Klausur zur Mathematik für Geowissenschaftler II, 14.07.2014

Musterlösung (Aktualisiert 21.07.2014)

Aufgabe 1

Finden Sie die Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 2xy - 10x\,,$$

und diskutieren Sie, ob es sich um lokale Maximal- oder Minimalwerte handelt.

Lösung.
Der Gradient von f lautet:

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (f_x, f_y) = (3x^2 - 2y - 10, 4y - 2x)$$

und für die Extremwerte suchen wir die Punkte (x,y) wo $\mathrm{grad} f(x,y) = (0,0)$. Also:

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (3x^2 - 2y - 10, 4y - 2x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2y - 10 = 0 \\ 4y - 2x = 0 \end{cases}$$

Aus der zweite Gleichung folgt $y = \frac{x}{2}$. Nach Einsetzen in der erste Gleichung folgt:

$$3x^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right) - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 10 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Davon bekommen wir die zwei Kandidaten für die Extremwerte:

$$P_1 = (x_1, y_1) \underbrace{=}_{y=\frac{x}{2}} (2,1), P_2 = (x_2, y_2) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{6}\right)$$

Die Hessesche Matrix von f lautet:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Und für die zwei Punkte P_1 und P_2:

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, Hf(P_1) = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt dass P_1 ein Minimum ist ($a > 0$, $\Delta > 0$) und P_2 weder Minimum noch Maximum ist ($\Delta < 0$).
Der Graph von $f(x,y)$ ist im Bild 1 gezeichnet.

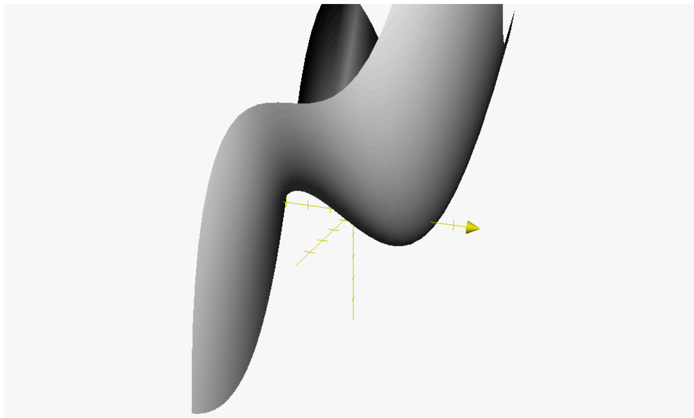

Figure 1: Die Funktion $f(x, y)$.

Aufgabe 2

(i) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 3y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

(*Hinweis: Wandeln sie das Differentialgleichungssystem in eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung um und lösen Sie dann diese*)

(ii) Skizzieren Sie anschliessend die Funktionen $x(t)$ für $t \geq 0$.

Lösung. Aus (1) folgt:

$$x'' = (x')' = (2x - y)' = 2x' - y' = 2x' - (x + 3y) = 2x' - x - 3y$$

und da

$$y = 2x - x'$$

(aus $(1)_1$), bekommt man folgende Gleichung 2. Ordnung:

$$x'' = 2x' - x - 3(2x - x') \Rightarrow x'' - 5x' + 7x = 0\,. \tag{2}$$

Um die zu lösen, suchen wir eine Losung mit der Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Ein passende λ löst dann die Gleichung

$$\lambda^2 - 5\lambda + 7$$

d.h.

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dann lautet die allgemeine Lösung von (2)

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} \left(a \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + b \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

Um a und b zu bestimmen, brauchen wir die Anfangsbedienungen.
Aus (1) haben wir:

$$x(0) = 1, x'(0) = 2x(0) - y(0) = 2 - 1 = 1.$$

Die Ableitung von $x(t)$ lautet:

$$x'(t) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\left(-a\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Also, nach Einsetzen, bekommt man zwei Gleichung für a und b:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &\Rightarrow a = 1 \\ x'(0) = 1 &\Rightarrow \frac{5}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$a = 1,\ b = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Dann ist die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ y(t) &= 2x(t) - x'(t) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

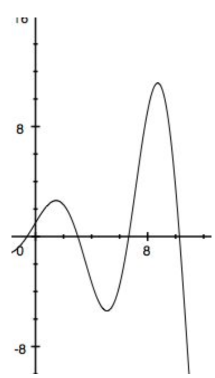

Figure 2: Skizze von $x(t)$.

