

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik und Numerische Feldberechnung
PD Dr. Markus Clemens

Simulation elektromagnetischer Felder mit diskreten Feldformulierungen: Theoretische Modelle und praktische Anwendungen

Kolloquium des Weierstraß Institute for Applied Analysis and Stochastics
20. September 2004, Berlin



Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

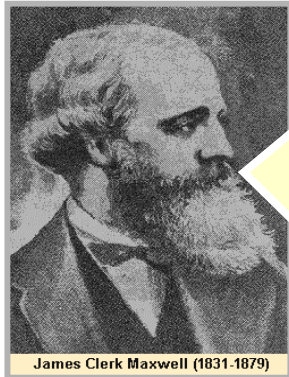
Transiente Magnetfelder

Simulation hochfrequenter Felder

Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

Maxwellsche Gleichungen



$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

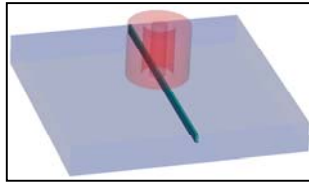
$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

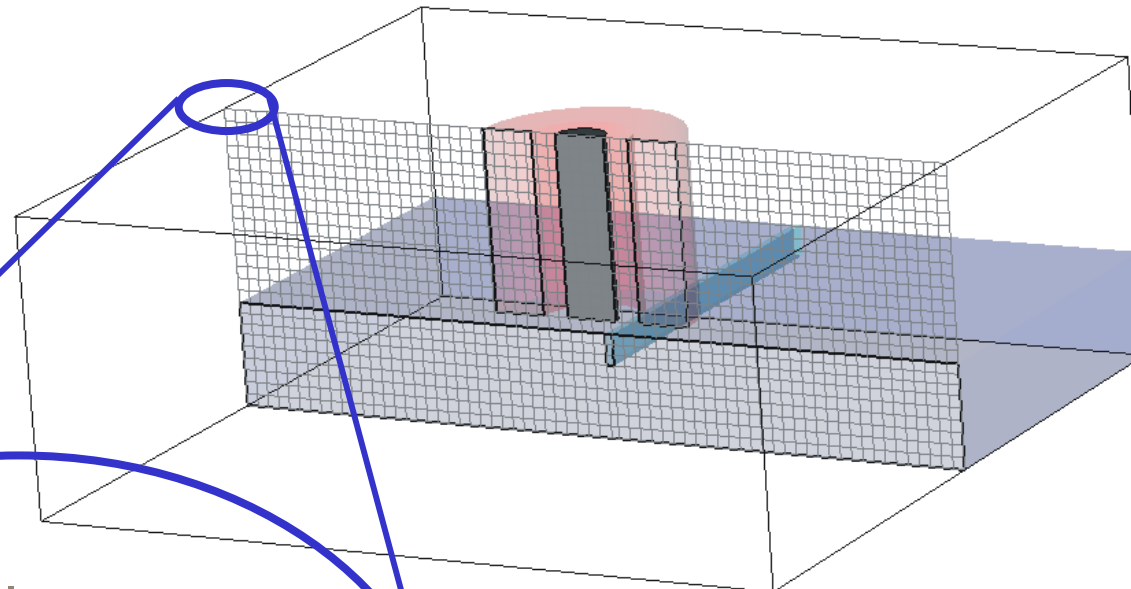
Die Finite Integrationstechnik (FIT) leitet sich ab
von den **Maxwellgleichungen in ihrer integralen Form**

Freiheitsgrade

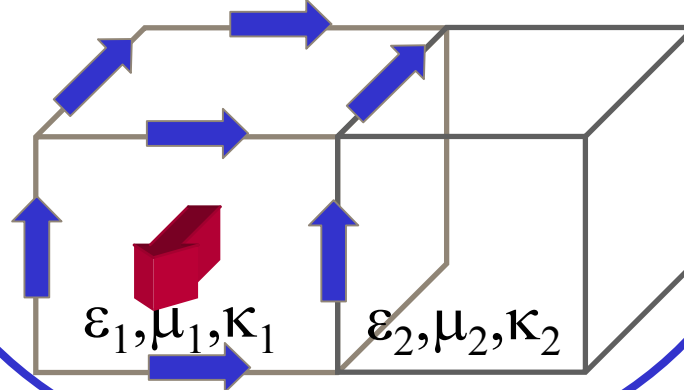


Rechengebiet

Gitterkomplex



Gitterzellen:



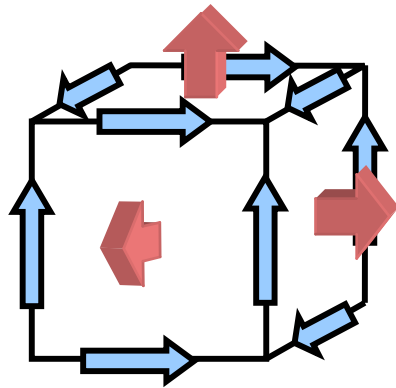
- Allokation der Freiheitsgrade

$$\hat{e} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \hat{\hat{b}} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- Materialverteilung

Flüsse und Spannungen

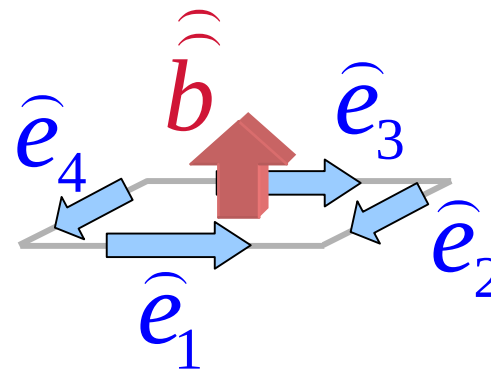
Gitter G



$$\widehat{\vec{b}} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

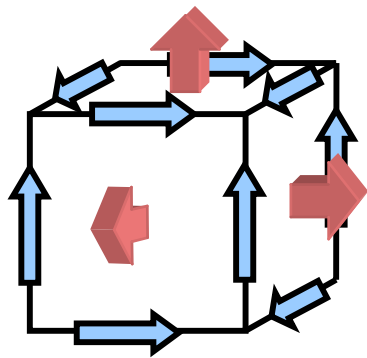
$$\widehat{e} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



$$\widehat{e}_1 - \widehat{e}_2 - \widehat{e}_3 + \widehat{e}_4 = - \frac{d}{dt} \widehat{\vec{b}}$$

