(\omega_i, \omega_j).$$

Dabei gilt die Gleichheit, falls $\#J = 1$ und c die Dreiecksungleichung erfüllt.

Beweis: Zum Beweis wenden wir die primäre Darstellung (2.5) zur Bestimmung von $D(J; q)$ an und definieren:

$$\eta_{ij} = \begin{cases} p_i \lambda_j & , \text{ falls } i \in J \text{ und } j \notin J \\ p_i & , \text{ falls } i = j \text{ und } j \notin J \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Wir setzen wieder $I := \{1, \dots, N\}$ und $c_{ij} = c(\omega_i, \omega_j)$. Für η_{ij} gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j \notin J} \eta_{ij} &= p_i \quad \forall i \in I \\ \sum_{i=1}^N \eta_{ij} &= p_j + \lambda_j p_J = q_j \quad \forall j \notin J \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung:

$$D(J; q) \leq \sum_{i,j} c_{ij} \eta_{ij} = \sum_{i \in J} p_i \sum_{j \notin J} \lambda_j c_{ij}.$$

Sei nun $\#J = 1$, d.h. es sei $J = \{l\}$ mit $l \in I$ beliebig. Wir setzen:

$$u_i = -c_{il} \quad \forall i \in I \quad \text{und} \quad v_j = c_{jl} \quad \forall j \in I \setminus \{l\}$$

Falls c die Dreiecksungleichung erfüllt, gilt somit:

$$u_i + v_j = c_{jl} - c_{il} \leq c_{ij} \quad \forall i \in I, j \in I \setminus \{l\}.$$

Unter Verwendung der dualen Darstellung (2.4) von $D(J; q)$ erhalten wir für diesen Spezialfall die Ungleichung:

$$\begin{aligned} D(J; q) &\geq \sum_{i=1, i \neq l}^N q_i c_{il} - \sum_{i=1}^N p_i c_{il} = \sum_{i=1, i \neq l}^N (q_i - p_i) c_{il} \\ &= p_l \sum_{i=1, i \neq l}^N \lambda_i c_{il}. \end{aligned}$$

□

Im allgemeinen gilt für $\#J \geq 2$ oder im Fall $\#J = 1$ und c erfüllt nicht die Dreiecksungleichung das echte Ungleichheitszeichen in Satz 3.4.

Als nächstes wenden wir uns der Wahl einer Indexmenge $J \subset \{1, \dots, N\}$ mit optimalen Gewichten und fest vorgegebener Anzahl von Elementen zu. Wir erhalten so das Problem:

$$\min \{ D_J = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c(\omega_i, \omega_j) : J \subset \{1, \dots, N\}, \#J = k \} \quad (3.3)$$

für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq N$.

Das Problem (3.3) stellt ein sehr komplexes kombinatorisches Optimierungsproblem dar. Generelle Lösungen für $1 \leq k \leq N$ sind sehr schwer zu erhalten, da die Zahl der Indexmengen J mit vorgegebener Kardinalität $\#J = k$ binomial steigt. Das legt die Vermutung nahe, daß eine exakte algorithmische Lösung von (3.3) nicht in *polynomialer Zeit* zu bestimmen ist, daß es sich hierbei also um ein *NP-schweres* Problem handelt (vgl. [3]). Aber für die Spezialfälle $k = 1$ und $k = N - 1$ ergeben sich vereinfachte Probleme, wie in den nächsten Abschnitten zu sehen ist.

3.1.1 Eliminierung eines einzigen Szenarios

Betrachten wir den Spezialfall $\#J = 1$, d.h. wir wollen nur ein einziges Szenario eliminieren. In diesem Fall ist das Optimierungsproblem (3.3) äquivalent zu folgendem Problem:

$$\min_{l \in \{1, \dots, N\}} p_l \min_{j \neq l} c(\omega_l, \omega_j) \quad (3.4)$$

Wird das Minimum in $l_* \in \{1, \dots, N\}$ angenommen, d.h. das Szenario ω_{l_*} wird eliminiert, so liefert die optimale Neuverteilungsregel von Satz 3.3 die Verteilung für das reduzierte Wahrscheinlichkeitsmaß Q .

Sei $j_* \in \arg \min_{j \neq l_*} c(\omega_{l_*}, \omega_j)$. Dann gilt für die Gewichte q_l von Q :

$$q_l = p_l \text{ für alle } l \notin \{l_*, j_*\} \text{ und } q_{j_*} = p_{j_*} + p_{l_*}.$$

Verfolgt man diese Strategie rekursiv, so ist das ein Konzept eines Algorithmus zum schrittweisen Entfernen von Szenarios eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P (siehe Abschnitt 3.2).

3.1.2 Eliminierung aller Szenarios bis auf ein Szenario

Ein zweiter Spezialfall der das Problem (3.3) vereinfacht ist der Fall, daß $\#J = N - 1$, d.h. wir wollen alle Szenarios bis auf ein einziges eliminieren. In diesem Fall ist das Optimierungsproblem (3.3) äquivalent zu folgendem Problem:

$$\min_{u \in \{1, \dots, N\}} \sum_{i=1}^N p_i c(\omega_i, \omega_u) \quad (3.5)$$

Wird das Minimum in $u_* \in \{1, \dots, N\}$ angenommen, so verbleibt nur das Szenario ω_{u_*} und vereinigt die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse auf sich, d.h. das reduzierte Wahrscheinlichkeitsmaß Q besteht nur aus dem Szenario ω_{u_*} mit zugehöriger Wahrscheinlichkeit $q_{u_*} = 1$.

Auch diese Strategie, kann rekursiv angewendet, zu einem Konzept eines Algorithmus zur Szenarioreduktion erweitert werden (siehe Abschnitt 3.3).

3.2 Der Backward-Algorithmus

Der *Backward-Algorithmus* verwendet rekursiv die Methode des Eliminierens einzelner Szenarios. Es gilt folgender Satz.

Satz 3.5 (untere Schranke)

Es gilt

$$\sum_{i=1}^k p_{l_i} \min_{j \neq l_i} c(\omega_{l_i}, \omega_j) \leq \min\{D_J : J \subset \{1, \dots, N\}, \#J = k\},$$

falls für die Indizes l_i gilt:

$$l_i \in \arg \min_{l \in \{1, \dots, N\} \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}\}} p_l \min_{j \neq l} c(\omega_l, \omega_j) \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (3.6)$$

Weiterhin gilt:

Die Indexamenge $\{l_1, \dots, l_k\}$ ist Lösung des Optimierungsproblems (3.3), falls für jedes $i = 1, \dots, k$ die Menge $\arg \min_{j \neq l_i} c(\omega_{l_i}, \omega_j) \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k\}$ nicht leer ist.

Beweis: Für eine beliebige Indexamenge $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, N\}$ mit $\#J = k$ gilt nach Satz 3.3:

$$\begin{aligned} D_J &= \sum_{i=1}^k p_{j_i} \min_{j \notin \{j_1, \dots, j_k\}} c(\omega_{j_i}, \omega_j) \geq \sum_{i=1}^k p_{j_i} \min_{j \neq j_i} c(\omega_{j_i}, \omega_j) \\ &\geq \sum_{i=1}^k p_{l_i} \min_{j \neq l_i} c(\omega_{l_i}, \omega_j) \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Ungleichung eine Konsequenz der Definition für die Indizes l_i . Ist $\arg \min_{j \neq l_i} c(\omega_{l_i}, \omega_j) \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k\} \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, k$, so gilt ferner:

$$\min_{j \neq l_i} c(\omega_{l_i}, \omega_j) = \min_{j \notin \{l_1, \dots, l_k\}} c(\omega_{l_i}, \omega_j).$$

Folglich kann die obige Abschätzung für D_J fortgesetzt werden zu:

$$D_J \geq \sum_{i=1}^k p_{l_i} \min_{j \notin \{l_1, \dots, l_k\}} c(\omega_{l_i}, \omega_j) = D_{\{l_1, \dots, l_k\}}.$$

Damit ist die Indexmenge $\{l_1, \dots, l_k\}$ Lösung des Problems (3.3). □

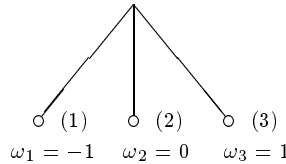
Mit Hilfe von Satz 3.5 läßt sich der Backward-Algorithmus wie folgt beschreiben.

Backward-Algorithmus

- Im ersten Schritt ist ein Index k_1 mit $1 \leq k_1 \leq k$ zu bestimmen, so daß die zugehörige Indexmenge $J_1 = \{l_1^{[1]}, \dots, l_{k_1}^{[1]}\}$ Lösung des Problems (3.3) für $\#J = k_1$ ist.
- Im zweiten Schritt wird die optimale Neuverteilungsregel von Satz 3.3 für $J = J_1$ angewendet, so daß ein reduziertes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^{[1]}$ durch die Eliminierung der Szenarios $\omega_j, j \in J_1$, entsteht.
- Schließlich werden die Schritte eins und zwei für $Q^{[i]}$ solange wiederholt, bis im r -ten Schritt $\sum_{i=1}^r k_i = k$.
- Zu allerletzt wird auf die Indexmenge $J = \bigcup_{i=1}^r J_i$ nochmals die optimale Neuverteilungsregel angewendet.

Bemerkung: Für die Güte des Algorithmus ist die Wahl der $l_i^{[k]}$ im k -ten Schritt nicht unerheblich, wie folgendes Beispiel illustriert.

Beispiel: Wir betrachten einen sehr einfachen *Szenariobaum* mit 3 Szenarios, d.h. es sei eine diskrete Wahrscheinlichkeitsmenge $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ mit zugehörigen Elementarwahrscheinlichkeiten $P(\{-1\}) = P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$ gegeben.



Wir wollen nun den Baum auf genau ein Szenario nach der Backward-Strategie reduzieren. Dazu benötigen wir zunächst die Werte $c(\omega_i, \omega_j)$ für $i, j = 1, 2, 3$. Sei in diesem Fall $c(\omega_i, \omega_j) := |\omega_j - \omega_i|$, d.h. wir erhalten eine einfache symmetrische Matrix:

$$\{c(\omega_i, \omega_j)\}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im 1. Schritt ist nach Satz 3.5 ein Index l_1 festzulegen, so daß gilt:

$$l_1 \in \arg \min_{l \in \{1,2,3\}} \frac{1}{3} \min_{j \neq l} c(\omega_l, \omega_j).$$

Wir wählen z.B. $l_1 = 2$.

Im 2. Schritt ist nun ein Index l_2 derart zu bestimmen, daß gilt:

$$l_2 \in \arg \min_{l \in \{1,3\}} \frac{1}{3} \min_{j \neq l} c(\omega_l, \omega_j).$$

Hier kann entweder $l_2 = 1$ oder $l_2 = 3$ gewählt werden. In beiden Fällen gilt jedoch:

$$\arg \min_{j \neq l_2} c(\omega_{l_2}, \omega_j) \setminus \{2\} = \emptyset.$$

Das bedeutet, wenn im 1. Schritt $l_1 = 2$ gesetzt wird, muß bereits die Neuverteilungsregel von Satz 3.3 angewandt werden. Dabei wird das 2. Szenario eliminiert und seine Wahrscheinlichkeitsmasse $\frac{1}{3}$ auf die des 1. oder 3. Szenario addiert. Nach einem 2. Backward-Schritt erhält man schließlich ein reduziertes Maß Q , bestehend aus nur noch einem einzigen Szenario $\{-1\}$ oder $\{+1\}$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit 1. Der Fortet-Mourier Abstand zwischen dem originalen und dem reduzierten Baum ist in beiden Fällen gleich. Er kann nach Satz 3.3 wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \zeta_c(P, Q) &= D_{J=\{1,2\}} = \sum_{i \in \{1,2\}} p_i \min_{j=3} c(\omega_i, \omega_j) \\ &= \frac{1}{3}|1 - (-1)| + \frac{1}{3}|1 - 0| = 1. \end{aligned}$$

Hätten wir uns im 1. Schritt hingegen für den Index $l_1 = 1$ (bzw. $l_1 = 3$) entschieden, und hätten daraufhin im 2. Schritt gerade $l_2 = 3$ (bzw. $l_2 = 1$) gewählt, so würde sich für den Fortet-Mourier Abstand des reduzierten Maßes \hat{Q} ergeben:

$$\begin{aligned} \zeta_c(P, \hat{Q}) &= D_{J=\{1,3\}} = \sum_{i \in \{1,3\}} p_i \min_{j=2} c(\omega_i, \omega_j) \\ &= \frac{1}{3}|0 - (-1)| + \frac{1}{3}|0 - 1| = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Das wäre in diesem Beispiel auch die optimale Lösung für das Eliminieren zweier Szenarios.

Dieses einfache Beispiel zeigt sehr deutlich, daß die Wahl der Indizes l_i zur Szenarioreduktion sehr großen Einfluß auf die Güte der Approximation bei der Szenarioreduktion hat.

3.3 Der Forward-Algorithmus

Der *Forward-Algorithmus* geht im Gegensatz zum *Backward-Algorithmus* genau entgegengesetzt vor. Er nutzt die Strategie des Eliminierens aller Szenarios bis auf eines, welches die gesamte Szenariomenge am besten approximiert. Schrittweise fortgesetzt, kann auf diese Weise ein reduziertes Maß Q mit $k \leq N$ Szenarios erzeugt werden. Wir betrachten folgenden Satz.

Satz 3.6 (obere Schranke)

Es gilt

$$\min\{D_J : J \subset \{1, \dots, N\}, \#J = k\} \leq \sum_{i \in J_u} p_i \min_{j \notin J_u} c(\omega_i, \omega_j),$$

falls $J_u = \{1, \dots, N\} \setminus \{u_1, \dots, u_{N-k}\}$ und für die Indizes u_j gilt:

$$u_j \in \arg \min_{l \notin \{u_1, \dots, u_{j-1}\}} \sum_{i \notin \{u_1, \dots, u_{j-1}, l\}} p_i \min_{u \in \{u_1, \dots, u_{j-1}, l\}} c(\omega_i, \omega_u) \quad \forall j = 1, \dots, N - k. \quad (3.7)$$

Beweis: Es gilt unter Verwendung von Satz 3.3:

$$\min\{D_J : J \subset \{1, \dots, N\}, \#J = k\} \leq D_{J_u} = \sum_{i \in J_u} p_i \min_{j \notin J_u} c(\omega_i, \omega_j).$$

□

Mit Hilfe von Satz 3.6 läßt sich der Forward-Algorithmus wie folgt beschreiben.

Forward-Algorithmus

- Für $j = 1, \dots, N - k$ sind die Indizes u_j gemäß Formel (3.6) zu bestimmen.
- Anschließend wird die optimale Neuverteilungsregel von Satz 3.3 auf die Indexmenge $J = \{1, \dots, N\} \setminus \{u_1, \dots, u_{N-k}\}$ angewendet, um das reduzierte Wahrscheinlichkeitsmaß Q zu erhalten.