Aufgabe 3

(i) Finden Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und prüfen Sie unter Anwendung der Matrixmultiplikation nach, dass gilt

$$A \cdot A^{-1} = E_3 \, , A^{-1} \cdot A = E_3 \, .$$

(ii) Lösen Sie das anschliessend das LGS

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Lösungen. (i) Die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

Da $A \cdot A^{-1} = E_3$, können die Koeffizienten durch einen Eliminationsverfahren bestimmen werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(wo links stehen die Koeffizienten von A und rechts die Einheitsmatrixkoeffizienten).

Durch Umformen, muss man die linke Seite zu einer Dreieckmatrix schaffen. Es ist immer praktisch von unten anzufangen, d.h. zuerst versuchen, die dritte Zeile zu "eliminieren" (mithilfe den ersten und zweiten), dann die zweite mithilfe der erste (und die dritte nicht mehr anfassen).

Schritt 1: III = III + I (III. Zeile durch III. + I. ersetzen)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Schritt 2: III = III + II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Schritt 3: II = II - I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt kann die letzte Darstellung als 3 LGS gesehen werden, für die 3 Spaltenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31}), \mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32}), \mathbf{v}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})$$

Für $\mathbf{v}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d.h.

$$v_{31} = 1,$$
$$v_{21} - v_{31} = -1 \Rightarrow v_{21} = 0$$
$$v_{11} - v_{21} + v_{31} = 1 \Rightarrow v_{11} = 0$$

Für $\mathbf{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d.h.

$$v_{32} = 1,$$
$$v_{22} - v_{32} = 1 \Rightarrow v_{22} = 2$$
$$v_{12} - v_{22} + v_{32} = 0 \Rightarrow v_{12} = 1$$

Für $\mathbf{v}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d.h.

$$v_{33} = 1,$$
$$v_{23} - v_{33} = 0 \Rightarrow v_{23} = 1$$
$$v_{13} - v_{23} + v_{33} = 1 \Rightarrow v_{13} = 0$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Probe liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Um das System

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

zu lösen, multipliziern wir links und rechts mit A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E_3}\mathbf{x} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = (-1,1,3).$$

Aufgabe 4

Sei die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x}{yz} - \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Gradient von f, die Hessesche Matrix und den Laplace Operator von f.

Lösung.
Beachte folgende Ableitungsregeln:

$$\frac{d}{dx}fg = \left(\frac{d}{dx}f\right)g + f\left(\frac{d}{dx}g\right)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{f(x)} = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$$

Wir berechen zuerst alle benötigte partielel Ableitungen

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{yz} - \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = \frac{1}{yz} + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\\
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{yz} - \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = -\frac{x}{y^2z} - \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x}\\
f_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{yz} - \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = -\frac{x}{yz^2} - \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x}\\
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{yz} + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\right) = -2\frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^3}\\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{yz} + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\right) = -\frac{1}{y^2z} + \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\\
f_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{yz} + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\right) = -\frac{1}{yz^2} + \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x^2}\\
f_{yx} &= f_{xy}\\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2z} - \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = 2\frac{x}{y^3z} - \frac{z^2\mathrm{e}^{yz}}{x}\\
f_{yz} &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{y^2z} - \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = \frac{x}{y^2z^2} - \frac{yz\mathrm{e}^{yz}}{x}\\
f_{zx} &= f_{xz}\\
f_{zy} &= f_{yz}\\
f_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{yz^2} - \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x}\right) = 2\frac{x}{yz^3} - \frac{y^2\mathrm{e}^{yz}}{x}
\end{aligned}$$