Flüsse und Spannungen



$$\sum_{i=1,4} c_i \hat{e}_i = -\frac{d}{dt} \hat{\hat{b}}_j$$

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\hat{\mathbf{b}}}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ & \dots & & & \\ & -1 & +1 & & \\ & & +1 & -1 & \\ & & & & \dots \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \dots \\ \hat{e}_N \end{pmatrix}$$

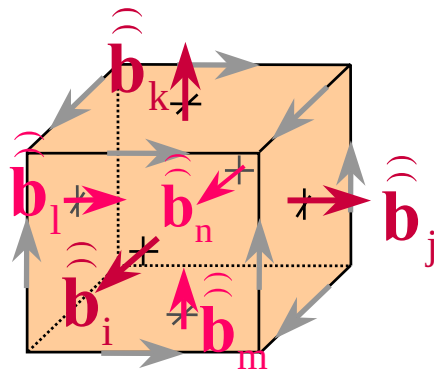
$$\hat{\hat{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} \hat{\hat{b}}_1 \\ \hat{\hat{b}}_2 \\ \dots \\ \hat{\hat{b}}_N \end{pmatrix}$$

FIT – Divergenzgleichungen

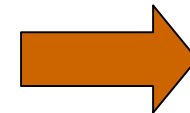
Nichtexistenz magnetischer Ladungen:

$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Zelle V von G



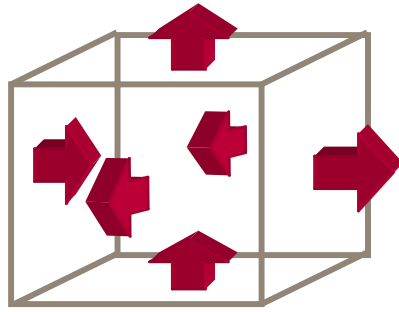
$$\hat{\hat{b}}_i + \hat{\hat{b}}_j + \hat{\hat{b}}_k - \hat{\hat{b}}_l - \hat{\hat{b}}_m - \hat{\hat{b}}_n = 0$$



$$\hat{\hat{S}} \hat{\hat{b}} = 0$$

S = „Divergence“-Matrix

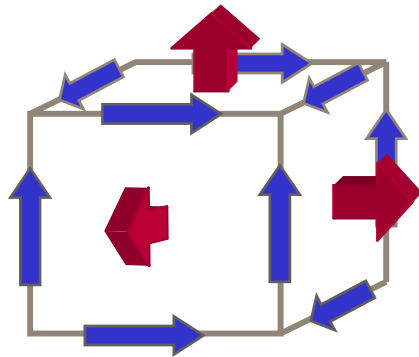
Gitter-Inzidenzmatrizen: Div, Grad, Curl



$$\sum_{i=1,6} s_i \hat{\hat{\mathbf{b}}}_i = 0$$

$$\mathbf{S} \hat{\hat{\mathbf{b}}} = 0$$

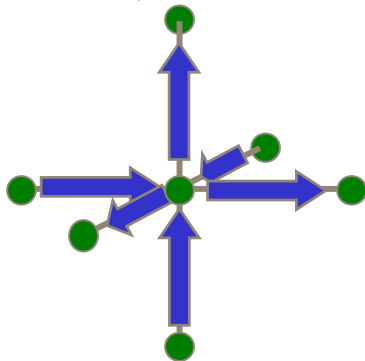
„Divergence“-Matrix



$$\sum_{i=1,4} c_i \hat{\mathbf{e}}_i = -\frac{d}{dt} \hat{\hat{\mathbf{b}}}_j$$

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\hat{\mathbf{b}}}$$

„Curl“-Matrix



$$-\sum_{j=1,2} g_j \Phi_j = \hat{\mathbf{e}}_i$$

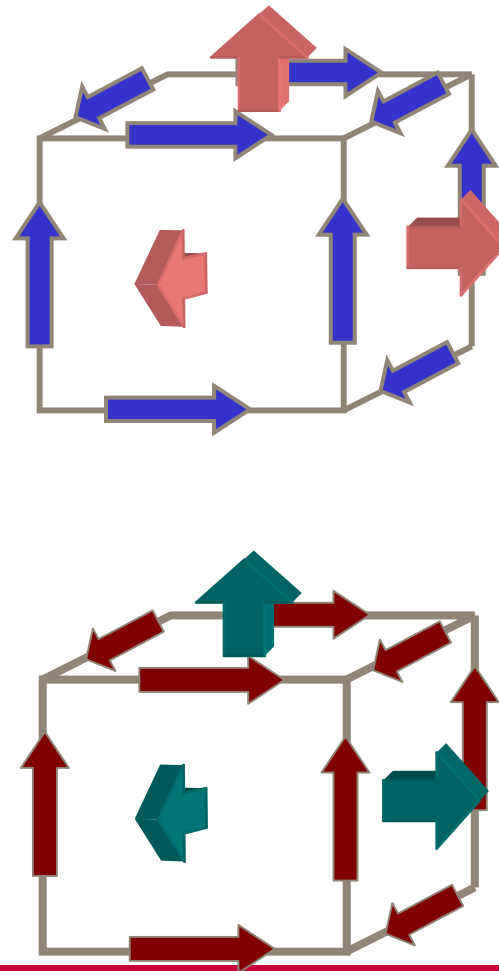
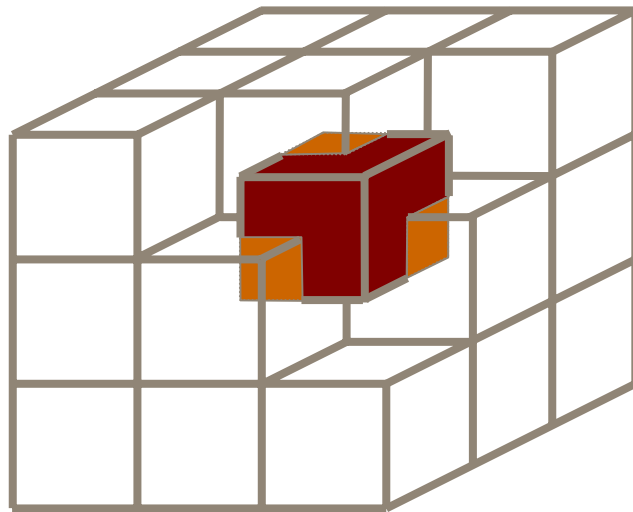
$$-\mathbf{G} \Phi = \hat{\mathbf{e}}$$