Auf den ersten Blick erscheint der Forward-Algorithmus im Vergleich zum Backward-Algorithmus nicht so komplex, dem ist aber nicht so. Im Gegenteil, wie die Berechnungen und Tests in [5] ergeben haben, ist ein deutlicher Zeitunterschied zwischen den beiden Algorithmen zu verzeichnen. So benötigte die dort vorgenommene Reduktion eines Szenariobaums mit 729 Szenarios auf 400 Szenarios mit dem Backward-Algorithmus lediglich ca. 8 Sekunden. Dagegen benötigte eine Implementierung des Forward-Algorithmus ca. 6000 Sekunden. Allerdings lag dabei das Ergebnis des Forward-Algorithmus deutlich näher am Optimum. Es lohnt sich daher, sich noch genauer mit dem Forward-Algorithmus zu beschäftigen.

3.3.1 Das Forward-Schema

Wir betrachten noch einmal die Formel (3.7) des Forward-Algorithmus.

$$u_j \in \arg \min_{l \notin \{u_1, \dots, u_{j-1}\}} \sum_{i \notin \{u_1, \dots, u_{j-1}, l\}} p_i \min_{u \in \{u_1, \dots, u_{j-1}, l\}} c(\omega_i, \omega_u) \quad \forall j = 1, \dots, N - k$$

In jedem Schritt ist das Minimum einer bestimmten Summe zu finden. Wir führen neue Bezeichnungen ein und definieren induktiv:

Schritt [1]

$$\begin{aligned} \hat{c}_{ij}^{[1]} &:= c(\omega_i, \omega_j) & i, j = 1, \dots, N \\ z_j^{[1]} &:= \sum_{i=1/i \neq j}^N p_i \hat{c}_{ij}^{[1]} & j = 1, \dots, N \\ u^{[1]} &\in \arg \min_{j \in \{1, \dots, N\}} z_j^{[1]} \end{aligned}$$

Schritt [k]

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{ij}^{[k]} &:= \min\{\hat{c}_{ij}^{[k-1]}, \hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[k-1]}\} & i, j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\} \\
z_j^{[k]} &:= \sum_{i \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}, j\}} p_i \hat{c}_{ij}^{[k]} & j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\} \\
u^{[k]} &\in \arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} z_j^{[k]}
\end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen gilt folgender Satz.

Satz 3.7 Die Indexmenge $\{u^{[1]}, \dots, u^{[k]}\}$ ist Lösung des Forward-Algorithmus, d.h. sie genügt der Bedingung (3.7) für jedes $1 \leq k \leq N$.

Beweis: Sei $1 \leq k \leq N$ beliebig fixiert. Für $k = 1$ folgt die Behauptung durch Einsetzen der Definitionen für z und \hat{c} direkt. Sei also $k > 1$. Nach Definition gilt:

$$u^{[k]} \in \arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} z_j^{[k]}.$$

Weiterhin gilt nach Definition:

$$\begin{aligned}
\arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} z_j^{[k]} &= \arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} \sum_{i \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}, j\}} p_i \hat{c}_{ij}^{[k]} \\
&= \arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} \sum_{i \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}, j\}} p_i \min\{\hat{c}_{ij}^{[k-1]}, \hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[k-1]}\}.
\end{aligned}$$

Da aber gilt (wiederholtes Anwenden der Definition):

$$\begin{aligned}
\min\{\hat{c}_{ij}^{[k-1]}, \hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[k-1]}\} &= \min\{\min\{\hat{c}_{ij}^{[k-2]}, \hat{c}_{iu^{[k-2]}}^{[k-2]}\}, \min\{\hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[k-2]}, \hat{c}_{iu^{[k-2]}}^{[k-2]}\}\} \\
&= \min\{\hat{c}_{ij}^{[k-2]}, \hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[k-2]}, \hat{c}_{iu^{[k-2]}}^{[k-2]}\} \\
&\vdots \\
&= \min\{\hat{c}_{ij}^{[1]}, \hat{c}_{iu^{[k-1]}}^{[1]}, \dots, \hat{c}_{iu^{[1]}}^{[1]}\},
\end{aligned}$$

folgt mit $\hat{c}_{ij}^{[1]} = c(\omega_i, \omega_j)$:

$$\arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} z_j^{[k]} = \arg \min_{j \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}} \sum_{i \notin \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}, j\}} p_i \min_{u \in \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}, j\}} c(\omega_i, \omega_u).$$

Damit genügt $u^{[k]}$ der Forward-Bedingung (3.7). □

Folgerung 3.8 Es gilt für alle $1 \leq k \leq N$ und $J_u^{[k]} := \{1, \dots, N\} \setminus \{u^{[1]}, \dots, u^{[k]}\}$: $z_{u^{[k]}}^{[k]} = D_{J_u^{[k]}}$, d.h. $z_{u^{[k]}}^{[k]}$ repräsentiert für jedes k den Fortet-Mourier Abstand zwischen dem ursprünglichen und dem reduzierten Maß auf der k -ten Stufe des Forward-Algorithmus.

Beweis: Die Folgerung (3.8) ist Konsequenz der Definition von z und des Beweises zu Satz 3.3. □

Die Definitionen von z und \hat{c} in dieser Form haben den Vorteil, daß sie sich sehr

gut und effizient implementieren lassen.

Algorithmus des Forward-Schemas

Im k -ten Schritt sind folgende Daten gegeben:

- eine Indexmenge $\{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\} \subset \{1, \dots, N\}$,
- Werte $\hat{c}_{ij}^{[k]}$ mit $i, j \in G$ auf dem durch $\{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\}$ definierten Gitter $G := \{1, \dots, N\} \setminus \{u^{[1]}, \dots, u^{[k-1]}\} \stackrel{Def}{=} \{g_1, \dots, g_{N-k+1}\}$.

Die Berechnung der Daten im k -ten Schritt kann nach folgendem Schema durchgeführt werden.

Ω	ω_{g_1}	\dots	ω_{g_j}	\dots	$\omega_{g_{N-k+1}}$	P
ω_{g_1}						P_{g_1}
\vdots			\vdots			\vdots
ω_{g_i}		\dots	$\hat{c}_{g_i g_j}^{[k]}$	\dots		P_{g_i}
\vdots			\vdots			\vdots
$\omega_{g_{N-k+1}}$						$P_{g_{N-k+1}}$
$\sum p_i \hat{c}_{ij}^{[k]}$	$z_{g_1}^{[k]}$	\dots	$z_{g_j}^{[k]}$	\dots	$z_{g_{N-k+1}}^{[k]}$	j_*

Sei $j_* \in G$ der Index, in dem das Minimum der $z_j^{[k]}, j \in G$ angenommen wird. Ist $k < k_{end}$, so sind als letztes noch die Werte $\hat{c}^{[k+1]}$ zu bestimmen:

$$\hat{c}_{ij}^{[k+1]} := \min\{\hat{c}_{ij}^{[k]}, \hat{c}_{ij_*}^{[k]}\} \quad \forall i, j \in G \setminus \{j_*\}$$

Bemerkung 3.9

(1) Der Algorithmus hat in jedem Schritt die Komplexität $\mathcal{O}((N-k)^2)$.

(2) Die Tatsache, daß $z_{j_*}^{[k]}$ gerade der Fortet-Mourier Abstand im k -ten Schritt ist (nach Folgerung 3.8), läßt sich bei der Implementierung gut nutzen. So ist es möglich, als Abbruchkriterium nicht unbedingt eine feste Tiefe k vorzugeben, sondern z.B. eine obere Grenze für den Fortet-Mourier Abstand des reduzierten Maßes, die dann mit möglichst minimalen k eingehalten wird.

3.4 Vergleich zwischen Forward- und Backward-Algorithmus

3.4.1 Komplexität der Algorithmen

Wie die ersten numerischen Tests in [5] zeigten, spielt die Rechenzeit eine nicht unwesentliche Rolle. Dort gab es große Unterschiede bei der Berechnung von reduzierten Szenariobäumen. Wenden wir uns als erstes wieder dem Backward-Algorithmus zu.

Um im ersten Schritt aus der Menge der N Szenarios den Index l_1 des zu eliminierenden Szenarios zu bestimmen, müssen nach Formel (3.6) zunächst $2N(N-1)$ Operationen ausgeführt werden. Damit würde man für den Index l_k des k -ten zu

eliminierenden Szenarios einen Aufwand von $2(N - k)(N - k - 1)$ erhalten. Nun kann der Aufwand aber sehr erheblich verringert werden, wenn man in jedem Schritt nur die Minima für das nach der Neuverteilungsregel veränderte Szenario neu berechnet. Alle anderen Szenarios bleiben dabei unverändert. Damit erhält man im $(k + 1)$ -ten Schritt nur noch eine Komplexität von $\mathcal{O}(N)$, oder insgesamt für das Streichen der ersten k Szenarios $\mathcal{O}(2N^2 + (k - 1)N)$. Die Konstante 2 ist aber im allgemeinen nicht exakt einzuhalten, da auch Speicherzugriffe und das Betrachten der Minima auf Gitterpunkten im k -ten Schritt Zeit in der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$ in Anspruch nehmen. Seien in einer Konstanten C alle diese Konstanten zusammengefaßt, so erhalten wir folgende Aussage.

Lemma 3.10 *Die Komplexität des Backward-Algorithmus für das Eliminieren von $1 \leq k \leq N$ Szenarios aus einer Szenariomenge mit N Szenarios beträgt $\mathcal{O}(CN^2)$ mit einer Konstanten C .*

Betrachten wir nun den Forward-Algorithmus, insbesondere das Forward-Schema. Wie in Bemerkung 3.9 bereits festgestellt, ist der Rechenaufwand im k -ten Schritt $\mathcal{O}((N - k)^2)$. Um also eine Menge von N Szenarios auf k Szenarios zu reduzieren, sind insgesamt $C \sum_{i=0}^{k-1} (N - i)^2$ Operationen notwendig. Damit gilt für den Forward-Algorithmus:

Lemma 3.11 *Die Komplexität des Forward-Algorithmus für das Reduzieren einer Szenariomenge mit N Szenarios auf $1 \leq k \leq N$ Szenarios beträgt $\mathcal{O}(CkN^2)$ mit einer Konstanten C .*

Man beachte, daß in Lemma 3.11 die Zahl k die Anzahl der noch verbleibenden Szenarios in der reduzierten Szenariomenge widerspiegelt. Dagegen ist in Lemma 3.10 k die Anzahl der reduzierten Szenarios.

3.4.2 Güte der Approximation

Die numerischen Tests in [5] haben gezeigt, daß beide Algorithmen offensichtlich sehr gute Ergebnisse erzielen. Dennoch gibt es Unterschiede. So ist fast ausnahmslos zu beobachten, daß der Abstand zwischen ursprünglichem und reduziertem Maß beim Forward-Algorithmus näher am Optimum liegt. Preis dafür ist allerdings ein höherer Rechenaufwand gegenüber dem des Backward-Algorithmus.

Die besseren Resultate des Forward-Algorithmus sind offenbar auf einen Nachteil in der Strategie des Backward-Algorithmus zurückzuführen. Dieser scheint in der Tatsache zu liegen, daß die Gewichte der eliminierten Szenarios stets auf ganz bestimmte Szenarios *fest* neuverteilt werden, nämlich auf die zu ihnen am nächsten gelegenen. Das bedeutet aber, daß sich die Last einzelner Szenarios in jedem Schritt erhöht, was zu einer ungleichen Verteilung führt, was sich im folgenden Schritt möglicherweise negativ auswirken kann. Das ist ein qualitativer Unterschied zur Strategie des Forward-Algorithmus, bei der in jedem Schritt das bestmögliche Szenario gewählt wird, welches zusammen mit den bis dahin bestimmten Szenarios die gesamte Szenariomenge am besten approximiert. Dabei werden in jedem Schritt die Gewichte neuverteilt, ohne sich jedoch bei der Verteilung festzulegen. Erst im letzten Schritt erfolgt die Festlegung der Last in der reduzierten Szenariomenge.

Eine weitere Konsequenz dieser Strategie ist eine ausgeglichene und harmonischere Verteilung der Szenarios in der reduzierten Menge. Dazu sei hier auf das letzte Kapitel 4 verwiesen.

Interessant wäre aber auch die Fragestellung, wie nahe man bei der Approximation am Ende wirklich an die Optimalwerte des allgemeinen Problems (3.3) heran kommt. Nun, es ist im allgemeinen sehr schwer, an Aussagen über eine *absolute* oder *relative Güte* zu gelangen. Wie schon angedeutet, ist zu vermuten, daß es sich bei dem Problem (3.3) der Szenarioreduktion um ein *NP-schweres* Problem handelt. Exakte Lösungen sind dabei nicht in *polynomialer Zeit* erreichbar [3]. Dabei sind Abschätzungen und Güteaussagen von *Approximationsalgorithmen* entweder gar nicht, oder nur sehr schwierig und in Spezialfällen zu bekommen.

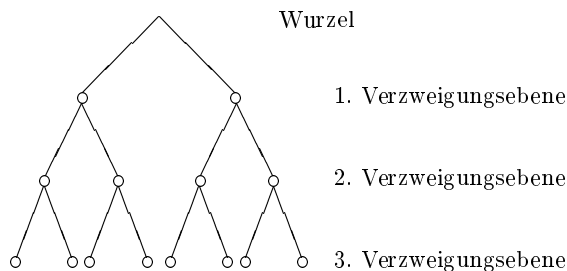
Im nächsten Abschnitt wird der Versuch unternommen, wenigstens für besondere Strukturen, die in der Optimierungstheorie oft auftretenden Szenariobäume, bestimmte Teilaussagen und Kriterien für die Optimalwerte herzuleiten.

3.5 Anwendung auf Szenariobäume

In den vorherigen Abschnitten haben wir gesehen, daß exakte Lösungen des allgemeinen Optimierungsproblems (3.3) sehr schwer zu bekommen sind. Wir haben zwei Approximationsalgorithmen, den Forward und Backward Algorithmus kennengelernt. Ziel in Kapitel 4 wird es sein, diese Algorithmen auf Aufgaben aus der Praxis anzuwenden.

In der stochastischen Optimierung treten Probleme der Szenarioreduktion in ganz bestimmter Form auf. Das zu reduzierende Wahrscheinlichkeitsmaß P ist dabei diskret und die einzelnen Szenarios sind angeordnet in einem Szenariobaum.

Ein Szenariobaum besteht aus einer Menge von Knoten mit jeweils n ($n \in \mathbb{N}$) Verzweigungen. Der Verzweigungsgrad ist dabei in der Regel $n = 2$ oder $n = 3$. Insgesamt gibt es K ($K \in \mathbb{N}$) Verzweigungsebenen. Auf der k -ten Ebene ($1 \leq k \leq K$) gibt es somit n^k Knoten. Das folgende Bild zeigt einen 3-stufigen binären Szenariobaum, d.h. der Verzweigungsgrad ist $n = 2$ und es existieren $K = 3$ Verzweigungsebenen.