Also:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{yz} + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2}, -\frac{x}{y^2 z} - \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x}, -\frac{x}{yz^2} - \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x}\right)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -2\frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^3} & -\frac{1}{y^2 z} + \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x^2} & -\frac{1}{yz^2} + \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x^2} \\ -\frac{1}{y^2 z} + \frac{z\mathrm{e}^{yz}}{x^2} & 2\frac{x}{y^3 z} - \frac{z^2\mathrm{e}^{yz}}{x} & \frac{x}{y^2 z^2} - \frac{yz\mathrm{e}^{yz}}{x} \\ -\frac{1}{yz^2} + \frac{y\mathrm{e}^{yz}}{x^2} & \frac{x}{y^2 z^2} - \frac{yz\mathrm{e}^{yz}}{x} & 2\frac{x}{yz^3} - \frac{y^2\mathrm{e}^{yz}}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -2\frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^3} + 2\frac{x}{y^3 z} - \frac{z^2\mathrm{e}^{yz}}{x} + 2\frac{x}{yz^3} - \frac{y^2\mathrm{e}^{yz}}{x} =$$
$$= \frac{2x}{yz}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x}\left(\frac{2}{x^2} + y^2 + z^2\right)$$

Aufgabe 5

Eine Kugel vom Radius $R = 0.5$ cm bewege sich in einer Flüssigkeit. Es werden die Dichte der Kugel $\rho = 1.3 \pm 0.07$ g/cm^3 und die Viskosität der Flüssigkeit $\eta = 0.3 \pm 0.1$ g^2/(s·cm) gemessen. Der Reibungskoeffizient ergibt sich aus der Formel

$$\gamma = \frac{9\eta}{2R^2\rho}\,.$$

Berechnen sie mit Hilfe der Differentialrechnung den Fehler bei der Berechnung des Reibungskoeffizienten. Welcher von beiden Messfehlern hat den stärkeren Einfluss?

Lösung. Beachte: R (Radius) ist ein Parameter der Funktion, aber es hat kein Fehler. Deswegen braucht man nur den angegebenen Wert ($R = 0.5$) einzusetzen.

Aus der linearen Approximation von $\gamma(\rho, \eta)$

$$\gamma(\rho,\eta) = \gamma(\overline{\rho},\overline{\eta}) + \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}_{|(\overline{\rho},\overline{\eta})}(\rho - \overline{\rho}) + \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}_{|(\overline{\rho},\overline{\eta})}(\eta - \overline{\eta}) + \dots$$

folgt die Fehlerapproximation:

$$|\gamma(\rho,\eta) - \gamma(\overline{\rho},\overline{\eta})| \le \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\right|\Delta\rho + \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\eta}\right|\Delta\eta$$

Dann aus

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = -\frac{9\eta}{2R^2\rho^2}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} = \frac{9}{2R^2\rho}\,.$$

folgen:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}_{|(\overline{\rho},\overline{\eta})} = \left|-\frac{9\cdot 0.3}{2\cdot 0.5^2 1.3^2}\right| \approx 3.19,\ \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}_{|(\overline{\rho},\overline{\eta})} = \left|-\frac{9}{2\cdot 0.5^2 1.3}\right| \approx 13.84$$

und der Fehler ist:

$$|\gamma(\rho,\eta) - \gamma(\overline{\rho},\overline{\eta})| \le \underbrace{3.19\cdot 0.07}_{\rho-\text{Anteil}} + \underbrace{13.84\cdot 0.1}_{\eta-\text{Anteil}} = 0.22 + 1.38 = 1.6$$

Der Fehler in η (Viskosität) hat den stärkeren Einfluss, weil der wird mit ein höeren Faktor (13.84, 4 mal grösser als 3.19) multipliziert.