„Gradient“-Matrix

Freiheitsgrade auf einem dualen Gitter

Primales Gitter G

Duales Gitter $\tilde{G}$



$$\hat{\vec{b}} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\hat{\vec{e}} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\hat{\vec{d}} = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\hat{\vec{h}} = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

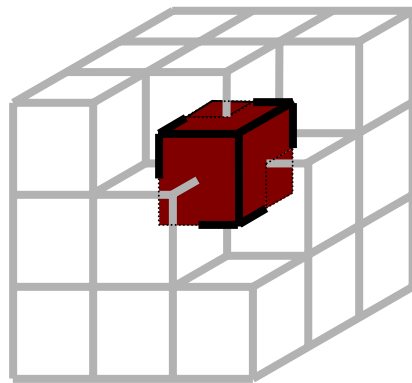
Gitter-Inzidenzmatrizen: Dualität

Analog: Inzidenzmatrizen des dualen Gitters $\tilde{G}$

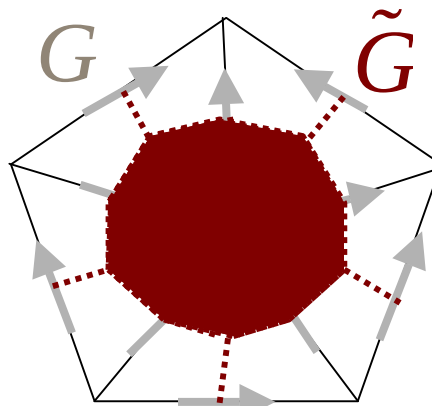
Duale „Divergenz“-Matrix $\tilde{S}$ $\tilde{S} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}$

Duale „Curl“-Matrix: $\tilde{C}$ $\tilde{C} \hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{j}} + \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{d}}$

Duale „Gradienten“-Matrix: $\tilde{G}$ $\hat{\mathbf{h}} = -\tilde{G} \Psi$



FIT:
Dual-orthog. Gitter



Whitney-FEM:
Baryzentr. duales Gitter

Dualität von G und $\tilde{G}$:

$$\tilde{S} = -G^T$$

$$\tilde{C} = C^T$$

$$\tilde{G} = -S^T$$

Diskreter Elektromagnetismus

Maxwellgleichungen

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho \, dV$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s$$

Exakt per
Konstruktion!

FIT

Gitter-Maxwellgleichungen

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = - \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{b}}$$

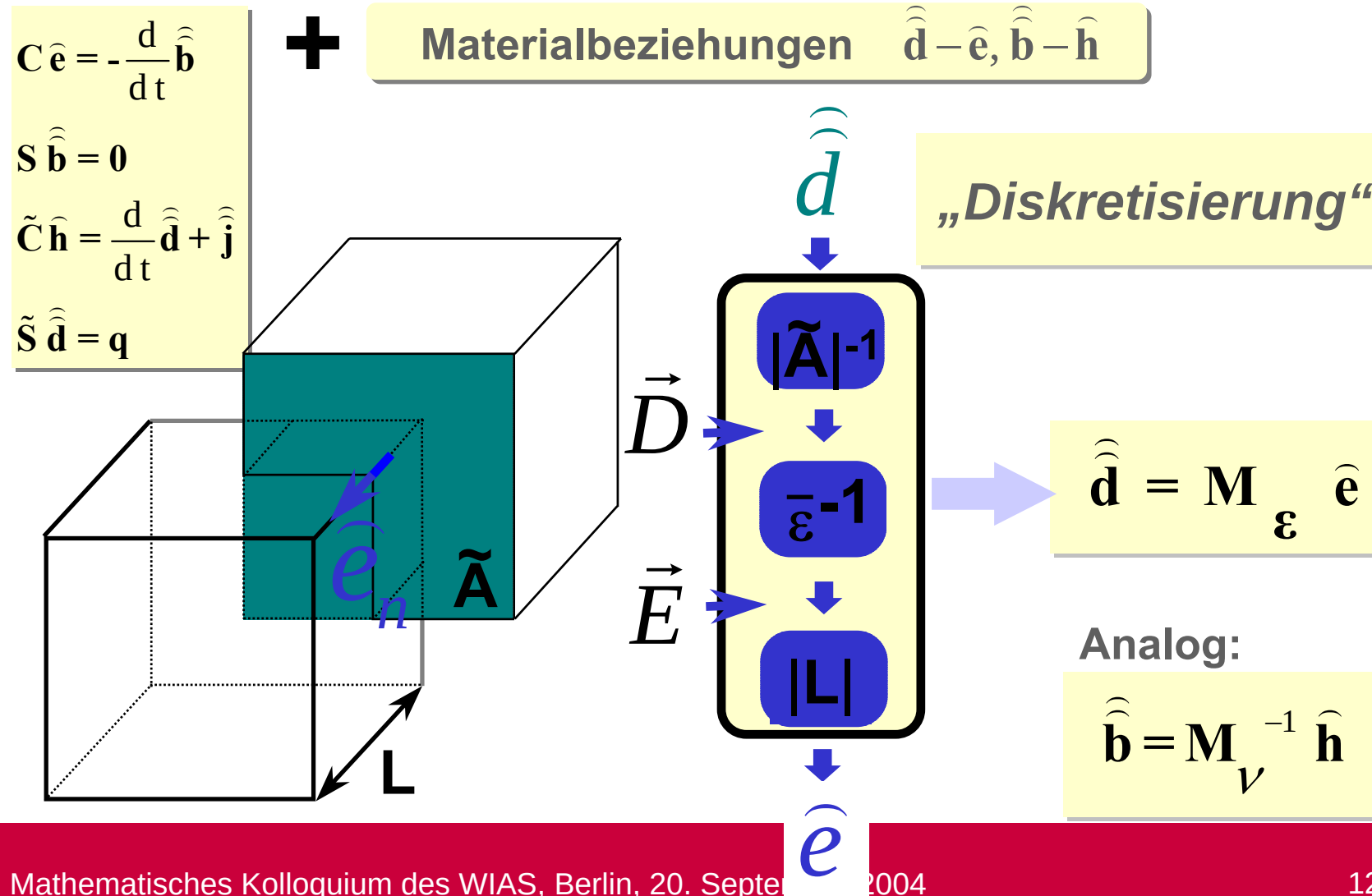
$$\mathbf{S}\hat{\mathbf{b}} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{j}}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}$$