Beispiel: 3-stufiger binärer Baum

Wie sehen nun die einzelnen Szenarios und die zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten aus? Jeder Ast, d.h. ein vollständiger Pfad von der Wurzel des Baums bis zur untersten Ebene, repräsentiert ein Szenario. Demnach gibt es insgesamt n^K verschiedene Szenarios. Entscheidend für die Charakterisierung der einzelnen Szenarios sind die Positionen der Knoten im Szenariobaum. Jedes Szenario stellt sich dar als K -dimensionaler Vektor im Vektorraum \mathbb{R}^K .

Für jede Verzweigungsebene können wir Mengen V_k einführen, definiert durch:

$$V_k := \{\delta_1^k, \dots, \delta_n^k\} \subset \mathbb{R} \quad 1 \leq k \leq K. \quad (3.8)$$

Dabei ist n der Grad der Verzweigungen. Die Mengen V_k bestimmen die Größe und Richtung der Verzweigungen, ausgehend von jedem Knoten. Die Werte $\delta_1^k, \dots, \delta_n^k$ sind

dabei beliebige reelle Zahlen. Die Menge der Szenarios $\{\omega_s\}_{s=1, \dots, n^K}$ läßt sich nunmehr identifizieren als Menge der Vektoren $\omega_s = (\omega_s^1, \dots, \omega_s^K) \in \mathbb{R}^K$, $s = 1, \dots, n^K$, so daß für jedes s gilt:

$$\exists(\delta_s^1, \dots, \delta_s^K) \in V_1 \times \dots \times V_K : \quad \omega_s^k = \sum_{i=1}^k \delta_s^i \quad \forall 1 \leq k \leq K. \quad (3.9)$$

Die Wahrscheinlichkeit soll für alle diese Szenarios gleich sein, d.h. die Einzelwahrscheinlichkeit für jedes Szenario ω_s ist $p_s = \frac{1}{n^K}$.

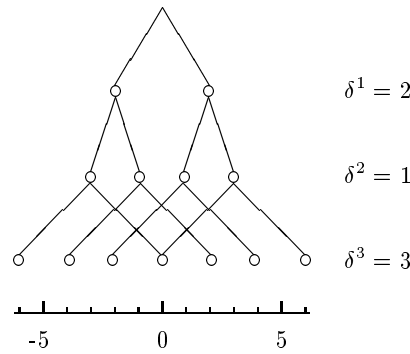
In Anwendungsfällen finden wir häufig binäre Szenariobäume oder Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3. Die Mengen V_k sind dabei sehr einfach strukturiert. Es gilt auf allen Verzweigungsebenen $1 \leq k \leq K$: $V_k = \{-\delta^k, \delta^k\}$ bzw. $V_k = \{-\delta^k, 0, \delta^k\}$. Wir wollen solche Szenariobäume *gleichmäßig* nennen.

Definition 3.12 Ein Szenariobaum heißt *gleichmäßig*, falls gilt:

$$\delta \in V_k \Leftrightarrow -\delta \in V_k \quad \forall 1 \leq k \leq K,$$

d.h. der Szenariobaum ist *symmetrisch* bzgl. der Links- und Rechtsverzweigungen.

Beispiele finden sich in zahlreichen Veröffentlichungen. Angeführt sei hier die Arbeit [5].



Beispiel: Binärer Szenariobaum

In diesem binären Beispielbaum gibt es insgesamt 8 Szenarios. In der Praxis repräsentieren die Szenarios der Szenariobäume eine Vielzahl möglicher Realisierungen eines stochastischen Prozesses, die Ausgangspunkt eines deterministischen Optimierungsproblems sind. Um gute Optimierungsergebnisse zu erzielen, sollte die Zahl der Szenarios hinreichend groß sein. $K = 10$ Verzweigungsebenen sind dabei nicht undenkbar. Das führt allerdings schon zu $2^{10} = 1024$ Szenarios, was wiederum hohe Anforderungen an die Implementierungen in Hinblick sowohl auf Speicherbedarf, als auch auf Rechenzeiten stellt.

3.5.1 Binäre Szenariobäume

Jetzt wollen wir uns mit speziellen binären Szenariobäumen beschäftigen. Dabei wollen wir untersuchen, wie man unter Ausnutzung der Baumstruktur ganz bestimmte Szenarios des Baums eliminiert, so daß sich das Gewicht dieser Szenarios auf *benachbarte* Szenarios addiert. Dazu werden wir wiederum die optimale Neuverteilungsregel von Satz 3.3 anwenden.

Sei im folgenden ein binärer Szenariobaum mit $K \in \mathbb{N}$ Verzweigungsebenen und $N := 2^K$ Szenarios gegeben. Die Werte der Verzweigungen seien durch

$$V_k = \{-\delta^k, \delta^k\} \subset \mathbb{R} \quad 1 \leq k \leq K$$

gegeben, d.h. V_k ist allein durch den Verzweigungswert $\delta^k \in \mathbb{R}^+$ bestimmt und der Szenariobaum ist gleichmäßig.

Desweiteren sei im folgenden die Abbildung $c(\omega_i, \omega_j)$ als der euklidische Abstand in \mathbb{R}^K definiert, d.h. es gelte

$$c(\omega_i, \omega_j) := \|\omega_i - \omega_j\|_2 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn man Szenarios auf nur *einer Ebene* eliminiert. Hintergrund ist dabei der Gedanke, daß man im Szenariobaum möglichst dort Szenarios eliminiert, wo der Verzweigungswert δ^k am kleinsten ist, um den Abstand zu einem *benachbarten* Szenario klein zu halten, was wiederum nach Satz 3.3 zu einer optimalen Reduktion von Szenarios führt.

Die 1/2-Lösung

Betrachten wir zunächst einen gleichmäßigen Szenariobaum, bei dem $\delta^k \equiv \delta$ für alle $1 \leq k \leq K$ gilt. Für den Abstand zweier beliebiger Szenarios gilt nach Konstruktion (3.9) stets:

$$\|\omega_i - \omega_j\|_2 \geq 2\delta \quad \forall i \neq j; i, j = 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

Weiterhin folgt, daß für gewisse $i_0, j_0 \in \{1, \dots, N\}$ das Gleichheitszeichen gilt. Ziel ist es nun, möglichst viele solcher Szenariopaare zu finden, für die obiger Abstand minimal wird. Ein erstes Resultat liefert folgende Aussage.

Satz 3.13 *Für jeden K -stufigen gleichmäßigen binären Szenariobaum mit $\delta^k \equiv \delta$ und $N = 2^K$ Szenarios gilt:*

$$D_{\frac{N}{2}}^{opt} := \min\{D_J : \#J = \frac{N}{2}\} = \delta$$

Das heißt, ein optimal reduzierter Szenariobaum mit $\frac{N}{2}$ -Szenarios hat zum originalen Szenariobaum einen Fortet-Mourier Abstand von δ .

Beweis: Wir beweisen diesen Satz konstruktiv. Betrachten wir die unterste Verzweigungsebene. Wir definieren eine Indexmenge J und eine Menge J_Ω der zu eliminierenden Szenarios und nutzen dabei Darstellung (3.9):

$$J_\Omega := \{\omega_i : \delta_i^K = \delta\} \quad \text{und} \quad J := \{i : \omega_i \in J_\Omega\}.$$

Die Menge J_Ω enthält genau $\frac{N}{2}$ Szenarios. Zu jedem beliebigen Szenario $\omega \in J_\Omega$ existiert ein Szenario $\hat{\omega} \notin J_\Omega$ mit $\hat{\omega}^k = \omega^k$ für alle $1 \leq k < K$ und $\hat{\omega}^K - \hat{\omega}^{K-1} = \hat{\delta}^K = -\delta$. Folglich gilt $\|\omega - \hat{\omega}\|_2 = 2\delta$. Unter Nutzung von Ungleichung (3.10) und mit Verwendung von Satz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} D_J &= \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} \|\omega_i - \omega_j\|_2 \\ &= \sum_{i \in J} \frac{1}{N} 2\delta = \delta \end{aligned}$$

Ungleichung (3.10) sichert uns auch, daß die Menge J optimal ist. □

Satz 3.12 gibt für Spezialfälle eine explizite Lösung des allgemeinen Problems (3.3) an. Wir wollen nun versuchen, das Ergebnis zu verallgemeinern. Aus dem Beweis zum Satz 3.12 ergibt sich sofort:

Folgerung 3.14 *Für einen K -stufigen gleichmäßigen binären Szenariobaum mit $N = 2^K$ Szenarios gelte $\delta^K \leq \delta^k$, für alle $1 \leq k \leq K$. Dann gilt: $D_{\frac{N}{2}}^{opt} = \delta_K$*

Die 1/4-Lösung

Im allgemeinen wird das Minimum der Werte δ^k nicht in der untersten Ebene $k = K$ angenommen werden. Damit wird die Situation etwas schwieriger als bei der 1/2-Lösung. In der Praxis treten vielmehr häufig Szenariobäume mit der Eigenschaft $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^k \leq \dots \leq \delta^K$ auf. Im folgenden soll auch für solche Szenariobäume ein analoges Approximationsresultat hergeleitet werden. Dazu betrachten wir als erstes folgende Eigenschaft.

Definition 3.15 *Ein gleichmäßiger binärer Szenariobaum mit K Verzweigungsebenen heißt regulär auf der k -ten Verzweigungsebene ($1 \leq k < K$), falls gilt:*

$$|\delta^{k+1} - \delta^k| \leq \frac{1}{\sqrt{K-k}} \delta^k. \quad (3.11)$$

Ein Szenariobaum heißt regulär, falls er regulär auf allen Verzweigungsebenen ist.

Die Ungleichung (3.11) trifft eine Aussage über den maximalen Zuwachs der Verzweigungszahlen zweier aufeinanderfolgender Verzweigungsebenen. Im obigen Fall $\delta_k \equiv \delta$, für alle k , ist die Regularitätsbedingung trivialerweise erfüllt. Reguläre binäre Szenariobäume besitzen folgende wichtige Eigenschaft.

Lemma 3.16 *Für einen gleichmäßigen binären Szenariobaum gelte für die Verzweigungszahlen $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^K$. Desweiteren sei der Szenariobaum regulär auf der ersten Verzweigungsebene. Dann gilt für den Abstand zweier voneinander verschiedener Szenarios:*

$$\|\omega_i - \omega_j\|_2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k \quad \forall i \neq j : i, j = 1, \dots, N; \quad (3.12)$$

wobei d_k definiert ist als:

$$d_k := \sqrt{(2\delta^k)^2 + (K-k)(2\delta^{k+1} - 2\delta^k)^2}.$$

Beweis: Sei $\omega_i \neq \omega_j$ beliebig fixiert. Nach Formel (3.9) existiert Darstellung für die Komponenten

$$\omega_i^k = \sum_{l=1}^k \delta_i^l \quad \text{und} \quad \omega_j^k = \sum_{l=1}^k \delta_j^l \quad \forall 1 \leq k \leq K$$

mit $\delta_i^k, \delta_j^k \in \{-\delta^k, \delta^k\}$ und $\delta^k \in \mathbb{R}^+$.

Wir setzen $\hat{\omega} := \omega_i - \omega_j$. Für die Komponenten von $\hat{\omega}$ gilt:

$$\hat{\omega}^k = \omega_i^k - \omega_j^k = \sum_{l=1}^k (\delta_i^l - \delta_j^l) \quad \forall 1 \leq k \leq K.$$

Damit gilt $\hat{\omega}^{k+1} = \hat{\omega}^k + \delta_i^{k+1} - \delta_j^{k+1}$ für alle $k < K$.

Sei $k_0 \leq K$ der kleinste Index mit $\hat{\omega}^{k_0} \neq 0$. Dann gilt:

$$|\hat{\omega}^{k_0}| = |\delta_i^{k_0} - \delta_j^{k_0}| = 2\delta^{k_0}.$$

Betrachten wir als nächstes $\hat{\omega}^{k_0+1}$ und unterscheiden dabei folgende Fälle:

1. Fall $\delta_i^{k_0+1} = \delta_j^{k_0+1}$:

Dann gilt $\hat{\omega}^{k_0+1} = \hat{\omega}^{k_0}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega}\|_2^2 &\geq 2(2\delta^{k_0})^2 \geq 2(2\delta^1)^2 \\ &\geq (2\delta^1)^2 + (K-1)(2(\delta^2 - \delta^1))^2 \quad (\text{nach (3.11)}) \\ &= d_1^2 \\ &\geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k^2 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Regularität auf der ersten Ebene ausgenutzt.

2. Fall $\delta_i^{k_0+1} \neq \delta_j^{k_0+1}$:

Dann gilt $|\hat{\omega}^{k_0+1}| = |\hat{\omega}^{k_0}| + 2\delta^{k_0+1}$ oder $|\hat{\omega}^{k_0+1}| = ||\hat{\omega}^{k_0}| - 2\delta^{k_0+1}|$, wobei nur noch die zweite Beziehung von Interesse ist. Für die erste Beziehung gilt dieselbe Abschätzung wie im Fall 1. Es gelte also nun:

$$|\hat{\omega}^{k_0+1}| = ||\hat{\omega}^{k_0}| - 2\delta^{k_0+1}| = 2|\delta^{k_0+1} - \delta^{k_0}|$$

Betrachten wir die weiteren Komponenten von $\hat{\omega}$ und nehmen an, es existiert ein Index l_0 mit $k_0 + 1 < l_0 \leq K$ und $\delta_i^{l_0} \neq \delta_j^{l_0}$. Sei l_0 o.B.d.A. wiederum minimal, d.h. es gelte $\delta_i^l = \delta_j^l$ für alle $k_0 + 1 < l < l_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{\omega}^{l_0}| &= |\hat{\omega}^{k_0+1} + \delta_i^{l_0} - \delta_j^{l_0}| \\ &\geq ||\hat{\omega}^{k_0+1}| - 2\delta^{l_0}| \\ &\geq 2\delta^{l_0} - (2\delta^{k_0+1} - 2\delta^{k_0}) \\ &\geq 2\delta^{k_0}. \end{aligned}$$

Damit gilt für $\hat{\omega}$ erneut die Abschätzung von Fall 1. Gibt es dagegen keinen solchen Index l_0 , so gilt:

$$|\hat{\omega}^l| = |\hat{\omega}^{k_0+1}| \quad \forall l \geq k_0 + 1;$$

und wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega}\|_2^2 &= (\hat{\omega}^{k_0})^2 + (K - k_0)(\hat{\omega}^{k_0+1})^2 \\ &= (2\delta^{k_0})^2 + (K - k_0)(2(\delta^{k_0+1} - \delta^{k_0}))^2 \\ &= d_{k_0}^2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß in jedem Fall $\|\hat{\omega}\|_2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k$ gilt. □

Dieses Resultat ermöglicht es uns, eine optimale Szenarioreduktion zu finden, indem wir versuchen, eine maximale Zahl von Szenarios zu eliminieren, deren Abstand zum reduzierten Szenariobaum minimal ist. Es läßt sich so folgender Satz formulieren.

Satz 3.17 *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.16 und es sei $K \geq 2$. Dann gilt für jede Anzahl $M \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq M \leq \frac{N}{4}$:*

$$D_M^{opt} = \min\{D_J : \#J = M\} = \frac{M}{N} \min_{1 \leq k \leq K} d_k; \quad (3.13)$$

wobei d_k wie in Lemma 3.16 definiert als $d_k = \sqrt{(2\delta^k)^2 + (K - k)(2\delta^{k+1} - 2\delta^k)^2}$.

Beweis: Der Beweis erfolgt wieder konstruktiv. Sei $k_0 \in \arg \min_{1 \leq k \leq K} d_k$ fixiert und o.B.d.A. $k_0 < K$. (Sonst existiert sogar 1/2-Lösung von Folgerung 3.14.) Wir definieren folgende Mengen und nutzen dabei wieder Darstellung (3.9):

$$J_\Omega := \{\omega_i : \delta_i^{k_0} = \delta^{k_0}, \delta_i^{k_0+1} = -\delta^{k_0+1}\} \quad \text{und} \quad J := \{i : \omega_i \in J_\Omega\}.$$

Betrachten wir die Menge J_Ω der zu eliminierenden Szenarios. Zu jedem $\omega \in J_\Omega$ existiert ein Szenario $\hat{\omega} \notin J_\Omega$ mit $\hat{\omega}^k = \omega^k$ für alle $k \notin \{k_0, k_0 + 1\}$ sowie $\hat{\delta}^{k_0} = -\delta^{k_0}$ und $\hat{\delta}^{k_0+1} = \delta^{k_0+1}$. Die Lage der Szenarios veranschaulicht folgendes Bild:

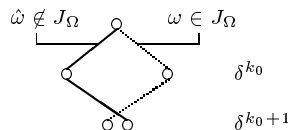


Bild: Verzweigung auf k_0 -ten Ebene

Es gilt nach dieser Konstruktion:

$$\|\omega - \hat{\omega}\|_2 = \sqrt{(2\delta^{k_0})^2 + (K - k_0)(2\delta^{k_0+1} - 2\delta^{k_0})^2} = d_{k_0}$$

Für die Anzahl der Elemente von J gilt:

$$\begin{aligned} \#J &= \#\{i \in \{1, \dots, N\} : \omega_i^{k_0} = \delta^{k_0}, \omega_i^{k_0+1} = -\delta^{k_0+1}\} \\ &= N\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{N}{4}. \end{aligned}$$

Damit gilt für den Abstand D_J unter Verwendung von Lemma 3.12 und Satz 3.3:

$$\begin{aligned} D_J &= \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} \|\omega_i - \omega_j\|_2 \\ &= \sum_{i \in J} \frac{1}{N} d_{K_0} = \frac{1}{4} d_{k_0} \end{aligned}$$

Lemma 3.12 sichert auch, daß $D_{J'} \geq D_J$ gilt, für beliebige Indextmengen $\#J' = \frac{N}{4}$. Für $M < \frac{N}{4}$ genügt es eine Teilmenge von J mit M Elementen zu betrachten. \square

Als nächstes werden wir uns mit Szenariobäumen mit Verzweigungsgrad 3 beschäftigen, die in Anwendungen ebenfalls häufig auftreten.

3.5.2 Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3

Ähnlich wie im Fall der binären Szenariobäume, wollen wir auch Resultate für spezielle Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3 herleiten. Ausgehend von einem Baum mit wiederum $K \in \mathbb{N}$ Verzweigungsebenen und nunmehr $N := 3^K$ Szenarios, seien die Werte der Verzweigungen durch

$$V_k = \{-\delta^k, 0, \delta^k\} \subset \mathbb{R} \quad 1 \leq k \leq K$$

gegeben. Als Abstandsfunktion c nehmen wir wieder die euklidische Metrik:

$$c(\omega_i, \omega_j) := \|\omega_i - \omega_j\|_2 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

Als erstes sei ein Resultat für die Reduktion eines Szenariobaums mit identischen Verzweigungszahlen angegeben.

Die 7/9-Lösung

Betrachten wir also einen gleichmäßigen Szenariobaum, bei dem $\delta^k \equiv \delta$ für alle $1 \leq k \leq K$ gilt. Für den Abstand zweier beliebiger Szenarios gilt nach (3.9):

$$\|\omega_i - \omega_j\|_2 \geq \delta \quad \forall i \neq j; i, j = 1, \dots, N. \tag{3.14}$$

Weiterhin gilt für gewisse $i_0, j_0 \in \{1, \dots, N\}$ das Gleichheitszeichen. Ziel ist es wieder, möglichst viele solcher Szenariopaare zu finden, für die das der Fall ist. Der folgende Satz entspricht dem Satz 3.13 im binären Fall. Dabei erlaubt uns die 3er Verzweigung eine recht geschickte konstruktive Lösung.

Satz 3.18 *Für jeden K -stufigen gleichmäßigen Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3, $\delta^k \equiv \delta$ und $N = 3^K$ Szenarios gilt für $K \geq 3$:*

$$D_{\frac{7}{9}N}^{opt} := \min\{D_J : \#J = \frac{7}{9}N\} = \frac{7}{9}\delta$$

Beweis: Wir definieren hierzu folgende Menge J_Ω^- :

$$J_\Omega^- := \{\omega_i : \delta_i^{K-1} \in \{-\delta^{K-1}, \delta^{K-1}\}; \delta_i^K = 0\}$$

Die Anzahl der Elemente ist schnell berechnet. Es gilt: $\#J_\Omega^- = \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Wir setzen nun für die Mengen der zu reduzierenden Szenarios:

$$J_\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \setminus J_\Omega^- \text{ und } J = \{i : \omega_i \in J_\Omega\}.$$

Für jedes $\omega \in J_\Omega$ existiert so ein $\hat{\omega} \in J_\Omega^-$, so daß $\|\omega - \hat{\omega}\|_2 = \delta$. Die Anzahl der Elemente von J ist $\frac{7}{9}N$. Analog zu den bisherigen Beweisen läßt sich mit Satz 3.3 und Ungleichung 3.14 für die so definierten Mengen zeigen, daß $D_J = \frac{7}{9}\delta$ sowie $D_{J'} \geq D_J$ mit $\#J' = \frac{7}{9}N$ gilt. Damit ist gezeigt, daß $D_{\frac{7}{9}N}^{opt} = D_J$. □

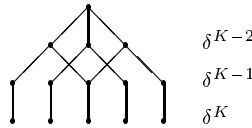


Bild: Schematische Darstellung von J_Ω^-

Die Beweisidee des Satzes behält ihre Gültigkeit, wenn wir die Voraussetzungen etwas verallgemeinern. Es gilt:

Folgerung 3.19 *Für einen K -stufigen gleichmäßigen Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3 und $N = 3^K$ Szenarios gelte: $\delta^K = \delta^{K-1} = \min\{\delta^k : 1 \leq k \leq K\}$. Dann gilt für $K \geq 3$:*

$$D_{\frac{7}{9}N}^{opt} := \min\{D_J : \#J = \frac{7}{9}N\} = \frac{7}{9}\delta^K$$

Die 4/9-Lösung

Als nächstes betrachten wir wieder Szenariobäume mit der Eigenschaft $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^k \leq \dots \leq \delta^K$, und leiten optimale Approximationsresultate her. Dazu definieren wir für Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3 analog zu binären Bäumen, was wir unter Regularität verstehen wollen.

Definition 3.20 Ein gleichmäßiger Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3 und K Verzweigungsebenen heißt regulär auf der k -ten Verzweigungsebene ($1 \leq k < K$), falls gilt:

$$|\delta^{k+1} - \delta^k| \leq \frac{1}{\sqrt{K-k}} \delta^k. \quad (3.15)$$

Ein Szenariobaum heißt regulär, falls er regulär auf allen Verzweigungsebenen ist.

Die Definition der Regularität ist identisch zum Fall binärer Szenariobäume. Es gilt folgende Aussage, eine leicht modifizierte Variante von Lemma 3.16.

Lemma 3.21 Für einen gleichmäßigen Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3 gelte für die Verzweigungszahlen $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^K$. Desweiteren sei der Szenariobaum regulär auf der ersten Verzweigungsebene. Dann gilt für den Abstand zweier voneinander verschiedener Szenarios:

$$\|\omega_i - \omega_j\|_2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k \quad \forall i \neq j : i, j = 1, \dots, N; \quad (3.16)$$

wobei d_k definiert ist als:

$$d_k := \sqrt{(\delta^k)^2 + (K-k)(\delta^{k+1} - \delta^k)^2}.$$

Beweis: Der Beweis ist ähnlich zu dem von Lemma 3.16. Sei $\omega_i \neq \omega_j$ beliebig fixiert. Nach Formel (3.9) existiert Darstellung für die Komponenten

$$\omega_i^k = \sum_{l=1}^k \delta_i^l \quad \text{und} \quad \omega_j^k = \sum_{l=1}^k \delta_j^l \quad \forall 1 \leq k \leq K$$

mit $\delta_i^k, \delta_j^k \in \{-\delta^k, 0, \delta^k\}$ und $\delta^k \in \mathbb{R}^+$.

Wir setzen $\hat{\omega} := \omega_i - \omega_j$. Für die Komponenten von $\hat{\omega}$ gilt:

$$\hat{\omega}^k = \omega_i^k - \omega_j^k = \sum_{l=1}^k (\delta_i^l - \delta_j^l) \quad \forall 1 \leq k \leq K.$$

Damit gilt $\hat{\omega}^{k+1} = \hat{\omega}^k + \delta_i^{k+1} - \delta_j^{k+1}$ für alle $k < K$.

Sei $k_0 \leq K$ der kleinste Index mit $\hat{\omega}^{k_0} \neq 0$. Dann gilt:

$$|\hat{\omega}^{k_0}| = |\delta_i^{k_0} - \delta_j^{k_0}| = \begin{cases} \delta^{k_0} & , \text{ falls } \delta_i^{k_0} = 0 \text{ oder } \delta_j^{k_0} = 0 \\ 2\delta^{k_0} & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Aufgrund der Regularitätseigenschaft gilt folgende Abschätzung (*):

$$\begin{aligned} 2(\delta^{k_0})^2 &\geq 2(\delta^1)^2 \\ &\geq (\delta^1)^2 + (K-1)(\delta^2 - \delta^1)^2 \quad (\text{nach (3.15)}) \\ &= d_1^2 \\ &\geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k^2 \end{aligned}$$

Damit gelte $|\hat{\omega}^{k_0}| = \delta^{k_0}$. Sonst gilt $\|\hat{\omega}\|_2^2 \geq 4(\delta^{k_0})^2 \geq d_1^2$ mit (*).

Betrachten wir als nächstes $\hat{\omega}^{k_0+1}$ und unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall $\delta_i^{k_0+1} = \delta_j^{k_0+1}$:

Dann gilt $\hat{\omega}^{k_0+1} = \hat{\omega}^{k_0}$. Es folgt mit obiger Abschätzung (*): $\|\hat{\omega}^{k_0}\|_2^2 \geq 2(\delta^{k_0})^2 \geq d_1^2$.

2. Fall $\delta_i^{k_0+1} \neq \delta_j^{k_0+1}$:

Hier ist nur der Fall $|\hat{\omega}^{k_0+1}| = |\hat{\omega}^{k_0} - \delta^{k_0+1}|$ interessant, da sonst $|\hat{\omega}^{k_0+1}| \geq \delta^{k_0+1}$ gilt, was mit $\delta^{k_0+1} \geq \delta^{k_0}$ wiederum zu $\|\hat{\omega}^{k_0}\|_2^2 \geq 2(\delta^{k_0})^2$ führt. Es gelte also nun:

$$|\hat{\omega}^{k_0+1}| = |\hat{\omega}^{k_0} - \delta^{k_0+1}| = |\delta^{k_0+1} - \delta^{k_0}|$$

Betrachten wir die weiteren Komponenten von $\hat{\omega}$ und nehmen an, es existiert ein Index l_0 mit $k_0 + 1 < l_0 \leq K$ und $\delta_i^{l_0} \neq \delta_j^{l_0}$. Sei l_0 o.B.d.A. wieder minimal, d.h. es gelte $\delta_i^l = \delta_j^l$ für alle $k_0 + 1 < l < l_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{\omega}^{l_0}| &= |\hat{\omega}^{k_0+1} + \delta_i^{l_0} - \delta_j^{l_0}| \\ &\geq \left| |\hat{\omega}^{k_0+1}| - |\delta_i^{l_0} - \delta_j^{l_0}| \right| \\ &\geq \delta^{l_0} - (\delta^{k_0+1} - \delta^{k_0}) \\ &\geq \delta^{k_0}. \end{aligned}$$

Damit gilt erneut $\|\hat{\omega}\|_2^2 \geq 2(\delta^{k_0})^2$ und wir können Abschätzung (*) anwenden. Gibt es dagegen keinen solchen Index l_0 , so gilt:

$$|\hat{\omega}^l| = |\hat{\omega}^{k_0+1}| \quad \forall l \geq k_0 + 1;$$

und wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega}\|_2^2 &= (\hat{\omega}^{k_0})^2 + (K - k_0)(\hat{\omega}^{k_0+1})^2 \\ &= (\delta^{k_0})^2 + (K - k_0)(\delta^{k_0+1} - \delta^{k_0})^2 \\ &= d_{k_0}^2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir auch hier gezeigt, daß in jedem Fall $\|\hat{\omega}\|_2 \geq \min_{1 \leq k \leq K} d_k$ gilt. \square

Folgerung 3.22 Wird das Minimum $\min_{1 \leq k \leq K} d_k$ in K angenommen, so gilt:

$$D_{\frac{2}{3}N}^{opt} := \min\{D_J : \#J = \frac{2}{3}N\} = \frac{2}{3}d_K = \frac{2}{3}\delta_K$$

Beweis: Wir setzen $J_\Omega = \{\omega_i : \delta_i^K \neq 0\}$ und $J = \{i : \omega_i \in J_\Omega\}$. Die Indexmenge J ist optimal und es gilt $\#J = \frac{2}{3}N$ und $D_J = \frac{2}{3}\delta^K$. \square

Als nächstes wollen wir einen analogen Satz zu Satz 3.17 des binären Falls formulieren.

Satz 3.23 Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.21 und es sei $K \geq 3$. Dann gilt für jede Anzahl $M \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq M \leq \frac{4}{9}N$:

$$D_M^{opt} = \min\{D_J : \#J = M\} = \frac{M}{N} \min_{1 \leq k \leq K} d_k; \quad (3.17)$$

wobei d_k wie in Lemma 3.21 definiert als $d_k = \sqrt{(\delta^k)^2 + (K - k)(\delta^{k+1} - \delta^k)^2}$.

Beweis: Sei $k_0 \in \arg \min_{1 \leq k \leq K} d_k$ fixiert und o.B.d.A. $k_0 < K$. (Sonst ist nach Folgerung 3.22 Satz bereits bewiesen.)