?

Diskretisierung der Materialgleichungen



DOG - Dual-orthogonale Gittersysteme

$$\begin{aligned} \left[M_{\varepsilon} \right]_{ijk} &= \frac{\iint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta} \int_{y_0}^{y_0+\Delta} f(x, y) dx dy}{\int_{z_0}^{z_0+\Delta} g(z) dz} \\ &= \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}; y_0 + \frac{\Delta}{2}\right)}{g\left(z_0 + \frac{\Delta}{2}\right)} + O(\Delta^{\gamma+2}) \end{aligned}$$

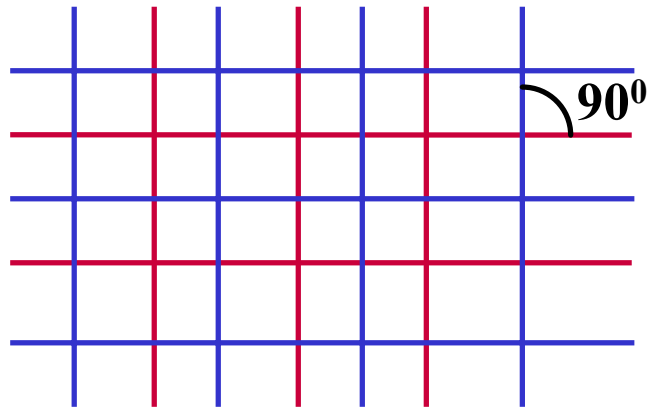
Approximationsordnung

in einfachster Form: $1 \leq \gamma \leq 2$

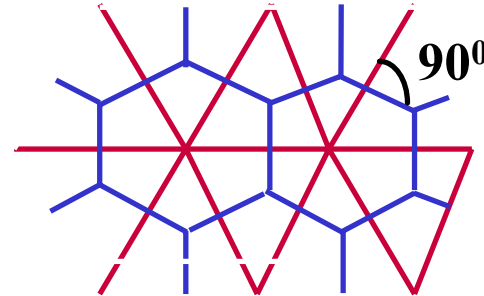
Erweiterungen durch höhere Approximationsordnungen in Raum u. Zeit

Duale Gittersysteme

Orthogonale Gitterpaare

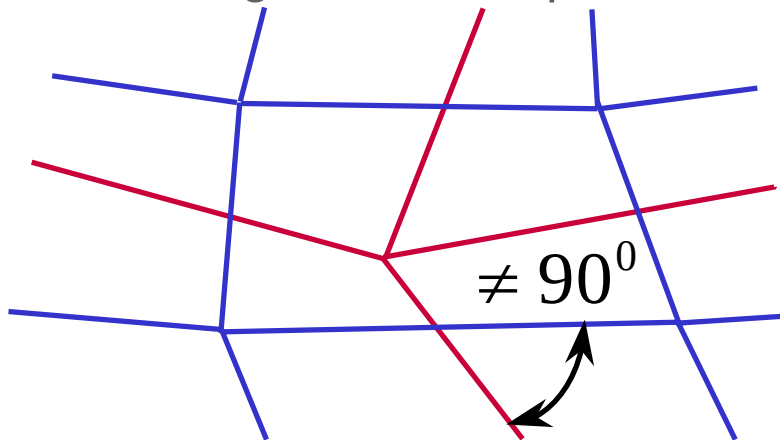


$$G \perp \tilde{G}$$



$\mathbf{D}_\varepsilon, \mathbf{D}_\mu, \mathbf{D}_\sigma$ diagonale Matrizen

Nichtorthogonale Gitterpaare



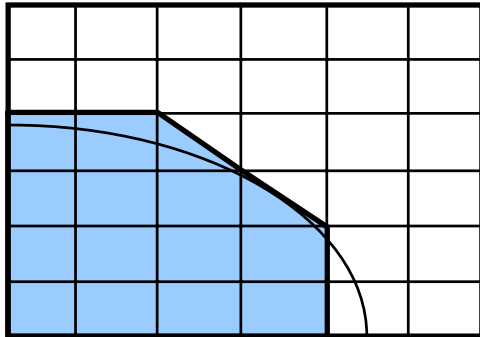
$$\mathbf{D}_\varepsilon \Rightarrow \mathbf{M}_\varepsilon$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon; \mathbf{M}_\mu; \mathbf{M}_\sigma$$

nichtdiagonale Matrizen

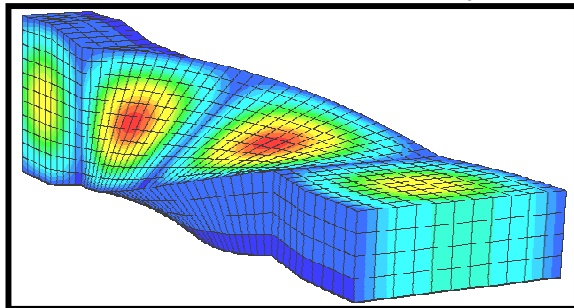
Verbesserte Genauigkeit: Conformal FIT (C-FIT)

Verbesserte Staircase Gitter (Weiland '77)

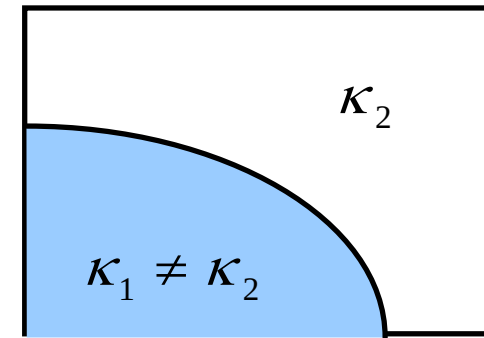


Einfache Implementierung
Verbesserte Approximation

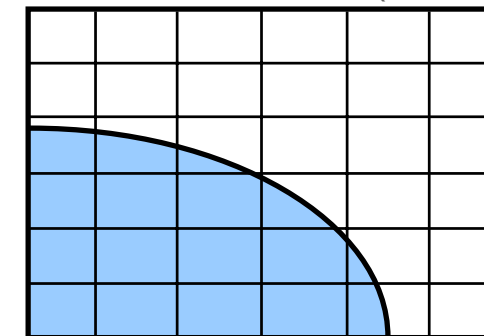
Randkonforme Gitter (Schuhmann '00)



Komplexe Implementierung

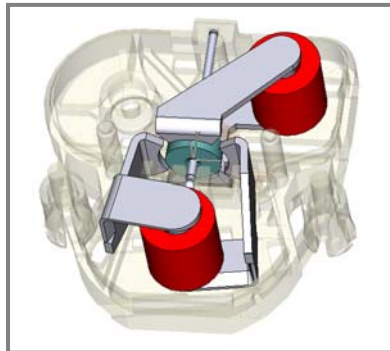


“Conformal FIT” (Thoma '96)



Komplexe Implementierung
Reduzierter Volumenfehler

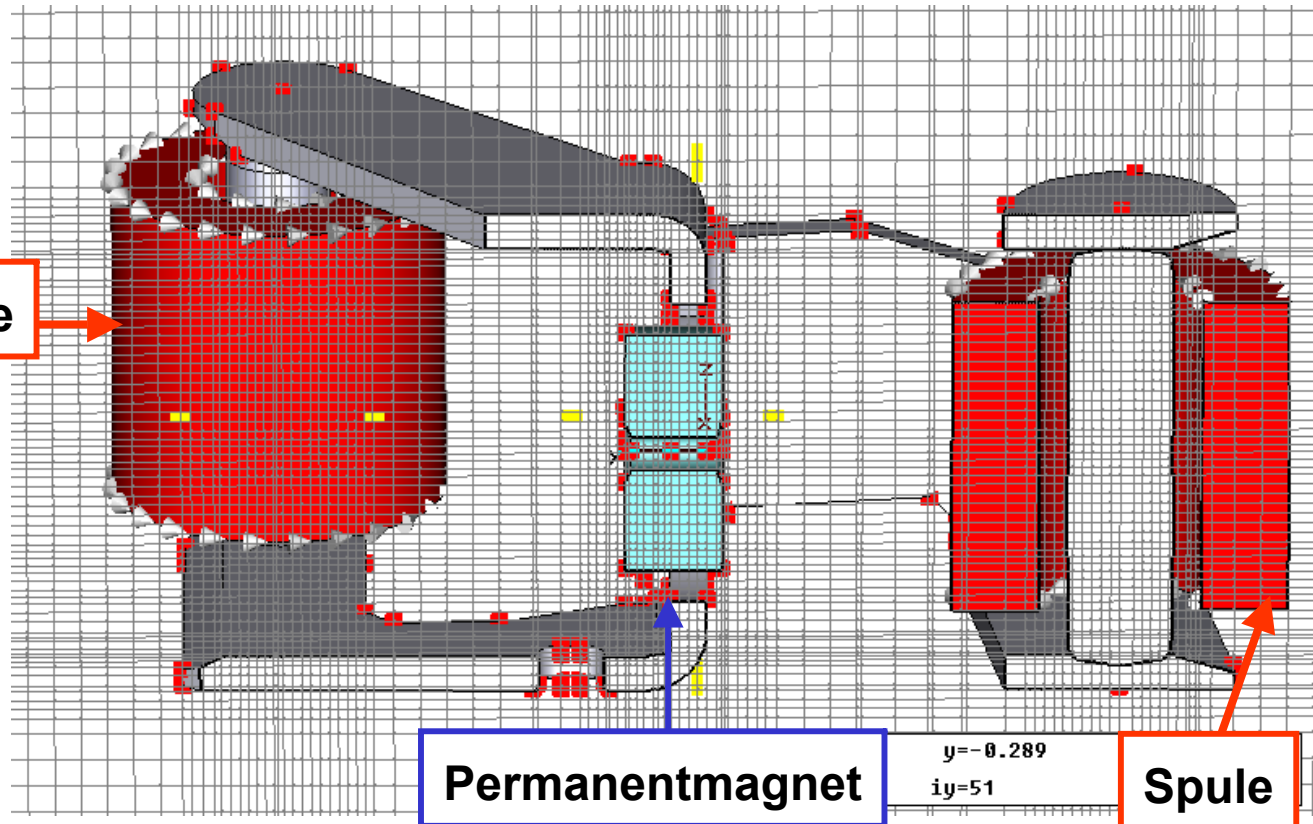
Vereinfachte Gittergenerierung mit der C-FIT