Wir suchen nach einer disjunkten Zerlegung des Szenarioraums $\Omega = J_\Omega \cup J_\Omega^-$, wobei J_Ω wiederum die Menge der zu eliminierenden Szenarios beschreiben soll. Die

Zerlegung soll so erfolgen, daß gilt: Zu jedem $\omega_i \in J_\Omega$ existiert ein $\hat{\omega}_i \in J_\Omega^-$ mit $\|\omega_i - \hat{\omega}_i\|_2 = d_{k_0}$. Betrachten wir folgende Mengen:

$$J_\Omega := \{\omega_i : \delta_i^{k_0} \neq \delta_i^{k_0+1}; \delta_i^{k_0+1} \neq 0\} \quad \text{und} \quad J_\Omega^- := \Omega \setminus J_\Omega$$

Sei $\omega_i \in J_\Omega$ beliebig fixiert. Wir definieren dazu ein $\hat{\omega}_i$ mit der Darstellung $\hat{\omega}_i^k = \sum_{l=1}^k \hat{\delta}_i^l$ und folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_i^l &= \delta_i^l && , \text{ falls } l \neq k_0 \text{ und } l \neq k_0 + 1 \quad ; \\ \hat{\delta}_i^{k_0} &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \delta_i^{k_0} \neq 0 \\ -\delta^{k_0} & , \text{ falls } \delta_i^{k_0} = 0 \text{ und } \delta_i^{k_0+1} = -\delta^{k_0+1} \quad ; \\ \delta^{k_0} & , \text{ falls } \delta_i^{k_0} = 0 \text{ und } \delta_i^{k_0+1} = \delta^{k_0+1} \end{cases} \\ \hat{\delta}_i^{k_0+1} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Damit ist $\hat{\omega}_i \in J_\Omega^-$ und es gilt nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} \|\omega_i - \hat{\omega}_i\|_2^2 &= |\omega_i^{k_0} - \hat{\omega}_i^{k_0}|^2 + (K - k_0)|\omega_i^{k_0+1} - \hat{\omega}_i^{k_0+1}|^2 \\ &= |\delta_i^{k_0} - \hat{\delta}_i^{k_0}|^2 + (K - k_0)|\delta_i^{k_0} + \delta_i^{k_0+1} - \hat{\delta}_i^{k_0} - \hat{\delta}_i^{k_0+1}|^2 \\ &= |\delta^{k_0}|^2 + (K - k_0)|\delta^{k_0} - \delta^{k_0+1}|^2 \\ &= d_{k_0}^2 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Elemente von J_Ω läßt sich kombinatorisch errechnen:

$$\#J_\Omega = \frac{2}{3} \frac{2}{3} N = \frac{4}{9} N$$

Lemma 3.17 und Satz 3.3 liefern für $J = \{i : \omega_i \in J_\Omega\}$ die Behauptung. □

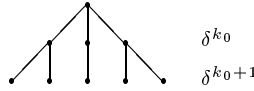


Bild: Schematische Darstellung von J_Ω^-

Die 16/27-Lösung

In Hinblick auf das letzte Kapitel soll obiges Resultat noch erweitert werden. Dazu formulieren wir folgenden Satz.

Satz 3.24 *Es sei ein Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3 mit $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^K$ und $k \geq 3$ gegeben. Für einen Index $k_0 \in \arg \min_{1 \leq k \leq K} d_k$ gelte ($1 \leq k_0 \leq K - 2$):*

- (1) *Der Szenariobaum sei regulär auf den Ebenen 1 und $k_0 + 1$;*
- (2) *$\delta^{k_0+2} - \delta^{k_0+1} \geq \delta^{k_0+1} - \delta^{k_0}$;*
- (3) *$(\delta^{k_0})^2 + (\delta^{k_0+1})^2 \geq d_{k_0+1}^2$;*
- (4) *$2(\delta^{k_0})^2 \geq (\delta^{k_0+1})^2$;*
- (5) *$d_{k_0+1} \leq d_1$, falls $k_0 > 1$.*

Dann gilt für jede Zahl $M \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq M \leq \frac{4}{27}N$:

$$D_{\left(\frac{4}{9}+M\right)}^{opt} = \frac{4}{9} \cdot d_{k_0} + M \cdot d_{k_0+1}, \tag{3.18}$$

wobei $d_k = \sqrt{(\delta^k)^2 + (K - k)(\delta^{k+1} - \delta^k)^2}$ wie bisher.

Beweis: Seien als erstes $\omega_i \neq \omega_j$ beliebig vorgegeben und $\hat{\omega} = \omega_i - \omega_j$ gesetzt. Die Voraussetzungen von Lemma 3.21 sind erfüllt. Schauen wir auf den Beweis des Lemmas. Wir gehen genauso vor wie in diesem Beweis. Es genügt, sich hier wegen (5) auf den Fall zu beschränken, daß der erste auftretende Index mit $|\hat{\omega}^k| \neq 0$ gerade k_0 ist. Der Beweis zeigt zum einen, daß dann gilt:

$$\|\hat{\omega}\|_2^2 = d_{k_0}^2, \text{ falls } |\hat{\omega}^{k_0}| = \delta^{k_0} \text{ und } |\hat{\omega}^{k_0}| = \delta^{k_0+1} - \delta^{k_0} \text{ für } l \geq k_0. \quad (3.19)$$

Zum anderen wurde gezeigt, daß sonst gilt:

$$\|\hat{\omega}\|_2^2 \geq \begin{cases} 4(\delta^{k_0})^2 & , \text{ falls } |\hat{\omega}^{k_0}| = 2\delta^{k_0} \\ 2(\delta^{k_0})^2 & , \text{ falls } |\hat{\omega}^{k_0}| = \delta^{k_0} \text{ und } |\hat{\omega}^l| \neq \delta^{k_0+1} - \delta^{k_0} \text{ für ein } l \neq k_0 \end{cases} .$$

Die untere Ungleichung resultierte aus 2 Fällen. Im Fall 1 des Beweises zu Lemma 3.21 läßt sich aufgrund der Monotonie der Werte $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^K$ die Abschätzung wie folgt verschärfen:

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega}\|_2^2 &\geq 2(\delta^{k_0})^2 + (K-2)(\delta^{k_0+2} - \delta^{k_0})^2 \\ &\geq (\delta^{k_0+1})^2 + (K-2)(\delta^{k_0+2} - \delta^{k_0+1})^2 = d_2^2 \quad (\text{nach Vor. (2)}) \end{aligned}$$

Im Fall 2 des Beweises zu Lemma 3.21 läßt sich die dort vorgenommene Abschätzung für $|\omega^{k_0+1}| \geq \delta^{k_0+1}$ verwenden, oder aber $|\omega^{l_0}| \geq \delta^{k_0}$ aufgrund der Zusatzvoraussetzung (2) zu $|\omega^{l_0}| \geq \delta^{k_0+1}$ verbessern. Damit gilt in jedem Fall:

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega}\|_2^2 &\geq (\delta^{k_0})^2 + (\delta^{k_0+1})^2 \\ &\geq d_{k_0+1}^2 \quad (\text{nach Vor. (3)}). \end{aligned}$$

Mit Voraussetzung (4) gilt wegen der Regularität auf der Ebene k_0+1 auch $4(\delta^{k_0})^2 \geq 2(\delta^{k_0+1})^2 \geq d_{k_0+1}^2$. Insgesamt haben wir damit bis jetzt gezeigt, daß entweder Beziehung (3.19) oder $\|\hat{\omega}\|_2 \geq d_{k_0+1}$ gilt. Dabei gilt $d_{k_0} \leq d_{k_0+1}$ wegen Voraussetzung (2).

Wir wollen als nächstes dieselbe Menge J_Ω aus dem Beweis von Satz 3.23 hernehmen. Es war:

$$J_\Omega := \{\omega_i : \delta_i^{k_0} \neq \delta_i^{k_0+1}; \delta_i^{k_0+1} \neq 0\}$$

Wir setzen zusätzlich:

$$\begin{aligned} J_\Omega^1 &:= \{\omega_i : \delta_i^{k_0} = \delta_i^{k_0+1} \neq 0; \delta_i^{k_0+2} = -\text{sign}(\delta_i^{k_0})\delta^{k_0+2}\} \quad \text{und} \\ J_\Omega^2 &:= \{\omega_i : \delta_i^{k_0} = \delta_i^{k_0+1} \neq 0; \delta_i^{k_0+2} = 0\}. \end{aligned}$$

Es gilt $\#J_\Omega = \frac{4}{9}N$ sowie $\#J_\Omega^1 = \#J_\Omega^2 = \frac{2}{27}N$. Offenbar sind alle drei Mengen paarweise disjunkt. Wir setzen:

$$J_\Omega^- = \Omega \setminus (J_\Omega \cup J_\Omega^1 \cup J_\Omega^2).$$

Analog zu Satz 3.23 läßt sich für jedes $\omega_i \in J_\Omega$ ein $\hat{\omega}_i \in J_\Omega^-$ mit $\|\omega_i - \hat{\omega}_i\|_2 = d_{k_0}$ bzw. für jedes $\omega_i \in J_\Omega^{1/2}$ ein $\hat{\omega}_i \in J_\Omega^-$ mit $\|\omega_i - \hat{\omega}_i\|_2 = d_{k_0+1}$ finden.

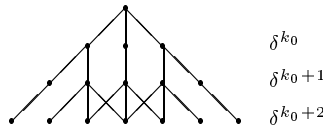


Bild: Schematische Darstellung von J_Ω^-

Setzen wir als Indexmenge $J = \{i : \omega_i \in J_\Omega \cup J_\Omega^1 \cup J_\Omega^2\}$ und nutzen die optimale Neuverteilung von Satz 3.3, so gilt mit dem oben gezeigten:

$$D_J = \frac{4}{9}d_{k_0} + \frac{4}{27}d_{k_0+1}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Indexmenge J optimal ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Szenariomenge J_Ω maximal ist, d.h. für eine beliebige Szenariomenge J'_Ω mit $\#J'_\Omega > \frac{4}{9}N$ gilt: Es existiert ein $\omega' \in J'_\Omega$ mit $\|\omega' - \omega\|_2 > d_{k_0}$ für alle $\omega \in \Omega \setminus J'_\Omega$. Wir betrachten sämtliche Szenariopaare, deren Differenz die Beziehung (3.19) erfüllt. Das sind genau solche Szenariopaare, deren Verzweigungen sich nur auf der k_0 -ten und $(k_0 + 1)$ -ten Ebene komplementär zueinander um gerade δ^{k_0} bzw. δ^{k_0+1} unterscheiden. Das folgende Bild veranschaulicht die mögliche Anordnung von je zwei dieser Szenarios bzgl. eines Knotens.

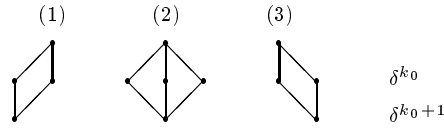


Bild: Schematische Darstellung aller Szenariopaare aus (3.19)

Es lassen sich im Fall (1) und (3) jeweils maximal $3^{K-(k_0+1)}$ und im Fall (2) maximal $2 \cdot 3^{K-(k_0+1)}$ Szenarios auswählen. Da dies für jeden Knoten gilt, können insgesamt $3^{k_0-1}(2 \cdot 3^{K-(k_0+1)} + 2 \cdot 3^{K-(k_0+1)}) = 4 \cdot 3^{K-2} = \frac{4}{9} \cdot 3^K = \frac{4}{9}N$ Szenarios ausgewählt werden. Damit ist gezeigt, daß J_Ω wirklich maximal ist und damit auch D_J den optimalen Abstand liefert.

Betrachten wir schließlich eine entsprechende Teilmengen von $J_\Omega^{1/2}$, so folgt für beliebige Zahlen $M < \frac{4}{27}N$ die Behauptung. □

Die Sätze 3.23 und 3.24 gestatten es uns, unter angegebenen Voraussetzungen, bis hin zu einer Reduktionstiefe von $\frac{16}{27}$, eine optimale Reduktionslösung des allgemeinen Problems (3.3) zu finden. Im Fall von beispielsweise $K = 6$ Verzweigungsebenen und insgesamt $N = 729$ Szenarios können wir anhand der Formeln (3.17) und (3.18) den optimalen Fortet-Mourier Abstand für das optimale Eliminieren von bis zu 432 Szenarios berechnen.

Darüberhinaus liefern die Sätze eine konstruktive Lösung zur Bestimmung des optimalen reduzierten Szenariobaums.

In den folgenden numerischen Tests wird auch ein solcher Szenariobaum eine Rolle spielen, der die Voraussetzungen von Satz 3.23 erfüllt.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Ziel in diesem Kapitel ist es, die in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmen numerisch zu testen. Dabei sollen anhand verschiedener Szenariobäume Vergleiche speziell zwischen dem Backward- und Forward-Algorithmus durchgeführt werden. Besondere Aufmerksamkeit liegt dabei natürlich auf der Güte der jeweiligen Backward- und Forward-Approximation des reduzierten Szenariobaums in Bezug auf den gegebenen Szenariobaum. Aber auch die Rechenzeit sowie die Verteilung der Szenarios im reduzierten Baum werden eine Rolle spielen.

Bei den numerischen Tests wird für vorgegebene Szenariobäume das Verhalten der Algorithmen bei der Reduktion untersucht. Dabei wird die Anzahl der Szenarios im reduzierten Baum variiert.

Zum Vergleich der Güte führen wir einen relativen Abstand zwischen dem reduzierten und originalen Szenariobaum ein (analog zu [5], Abschnitt 4).

Es sei $D(J, q) = \zeta_c(P, Q)$ und $D_J = \min\{D(J; q) : q_j \geq 0, \sum_{j \notin J} q_j = 1\}$ wie in Kapitel 3 der Fortet-Mourier Abstand zwischen den Maßen P und Q bzw. der minimale Fortet-Mourier Abstand bei vorgegebener Indexmenge $J \subset \{1, \dots, N\}$. Dann sei mit:

$$\zeta_c(P, \delta_{\omega_{i^*}}) = \min\{D_J : \#J = N - 1\} \quad (4.1)$$

der minimale Abstand eines einzigen Szenarios zum gesamten Szenariobaum bezeichnet. Dabei sei ω_{i^*} dasjenige Szenario, bei dem dieser minimale Abstand angenommen wird. $\delta_{\omega_{i^*}}$ sei das zugehörige Dirac-Maß.

Den relativen Abstand definieren wir nun als Quotient:

$$\zeta_c^{rel}(P, Q) := \frac{\zeta_c(P, Q)}{\zeta_c(P, \delta_{\omega_{i^*}})}. \quad (4.2)$$

Um weitere Vergleiche durchführen zu können, wird zum einen die Formel aus Satz 3.5 zur Bestimmung einer unteren Schranke für den jeweilig berechneten relativen Abstand herangezogen. Zum anderen werden auch die Formeln aus Abschnitt 3.5 berechnet, die in speziellen Fällen den optimalen, d.h. bestmöglichen relativen Abstand bestimmen.