- Zellen: 990.888
- CPU-Zeit für CFIT Matrix-Setup:
2:05 min auf Intel Pentium 4 (1,6 GHz)

Tachomotor
(Siemens/VDO)

Spule



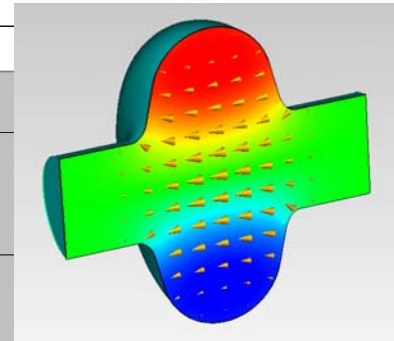
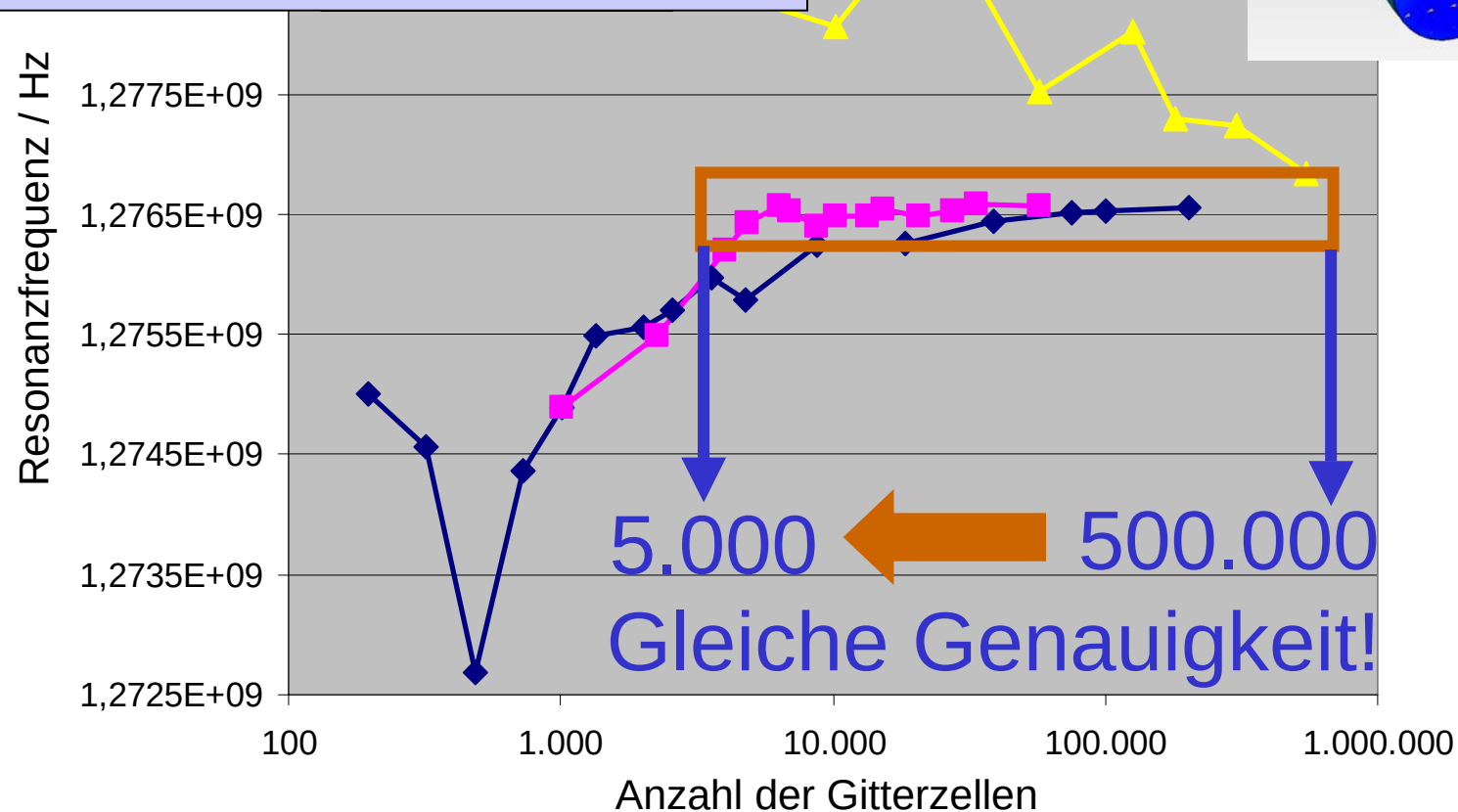
Bilder: CST GmbH Darmstadt