Die Algorithmen sind in der Programmiersprache C++ implementiert. Die Berechnungen erfolgten auf einem Rechner, ausgestattet mit einem AMD-K6 Prozessor mit 200 MHz.

4.1 Anwendung auf binäre Szenariobäume

Wir wollen hier das Verhalten des Backward- und Forward-Algorithmus am Beispiel zweier gleichmäßiger binärer Szenariobäume untersuchen.

Beide Szenariobäume haben 10 Verzweigungsebenen. Also repräsentieren die Bäume insgesamt 1024 verschiedene Szenarios gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1024}$. Bei diesen Beispielen werden speziell Folgerung 3.14 und Satz 3.17 aus Abschnitt 3.5.1 zur Anwendung kommen, die uns den optimalen Abstand beim Eliminieren der Hälfte bzw. eines Viertels der Szenarios liefern.

Beispiel 4.1

Gleichmäßiger binärer Szenariobaum mit

- $K = 10$ Verzweigungsebenen,
- $N = 1024$ Szenarios,
- Verzweigungszahlen: $(\delta^1, \dots, \delta^{10}) = (0.5, 0.6, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.6, 1.9, 2.3, 2.7)$.

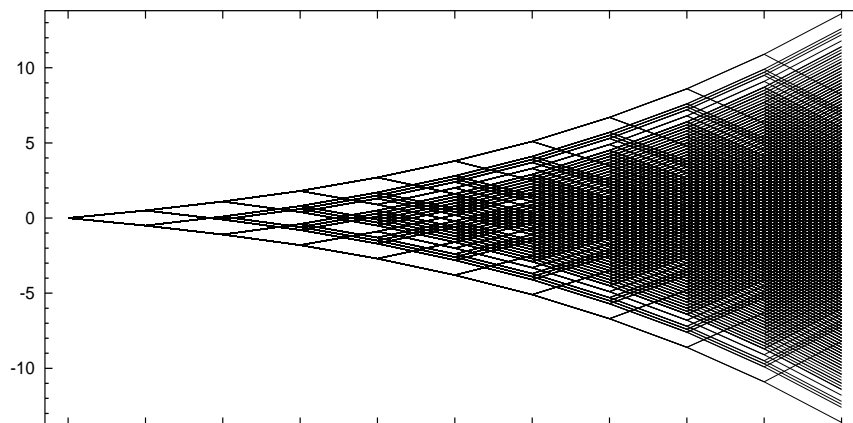


Abbildung 1: Szenariobaum Beispiel 4.1

Für diesen Szenariobaum sind die Voraussetzungen von Lemma 3.16 erfüllt, denn es gilt offenbar $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^{10}$ und es liegt Regularität auf der ersten Verzweigungsebene vor (Bedingung (3.11) erfüllt). Das ermöglicht uns, nach Satz 3.17 den optimalen Abstand bis zu einer Reduktion von 256 Szenarios explizit zu berechnen.

Die Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse des Backward- und Forward-Algorithmus angewandt auf das Beispiel 4.1 bei einer Vielzahl von Reduktionstiefen. Die erste Spalte der Tabelle gibt dabei die Anzahl der sich nach der Szenarioreduktion noch im reduzierten Szenariobaum befindlichen Szenarios an. In den folgenden Spalten sind die zugehörigen relativen Fortet-Mourier Abstände für die Lösungen des Backward- und Forward-Algorithmus aufgeführt sowie die dazu benötigten Rechenzeiten.

Desweiteren ist in Tabelle 1 eine untere Schranke für die relativen Abstände aufgeführt, die nach Satz 3.5 berechnet wurde. In der letzten Spalte sind die nach Satz 3.17 bis zu einer Reduktion von 256 Szenarios berechneten optimalen relativen Abstände zu sehen.

Die Tabelle zeigt, daß beide Algorithmen gute Ergebnisse liefern. Dabei ist der Backward-Algorithmus, gerade beim Eliminieren nur weniger Szenarios, deutlich schneller. Das ist nach der Komplexitätsbetrachtung in 3.4.1 auch nicht anders zu erwarten gewesen.

Anzahl Szenarios	Backward		Forward		Untere Schranke	Optimaler Wert
	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit		
1	134.49 %	9 s	100.00 %	3 s	20.08 %	100.00 %
2	90.73 %	9 s	85.05 %	4 s	20.04 %	*
3	75.56 %	9 s	70.35 %	5 s	20.00 %	*
4	73.15 %	9 s	66.86 %	5 s	19.97 %	*
5	69.03 %	9 s	64.11 %	6 s	19.93 %	*
6	67.67 %	9 s	61.76 %	7 s	19.89 %	*
7	64.50 %	9 s	59.73 %	8 s	19.85 %	*
8	62.59 %	9 s	57.75 %	8 s	19.81 %	*
9	61.80 %	9 s	56.06 %	9 s	19.78 %	*
10	61.33 %	9 s	54.68 %	10 s	19.74 %	*
14	55.54 %	9 s	50.08 %	13 s	19.59 %	*
20	50.10 %	9 s	45.76 %	17 s	19.36 %	*
30	44.12 %	9 s	40.74 %	24 s	18.99 %	*
40	41.36 %	9 s	37.37 %	32 s	18.64 %	*
50	37.52 %	9 s	34.83 %	39 s	18.30 %	*
100	28.36 %	9 s	26.56 %	71 s	16.81 %	*
150	24.03 %	8 s	22.15 %	101 s	15.49 %	*
200	19.83 %	8 s	18.75 %	128 s	14.28 %	*
250	17.20 %	8 s	16.21 %	151 s	13.20 %	*
300	15.02 %	8 s	14.01 %	172 s	12.11 %	*
400	11.46 %	7 s	10.83 %	205 s	10.00 %	*
500	8.64 %	6 s	8.27 %	229 s	7.90 %	*
512	8.34 %	6 s	7.99 %	231 s	7.64 %	*
550	7.52 %	6 s	7.18 %	238 s	7.04 %	*
577	6.93 %	6 s	6.62 %	242 s	6.61 %	*
578	6.91 %	6 s	6.59 %	242 s	6.59 %	*
600	6.45 %	6 s	6.25 %	245 s	6.25 %	*
610	6.24 %	6 s	6.09 %	247 s	6.09 %	*
620	6.03 %	6 s	5.93 %	248 s	5.93 %	*
630	5.82 %	6 s	5.77 %	249 s	5.77 %	*
638	5.65 %	6 s	5.64 %	250 s	5.64 %	*
639	5.63 %	6 s	5.63 %	250 s	5.63 %	*
640	5.61 %	5 s	5.61 %	250 s	5.61 %	*
650	5.45 %	5 s	5.45 %	251 s	5.45 %	*
700	4.66 %	5 s	4.66 %	256 s	4.66 %	*
750	3.86 %	5 s	3.86 %	259 s	3.86 %	*
767	3.59 %	5 s	3.59 %	260 s	3.59 %	*
768	3.58 %	4 s	3.58 %	260 s	3.58 %	3.58 %
775	3.48 %	4 s	3.48 %	260 s	3.48 %	3.48 %
800	3.13 %	4 s	3.13 %	261 s	3.13 %	3.13 %

Tabelle 1: Szenarioreduktion Beispiel 4.1

Dennoch ist auch die Rechenzeit des Forward-Algorithmus mit 261 Sekunden, bei einer Reduktion auf 800 Szenarios, sehr akzeptabel. Das Anwachsen der Rechenzeiten, bei zunehmender Zahl von Szenarios im reduzierten Baum, ist nicht einmal linear.

Bei den berechneten relativen Abständen liefert der Forward-Algorithmus etwas bessere Ergebnisse. Leider ist die untere Schranke nur bei wenig reduzierten Szenariobäumen hilfreich. Die untere Schranke erweist sich in stark reduzierten Bäumen als zu grobe Abschätzung. So ist klar, daß bei der Reduktion auf ein einziges Szenario der relative optimale Abstand nach (4.2) exakt 100% sein muß. Die untere Schranke berechnet hier aber einen Wert von gerade einmal 20.08%.

Überraschend mag erscheinen, daß bei der Reduktion von 50% der Szenarios nur etwa 8% der relativen Genauigkeit verloren geht. Es existiert sogar ein reduzierter Szenariobaum mit nur rund 1.5% der Szenarios, der noch eine relative Genauigkeit von rund 50% besitzt. Zu ähnlichen Ergebnissen, was die relative Genauigkeit betrifft, führten auch die numerischen Tests in [5].

Beispiel 4.2

Gleichmäßiger binärer Szenariobaum mit

- $K = 10$ Verzweigungsebenen,
- $N = 1024$ Szenarios,
- Verzweigungszahlen: $(\delta^1, \dots, \delta^{10}) = (2.0, 1.8, 1.6, 1.5, 1.4, 1.3, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0)$.

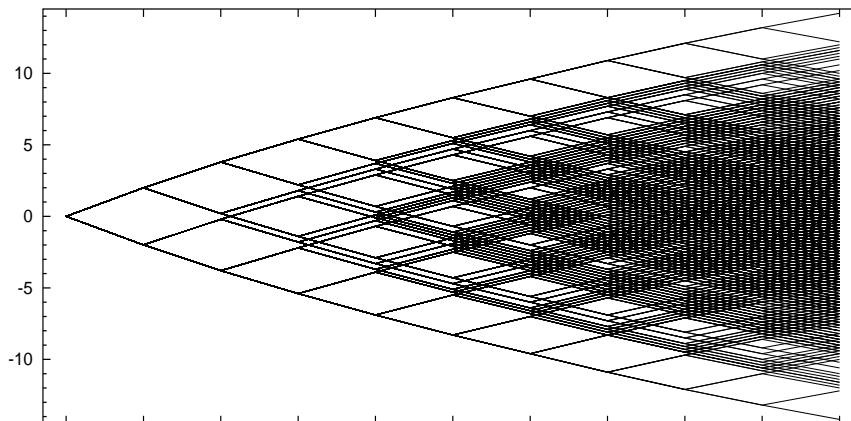


Abbildung 2: Szenariobaum Beispiel 4.2

Dieses Beispiel ist so gewählt, daß Folgerung 3.14 zur Anwendung kommen kann. Es gilt $\delta^{10} \leq \delta^k$, für alle $1 \leq k \leq K$. Damit läßt sich der optimale Abstand nicht mehr nur bis zu einer Reduktionstiefe von 256, sondern bis zu einer Reduktionstiefe von immerhin 512 Szenarios berechnen.

Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen des Backward- und Forward-Algorithmus in analoger Form zu Beispiel 4.1. Auch hier sind die unteren Schranken und gegebenenfalls der optimale Abstand aufgeführt.

Die Rechenergebnisse bestätigen die Resultate von Beispiel 4.1. Auch hier gibt der Forward-Algorithmus die etwas besseren Ergebnisse, auf Kosten des höheren Zeitaufwands.

Interessant in diesem speziellen Szenariobaum ist die Beobachtung, daß bei der Reduktion auf die Hälfte der Szenarios sowohl die algorithmisch berechneten Werte

Anzahl Szenarios	Backward		Forward		Untere Schranke	Optimaler Wert
	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit		
1	103.04 %	6 s	100.00 %	3 s	19.83 %	100.00 %
2	76.09 %	6 s	76.48 %	4 s	19.80 %	*
3	65.49 %	6 s	60.33 %	5 s	19.77 %	*
4	61.41 %	6 s	56.47 %	5 s	19.74 %	*
5	57.48 %	6 s	53.65 %	6 s	19.72 %	*
6	53.44 %	6 s	50.83 %	7 s	19.69 %	*
7	51.35 %	6 s	48.53 %	8 s	19.66 %	*
8	49.22 %	6 s	47.06 %	8 s	19.63 %	*
9	48.03 %	6 s	45.66 %	9 s	19.61 %	*
10	46.35 %	6 s	44.38 %	10 s	19.58 %	*
15	42.72 %	6 s	40.50 %	14 s	19.45 %	*
20	39.96 %	6 s	37.92 %	17 s	19.32 %	*
30	36.20 %	6 s	34.40 %	24 s	19.07 %	*
40	33.58 %	6 s	31.93 %	32 s	18.83 %	*
50	31.92 %	6 s	30.01 %	39 s	18.60 %	*
60	30.01 %	6 s	28.46 %	45 s	18.37 %	*
70	28.71 %	6 s	27.17 %	52 s	18.14 %	*
80	27.57 %	6 s	25.99 %	59 s	17.90 %	*
90	26.56 %	6 s	25.00 %	65 s	17.67 %	*
100	25.54 %	6 s	24.12 %	71 s	17.44 %	*
150	22.26 %	6 s	20.61 %	101 s	16.33 %	*
200	19.54 %	6 s	18.09 %	128 s	15.26 %	*
250	17.16 %	5 s	16.04 %	152 s	14.19 %	*
300	15.43 %	5 s	14.39 %	174 s	13.20 %	*
350	13.63 %	5 s	12.96 %	193 s	12.22 %	*
400	12.00 %	5 s	11.69 %	209 s	11.25 %	*
446	10.61 %	5 s	10.59 %	223 s	10.35 %	*
447	10.57 %	5 s	10.57 %	223 s	10.33 %	*
450	10.50 %	5 s	10.50 %	224 s	10.27 %	*
500	9.34 %	5 s	9.34 %	236 s	9.29 %	*
509	9.13 %	5 s	9.13 %	238 s	9.12 %	*
510	9.10 %	5 s	9.10 %	239 s	9.10 %	*
511	9.08 %	5 s	9.08 %	239 s	9.08 %	*
512	9.06 %	5 s	9.06 %	239 s	9.06 %	9.06 %
550	8.39 %	5 s	8.39 %	247 s	8.39 %	8.39 %
600	7.50 %	5 s	7.50 %	256 s	7.50 %	7.50 %
650	6.62 %	5 s	6.62 %	262 s	6.62 %	6.62 %
700	5.73 %	4 s	5.73 %	268 s	5.73 %	5.73 %
750	4.85 %	4 s	4.85 %	271 s	4.85 %	4.85 %
800	3.96 %	4 s	3.96 %	274 s	3.96 %	3.96 %

Tabelle 2: Szenarioreduktion Beispiel 4.2

für den Fortet-Mourier Abstand als auch die Abstände der unteren Schranke und des Optimalwertes exakt übereinstimmen.

4.2 Anwendung auf Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3

Im folgenden soll das Verhalten der beiden Algorithmen am Beispiel zweier gleichmäßiger Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3 untersucht werden. Dazu gehen wir genauso vor wie bei den binären Szenariobäumen.

Die jetzt als Beispiel dienenden Szenariobäume haben 6 Verzweigungsebenen und damit insgesamt 729 verschiedene Szenarios gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{729}$. Zur Anwendung werden nun die Ergebnisse der Theorie in Abschnitt 3.5.2 kommen.

Zunächst wird ein Szenariobaum betrachtet, der die Voraussetzungen der Sätze 3.23 und 3.24 erfüllt, die zu Satz 3.17 im binären Fall analogen Resultate. Danach wird im Beispiel 4.4 die Szenarioreduktion auf einen speziellen Szenariobaum angewandt, der die Voraussetzung von Folgerung 3.19 erfüllt.

Beispiel 4.3

Gleichmäßiger Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3

- $K = 6$ Verzweigungsebenen,
- $N = 729$ Szenarios,
- Verzweigungszahlen: $(\delta^1, \dots, \delta^6) = (0.7, 0.9, 1.2, 1.5, 2.6, 3.3)$.

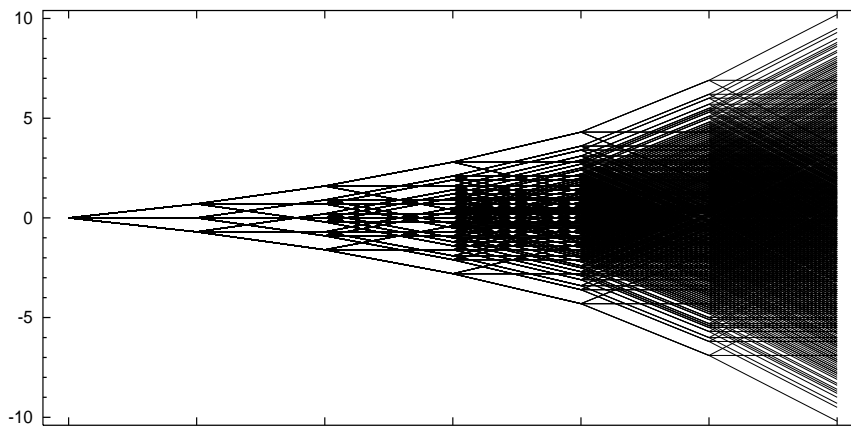


Abbildung 3: Szenariobaum Beispiel 4.3

Für diesen Szenariobaum sind zum einen die Voraussetzungen von Lemma 3.21 erfüllt, insbesondere gilt $\delta^1 \leq \dots \leq \delta^6$ und Regularität auf der ersten Verzweigungsebene. Damit läßt sich Satz 3.23 anwenden.

Desweiteren gilt $d_1 = \min\{d_k : 1 \leq k \leq K\}$ und es sind für den Index $k_0 = 1$ sämtliche Voraussetzungen (1) bis (5) aus Satz 3.24 erfüllt.

Damit lassen sich Resultate der Sätze 3.23 und 3.24 anwenden. Das ermöglicht uns, den optimalen Abstand nach den dort hergeleiteten Formeln (3.17) und (3.18) bis zu einer Reduktion von 432 Szenarios explizit zu berechnen.

Anzahl Szenarios	Backward		Forward		Untere Schranke	Optimaler Wert
	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit		
1	118.87 %	3 s	100.00 %	1 s	21.23 %	100.00 %
2	80.33 %	3 s	83.54 %	2 s	21.18 %	*
3	77.89 %	3 s	67.08 %	2 s	21.13 %	*
4	73.76 %	3 s	63.60 %	2 s	21.09 %	*
5	70.85 %	3 s	60.13 %	3 s	21.04 %	*
6	62.63 %	3 s	57.62 %	3 s	20.99 %	*
7	59.17 %	3 s	55.11 %	3 s	20.94 %	*
8	54.96 %	3 s	53.00 %	4 s	20.90 %	*
9	52.88 %	3 s	50.88 %	4 s	20.85 %	*
10	51.44 %	3 s	49.79 %	5 s	20.80 %	*
15	45.41 %	3 s	45.03 %	6 s	20.56 %	*
20	42.02 %	3 s	41.30 %	8 s	20.33 %	*
30	36.81 %	3 s	35.97 %	12 s	19.88 %	*
31	36.35 %	3 s	35.53 %	12 s	19.83 %	*
40	33.06 %	3 s	32.34 %	15 s	19.45 %	*
50	30.14 %	3 s	29.86 %	19 s	19.06 %	*
60	28.28 %	3 s	28.10 %	22 s	18.67 %	*
63	27.75 %	3 s	27.60 %	23 s	18.55 %	*
70	26.91 %	3 s	26.48 %	25 s	18.28 %	*
80	25.45 %	3 s	24.94 %	28 s	17.89 %	*
90	24.18 %	3 s	23.66 %	31 s	17.52 %	*
100	23.33 %	3 s	22.56 %	34 s	17.16 %	*
110	22.24 %	3 s	21.48 %	37 s	16.80 %	*
120	21.28 %	3 s	20.51 %	39 s	16.43 %	*
127	20.79 %	3 s	19.91 %	41 s	16.18 %	*
130	20.49 %	3 s	19.68 %	42 s	16.07 %	*
140	19.63 %	3 s	18.99 %	45 s	15.71 %	*
150	18.91 %	3 s	18.35 %	47 s	15.35 %	*
200	15.95 %	3 s	15.33 %	58 s	13.60 %	*
250	13.32 %	3 s	12.95 %	67 s	12.11 %	*
296	11.19 %	2 s	10.93 %	74 s	10.73 %	*
297	11.14 %	2 s	10.88 %	75 s	10.70 %	10.70 %
300	11.01 %	2 s	10.77 %	75 s	10.61 %	10.61 %
317	10.31 %	2 s	10.11 %	77 s	10.10 %	10.10 %
318	10.27 %	2 s	10.07 %	77 s	10.07 %	10.07 %
349	9.15 %	2 s	9.14 %	81 s	9.14 %	9.14 %
350	9.11 %	2 s	9.11 %	81 s	9.11 %	9.11 %
400	7.61 %	2 s	7.61 %	86 s	7.61 %	7.61 %
500	5.27 %	2 s	5.27 %	91 s	5.27 %	5.27 %
600	2.97 %	2 s	2.97 %	93 s	2.97 %	2.97 %

Tabelle 3: Szenarioreduktion Beispiel 4.3

Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse des Backward- und Forward-Algorithmus, angewandt auf das Beispiel 4.3, wiederum bei einer Vielzahl von Reduktionstiefen. Die untere Schranke ist wie gehabt nach Satz 3.5 berechnet worden.

Auch hier bestätigen sich die bisher gesammelten Ergebnisse. Der Forward-Algorithmus liefert die besseren Fortet-Mourier Abstände des reduzierten Szenariobaums. Er berechnet bei einer Reduktion von 411 Szenarios von ursprünglich 729 auf 318 Szenarios immer noch den optimalen Abstand, wie Tabelle 3 zeigt.

Selbst die Rechenzeit des Forward-Algorithmus liegt auch bei geringeren Reduktionen klar unter 2 Minuten. Bei nur wenigen Szenarios im reduzierten Baum liegt die Rechenzeit, wie beim Backward-Algorithmus, bei nur wenigen Sekunden.

Ähnlich wie im binären Fall besitzen selbst wenige Szenarios noch eine hohe relative Genauigkeit. So hat die im Forward-Algorithmus erzeugte Szenariomenge mit 10 Szenarios eine relative Genauigkeit von rund 50%.

Beispiel 4.4

Gleichmäßiger Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3

- $K = 6$ Verzweigungsebenen,
- $N = 729$ Szenarios,
- Verzweigungszahlen: $(\delta^1, \dots, \delta^6) = (2.5, 2.1, 1.7, 1.4, 1.2, 1.2)$.

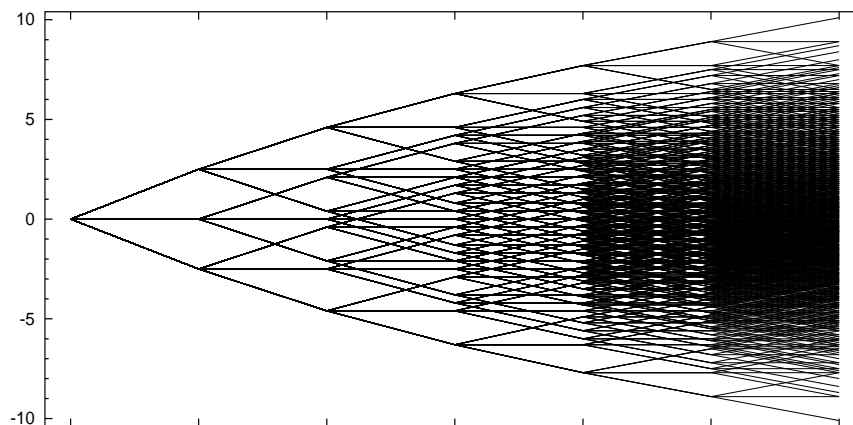


Abbildung 4: Szenariobaum Beispiel 4.4

Dieses Beispiel ist so konstruiert, daß die Voraussetzungen von Folgerung 3.19 erfüllt sind. Damit läßt sich der optimale Abstand bei der Szenarioreduktion bis zu einer Reduktion von 567 Szenarios explizit berechnen.

Tabelle 4 zeigt die numerischen Ergebnisse verschiedener Reduktionen für dieses Beispiel.

Auffällig und vielleicht überraschend ist hier, daß in einigen Fällen der Backward-Algorithmus die besseren Ergebnisse erzielt. So liefert der Backward-Algorithmus, im Bereich der Reduktion auf 148 bis 247 Szenarios, die besseren relativen Abstände.

Ansonsten treffen die Aussagen der bisherigen Untersuchungen auch auf dieses Beispiel zu. Beispiel 4.4 macht aber eines deutlich: Auch der Backward-Algorithmus kann in gewissen Situationen die besseren Resultate liefern. Hinzu kommt die konstant gute Geschwindigkeit dieses Algorithmus.

Anzahl Szenarios	Backward		Forward		Untere Schranke	Optimaler Wert
	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit		
1	121.95 %	2 s	100.00 %	1 s	18.93 %	100.00 %
2	78.10 %	2 s	78.32 %	2 s	18.90 %	*
3	63.08 %	2 s	56.64 %	2 s	18.86 %	*
4	56.13 %	2 s	53.53 %	2 s	18.83 %	*
5	52.85 %	2 s	50.43 %	3 s	18.79 %	*
6	49.75 %	2 s	47.43 %	3 s	18.75 %	*
7	47.33 %	2 s	44.43 %	3 s	18.72 %	*
8	45.31 %	2 s	42.88 %	4 s	18.68 %	*
9	44.33 %	2 s	41.32 %	4 s	18.65 %	*
10	43.43 %	2 s	40.26 %	4 s	18.61 %	*
15	39.06 %	2 s	36.00 %	6 s	18.43 %	*
20	35.12 %	2 s	33.28 %	8 s	18.25 %	*
31	30.65 %	2 s	28.92 %	12 s	17.88 %	*
40	28.36 %	2 s	26.75 %	15 s	17.61 %	*
50	26.72 %	2 s	24.92 %	18 s	17.31 %	*
63	24.72 %	2 s	22.97 %	23 s	16.92 %	*
80	22.27 %	2 s	20.80 %	28 s	16.41 %	*
100	20.29 %	2 s	19.01 %	34 s	15.90 %	*
127	17.94 %	2 s	17.26 %	41 s	15.22 %	*
147	16.17 %	2 s	16.16 %	47 s	14.71 %	*
148	16.07 %	2 s	16.12 %	47 s	14.69 %	*
150	15.91 %	2 s	16.04 %	47 s	14.64 %	*
160	15.04 %	2 s	15.62 %	50 s	14.38 %	*
161	14.97 %	2 s	15.58 %	50 s	14.36 %	*
162	14.89 %	2 s	15.54 %	50 s	14.33 %	14.33 %
180	14.18 %	2 s	14.80 %	54 s	13.88 %	13.88 %
190	13.88 %	2 s	14.39 %	57 s	13.62 %	13.62 %
200	13.58 %	2 s	13.97 %	59 s	13.37 %	13.37 %
210	13.28 %	2 s	13.56 %	61 s	13.12 %	13.12 %
220	12.98 %	2 s	13.15 %	63 s	12.87 %	12.87 %
230	12.68 %	2 s	12.75 %	65 s	12.61 %	12.61 %
240	12.37 %	2 s	12.40 %	67 s	12.36 %	12.36 %
241	12.34 %	2 s	12.37 %	67 s	12.34 %	12.34 %
247	12.18 %	2 s	12.19 %	68 s	12.18 %	12.18 %
248	12.16 %	2 s	12.16 %	68 s	12.16 %	12.16 %
250	12.11 %	2 s	12.11 %	69 s	12.11 %	12.11 %
300	10.84 %	2 s	10.84 %	76 s	10.84 %	10.84 %
400	8.32 %	2 s	8.32 %	88 s	8.32 %	8.32 %
500	5.79 %	2 s	5.79 %	94 s	5.79 %	5.79 %
600	3.26 %	2 s	3.26 %	96 s	3.26 %	3.26 %

Tabelle 4: Szenarioreduktion Beispiel 4.4

4.3 Der elektrische Last-Szenariobaum

Nachdem die Algorithmen an den 4 Beispielen umfangreich numerisch getestet wurden, soll nun schließlich ein realer Last-Szenariobaum betrachtet werden, der Teil des Modells zur Optimierung der Stromerzeugung eines hydro-thermischen Kraftwerksparks für eine Woche ist. Dieser Baum ist der Arbeit [5] entnommen.

Konstruiert wurde dieser Last-Szenariobaum unter Ausnutzung der Erwartungswerte und der Standard-Abweichungen einer großen Zahl von Last-Szenarios, die mit Zeitreihenmodellen generiert wurden.

Es handelt sich wie im Beispiel 4.3 um einen gleichmäßigen Szenariobaum mit Verzweigungsgrad 3, $K = 6$ Verzweigungsebenen und $N = 729$ Szenarios. Der Unterschied zum Beispiel 4.3 liegt allerdings darin, daß jedes einzelne Szenario nicht mehr einem Vektor des \mathbb{R}^6 , sondern nun einem Element des \mathbb{R}^{168} entspricht. Das liegt an der zusätzlichen Diskretisierung des zugrundeliegenden Zeitintervalls in 24 Stunden pro Tag.

Die ersten 24 Komponenten aller Szenarios des Last-Szenariobaums sind dabei gleich Null. Die folgende Abbildung zeigt den generierten Last-Szenariobaum.