Konvergenz TESLA Zelle

CFIT äquidistant

CFIT Knowledge-basiertes Gitter

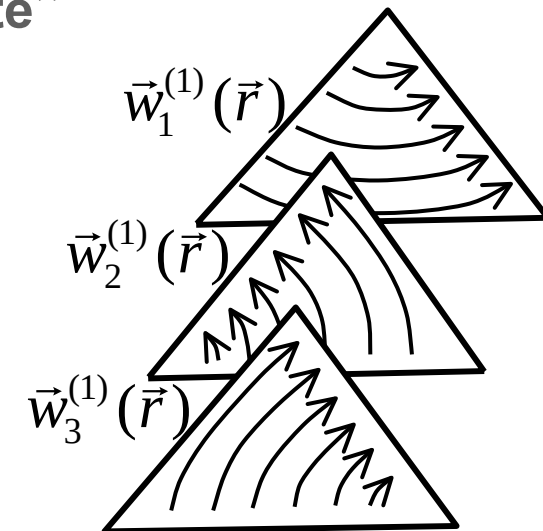
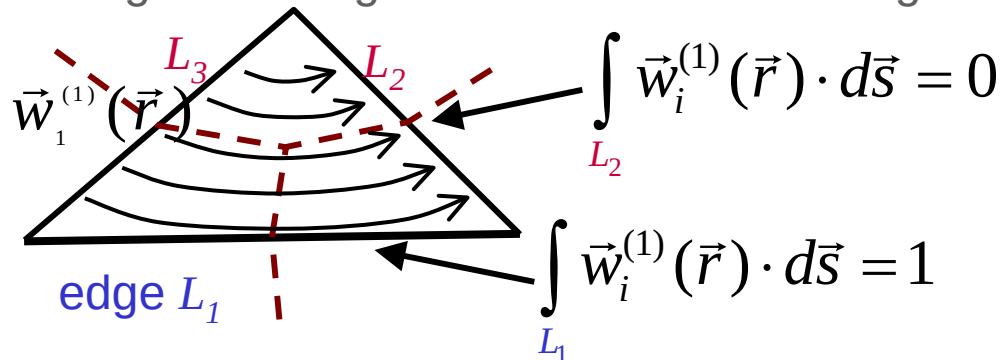
Konventionelles Staircase-Gitter



FIT und die Whitney FE-Methode

Whitney Funktionen  “Kanten-Elemente”

Tangentialstetigkeit des E-Feldes entlang der Kanten:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i e_i \vec{w}_i^{(1)}(\vec{r})$$

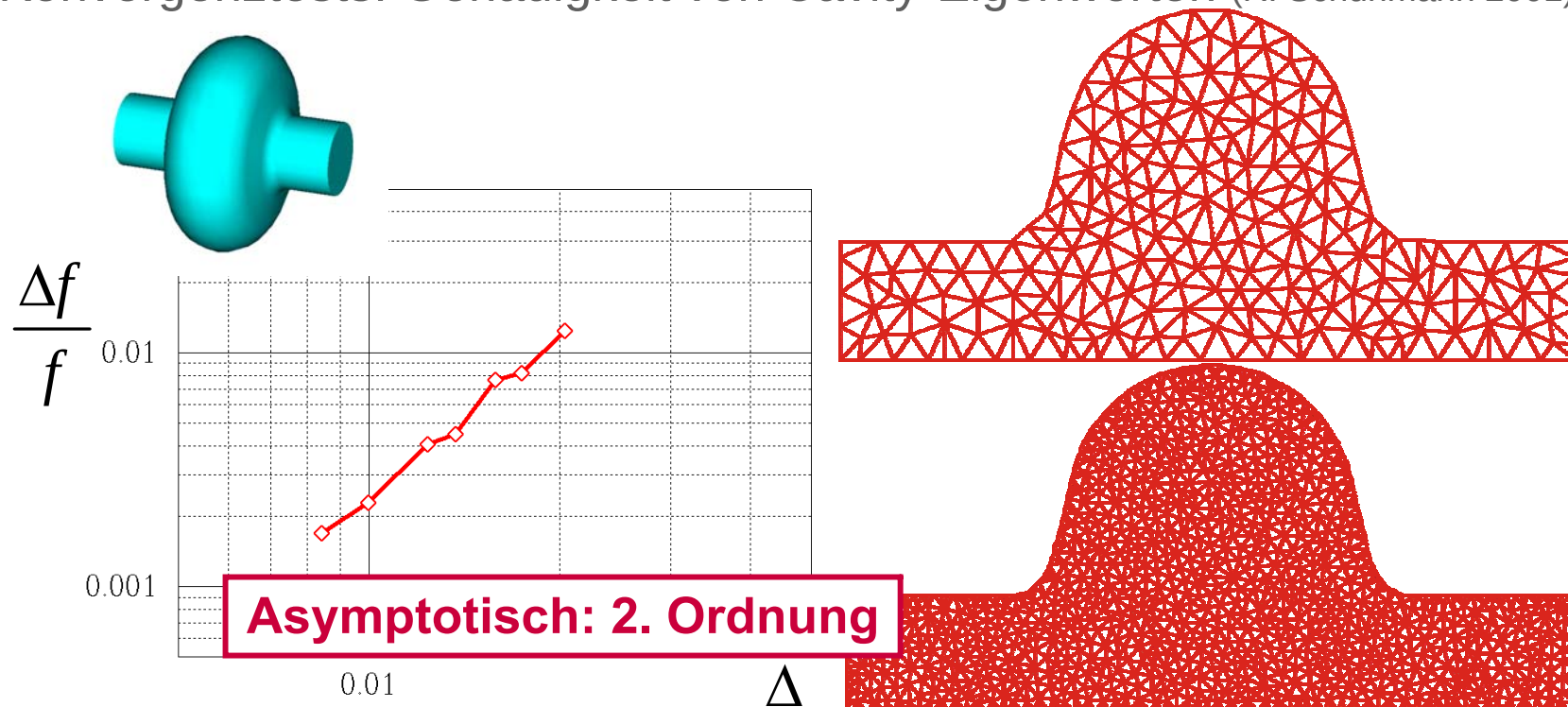
Freiheitsgrade

$$\Rightarrow \hat{e}_i = \int_{L_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{L_i} \sum_j e_j \vec{w}_j^{(1)}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = e_i$$

$\Rightarrow e_i \equiv \hat{e}_i$ Interpolationsfunktionen konsistent zur FIT!