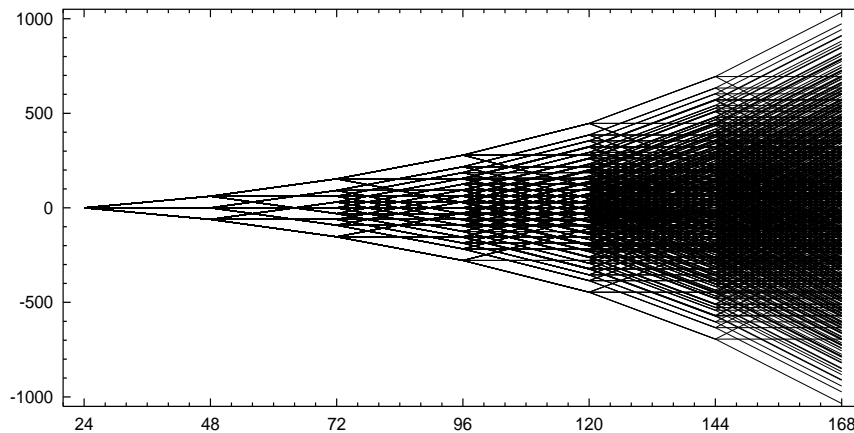


Abbildung 5: Last-Szenariobaum für eine Woche

Bei der Reduktion dieses Baums ist zu beachten, daß die Normabstände zwischen den einzelnen Szenarios nun auch mit der (euklidischen) Norm im \mathbb{R}^{168} und nicht im \mathbb{R}^6 wie bisher berechnet werden müssen. Das bedeutet, daß die Resultate von Satz 3.23 und 3.24, im Gegensatz zu Beispiel 4.3, hier nicht zur Anwendung kommen können. Aber die untere Schranke von Satz 3.5 kann auch hier genutzt werden.

Tabelle 5 zeigt die Ergebnisse des Backward- und Forward-Algorithmus bei der Szenarioreduktion des Last-Szenariobaums.

Auch im Fall des realen Last-Szenariobaums bestätigen sich die bisher gesammelten Erfahrungen. Hier ist es wieder so, daß der Forward-Algorithmus die besseren Abstände liefert. So ist anhand der unteren Schranke für den Optimalwert zu sehen, daß der Forward-Algorithmus bei einer Reduktion auf 325 Szenarios im reduzierten Baum noch exakt das Optimum berechnet, während der Backward-Algorithmus bereits leicht von diesem Wert abweicht.

Insgesamt stimmen die algorithmisch berechneten Fortet-Mourier Abstände bei der Forward-Reduktion beinahe exakt mit denen der Berechnungen aus [5] überein.

Anzahl Szenarios	Backward		Forward		Untere Schranke	Optimaler Wert
	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit	ζ_c^{rel} -Abstand	Zeit		
1	100.00 %	4 s	100.00 %	2 s	23.07 %	100.00 %
2	85.33 %	4 s	81.86 %	2 s	23.02 %	*
3	70.66 %	4 s	63.73 %	3 s	22.97 %	*
4	66.38 %	4 s	60.80 %	3 s	22.92 %	*
5	62.37 %	4 s	57.87 %	3 s	22.88 %	*
6	58.33 %	4 s	55.54 %	4 s	22.83 %	*
7	54.88 %	4 s	53.22 %	4 s	22.78 %	*
8	53.11 %	4 s	51.16 %	5 s	22.73 %	*
9	51.22 %	4 s	49.11 %	5 s	22.68 %	*
10	49.50 %	4 s	48.14 %	5 s	22.63 %	*
15	45.78 %	4 s	43.98 %	7 s	22.39 %	*
20	42.83 %	4 s	40.84 %	9 s	22.15 %	*
31	37.89 %	4 s	36.52 %	13 s	21.62 %	*
40	34.97 %	4 s	33.97 %	16 s	21.20 %	*
50	32.26 %	4 s	31.81 %	19 s	20.73 %	*
60	30.35 %	4 s	29.98 %	23 s	20.27 %	*
63	29.84 %	4 s	29.48 %	24 s	20.13 %	*
70	28.78 %	4 s	28.38 %	26 s	19.83 %	*
80	27.27 %	4 s	26.97 %	29 s	19.41 %	*
90	25.98 %	4 s	25.71 %	32 s	19.02 %	*
100	24.81 %	4 s	24.50 %	35 s	18.64 %	*
127	22.37 %	4 s	21.63 %	42 s	17.59 %	*
150	20.44 %	4 s	19.86 %	48 s	16.70 %	*
175	19.02 %	4 s	18.26 %	54 s	15.74 %	*
200	17.43 %	4 s	16.78 %	59 s	14.85 %	*
225	15.99 %	4 s	15.43 %	64 s	14.08 %	*
250	14.69 %	4 s	14.15 %	69 s	13.30 %	*
255	14.43 %	4 s	13.91 %	69 s	13.14 %	*
275	13.55 %	4 s	13.03 %	72 s	12.52 %	*
300	12.26 %	3 s	11.94 %	76 s	11.74 %	*
324	11.20 %	3 s	11.01 %	79 s	11.00 %	*
325	11.17 %	3 s	10.97 %	79 s	10.97 %	*
350	10.20 %	3 s	10.19 %	82 s	10.19 %	*
351	10.16 %	3 s	10.16 %	82 s	10.16 %	*
375	9.41 %	3 s	9.41 %	85 s	9.41 %	*
400	8.64 %	3 s	8.64 %	87 s	8.64 %	*
450	7.30 %	3 s	7.30 %	90 s	7.30 %	*
500	6.00 %	3 s	6.00 %	92 s	6.00 %	*
550	4.69 %	3 s	4.69 %	94 s	4.69 %	*
600	3.38 %	3 s	3.38 %	95 s	3.38 %	*

Tabelle 5: Szenarioreduktion des Last-Szenariobaums

Bei der Backward-Reduktion gibt es kleine Unterschiede, die aber damit zu erklären sind, daß wie schon im Beispiel zu Abschnitt 3.2 gezeigt, die vorgenommene Wahl der Indizes l_i im k -ten Schritt einen nicht unerheblichen Einfluß auf die Approximation hat.

Der entscheidende Unterschied und zugleich große Vorteil des hier verwendeten Forward-Schemas liegt offensichtlich in der Geschwindigkeit. Während die in [5] verwendete Implementation des Forward-Algorithmus, für eine Reduktion auf 600 Szenarios noch 8149 Sekunden Rechenzeit benötigte, absolviert die Implementation des Forward-Schemas dieselbe Anforderung in nur 95 Sekunden.

Die Rechenzeit zur Ermittlung des reduzierten Szenariobaums durch das Forward-Schema, wächst nicht einmal linear. Bisher war hier noch ein sehr starker Anstieg der Rechenzeit zu beobachten.

4.3.1 Verteilung der Szenarios nach der Reduktion des Last-Szenariobaums

Als letztes wollen wir uns ansehen, wie die Verteilung der Szenarios im reduzierten Szenariobaum nach der Backward- und Forward-Reduktion aussieht. Dazu betrachten wir eine Reduktion des Last-Szenariobaums auf 15 Szenarios.

Abbildung 6 zeigt den durch den Backward-Algorithmus ermittelten reduzierten Szenariobaum. Dabei sind solche Szenarios stärker hervorgehoben, die nach der Anwendung der optimalen Neuverteilungsregel von Satz 3.3 auch höhere Wahrscheinlichkeitsgewichte erhalten haben als andere. Breitere Linien spiegeln also höhere Wahrscheinlichkeit wider.

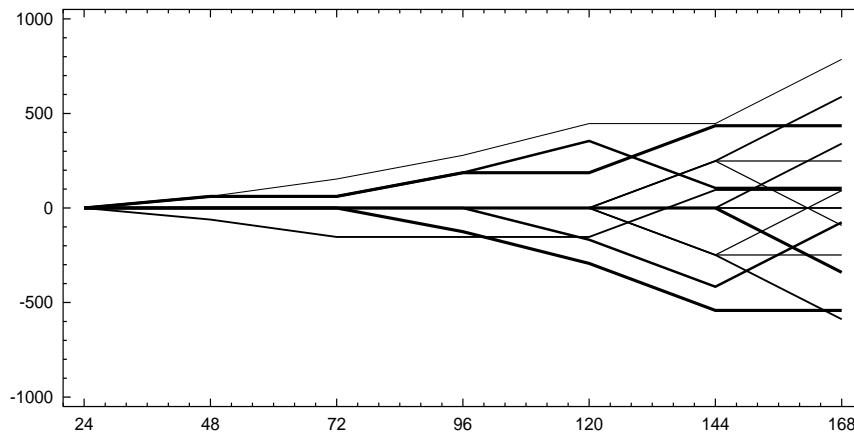


Abbildung 6: Backward-Reduktion auf 15 Szenarios im Last-Szenariobaum

In der Abbildung ist zu erkennen, daß die ursprüngliche Symmetrie des Szenariobaums verloren geht. Hier wird der Nachteil des Backward-Algorithmus deutlich. Wenn sich im Laufe des schrittweisen Eliminierens von Szenarios der Backward-Algorithmus in einem Schritt ungünstig entscheidet, kann das in den folgenden Schritten nicht mehr korrigiert werden.

Dennoch, die Szenarios gruppieren sich im reduzierten Szenariobaum erwartungsgemäß um das mittlere Szenario gerade dort, wo auch die Dichte der Szenarios im originalen Szenariobaum am größten ist; wenngleich das gesamte Bild nicht so harmonisch erscheint.

Schauen wir uns nun zum Vergleich das Ergebnis des Forward-Algorithmus an. Abbildung 7 zeigt den reduzierten Szenariobaum, der durch den Forward-Algorithmus bestimmt wurde. Der Baum umfaßt ebenfalls noch 15 Szenarios.

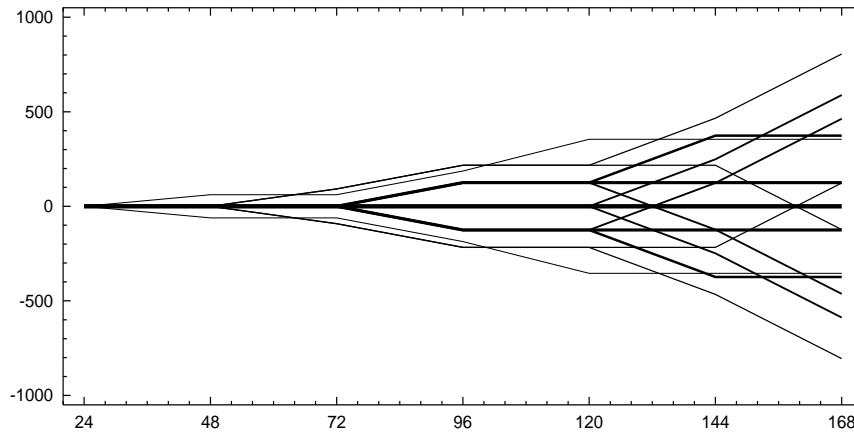


Abbildung 7: Forward-Reduktion auf 15 Szenarios im Last-Szenariobaum

Die Abbildung zeigt ein sehr erstaunliches Ergebnis. Die Symmetrie des Szenariobaums wird offenbar vollständig erhalten. Entsprechend der Dichte der Szenarios im originalen Szenariobaum, sind auch die Szenarios des reduzierten Baums, mit zum Rand hin abklingenden Wahrscheinlichkeiten gruppiert.

Hier zeigt sich der entscheidende Vorteil des Forward-Algorithmus, der bei der Lösung in jedem einzelnen Schritt die bis dahin bereits bestimmte Szenariomenge optimal um ein weiteres Szenario ergänzt. Dabei wird die neue Verteilung der Wahrscheinlichkeitsgewichte erst im allerletzten Schritt vorgenommen.

Ein bezüglich der Anordnung der Szenarios im reduzierten Szenariobaum symmetrisches Bild kann natürlich nur in jedem zweiten Schritt des Forward-Algorithmus erreicht werden. Für Szenariobäume mit Verzweigungsgrad 3 sind das die ungeraden Szenariomengen.

Hinsichtlich der Güte des Fortet-Mourier Abstands sollte dabei besonders gut die Reduktion auf $2^k - 1$, also auf 1,3,7,15... Szenarios sein. Das liegt daran, daß der Algorithmus in jedem Schritt ein solches Szenario bestimmt, welches in gewisser Weise, optimal zwischen zwei benachbarten Szenarios der bis dahin ermittelten Szenariomenge liegt. Anschaulich gesprochen, werden bei der Forward-Reduktion schrittweise „Intervalle“ halbiert, was ausgehend vom optimalen Einzelszenario, gerade zu obigen Reduktionszahlen führt.

Literaturverzeichnis

- [1] J.R. Birge und F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer New York, 1991.
- [2] P.J. Brockwell, R.A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, New York, 1996.
- [3] T.H. Cormen, C.E. Leiserson und R.L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, Kapitel 36, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
- [4] D. Dentcheva und W. Römisch, *Optimal Power Generation under Uncertainty via Stochastic Programming*, Humboldt-Universität Berlin, 1997.
- [5] J. Dupačová, N. Gröwe-Kuska und W. Römisch, *Scenario Reduction in Stochastic Programming: An Approach using Probability Metrics*, Preprint 00-9, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität Berlin, 2000.
- [6] J. Dupačová, G. Consigli und S.W. Wallace *Scenarios for Multistage Stochastic Programs*, Ann. Oper. Res. To appear.
- [7] J. Dupačová, *Scenario-based stochastic programs: Strategies for deleting scenarios*, IIASA, Working Paper 95-014, 1995.
- [8] K. Hoyland und S.W. Wallace, *Generating scenario tree for multistage decision problems*, Management Sci. To appear.
- [9] P. Kall und S.W. Wallace, *Stochastic Programming*, Wiley, 1994.
- [10] G.C. Pflug, *Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization*, Math. Programming 89 (2001), 251-271.
- [11] S.T. Rachev, *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*, Wiley, 1991.
- [12] S.T. Rachev und W. Römisch, *Quantitative stability in stochastic programming: The method of probability metrics*, Manuskript, Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, 2000.
- [13] S.T. Rachev und L. Rüschendorf, *Mass Transportation Problems*, Vol. I und II, Springer, Berlin 1998.
- [14] R.T. Rockafellar und R.J-B. Wets, *Scenario and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty*, Math. Oper. Res. 16 (1991), 119-147.
- [15] V.M. Zolotarev, *Probability metrics, Theory of Probability and its Applications* 28, 278-302, 1983.

Thesen

- Die optimale Reduktion von generierten Szenariobäumen in der stochastischen Optimierung ist von großer Bedeutung.
- Speziell in der Kraftwerks-Einsatzoptimierung kommen bei der mathematischen Modellierung durch mehrstufige Kompensationsmodelle große Last-Szenariobäume zur Anwendung.
- Selbst stark reduzierte Szenariobäume können bei geeigneter Wahl der Szenarios noch im hohen Maße die Information des originalen Baums widerspiegeln.
- Bei der Szenarioreduktion werden Wahrscheinlichkeitsmetriken zur Bestimmung der Güte von Approximationen eingesetzt. Eine kanonische Wahrscheinlichkeitsmetrik ist die Fortet-Mourier Metrik.
- Die Reduktion von Szenariobäumen stellt ein komplexes kombinatorisches Optimierungsproblem dar, dessen algorithmische Lösung vermutlich die Komplexität von NP-schweren Problemen besitzt.
- Es existieren effiziente Approximationsalgorithmen, der Backward-Algorithmus und der Forward-Algorithmus.
- Der Forward-Algorithmus, insbesondere das Forward-Schema, ist für die Szenarioreduktion in der Kraftwerks-Einsatzoptimierung sehr gut geeignet.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

Berlin, den 28.02.2001