FIT (2D) mit 'Whitney Finiten-Elementen'

Konvergenztests: Genauigkeit von Cavity-Eigenwerten (R. Schuhmann 2001)



Vergleichbar mit Standard-FIT und FEM-Resultaten

Erlaubt Gitterwinkel bis 120°

Diskreter Elektromagnetismus

Maxwellgleichungen

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho \, dV$$

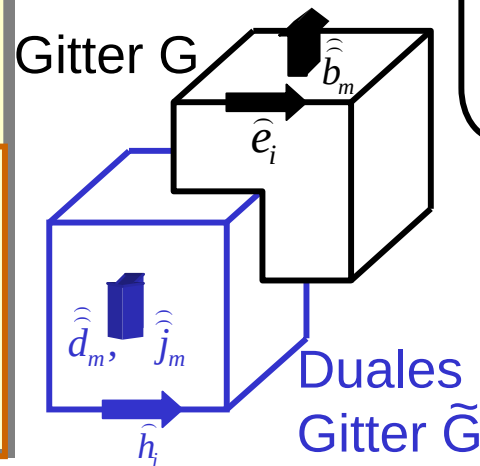
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s$$

Exakt per
Konstruktion!

FIT



Gitter-Maxwellgleichungen

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{S}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{j}}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{M}_\varepsilon \hat{\mathbf{e}}$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\nu \hat{\mathbf{b}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{j}}_s$$

Materialmatrizen gibt es „in vielen Geschmacksrichtungen“:

FIT, CFIT, NFIT, FIT⁴, Whitney-FEM, (S)Cell-Method,...

Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Algebraische Eigenschaften

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

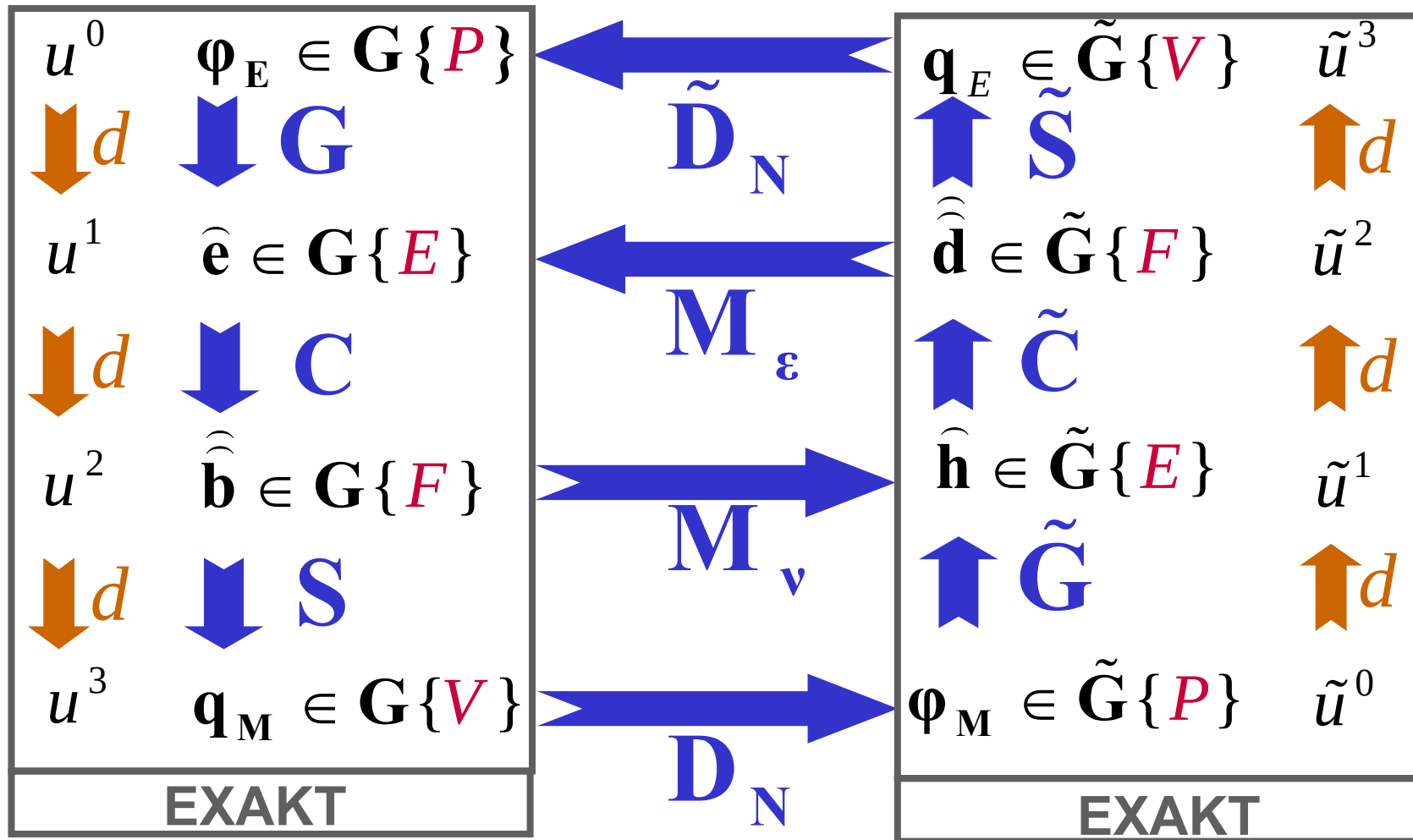
Transiente Magnetfelder

Simulation hochfrequenter Felder

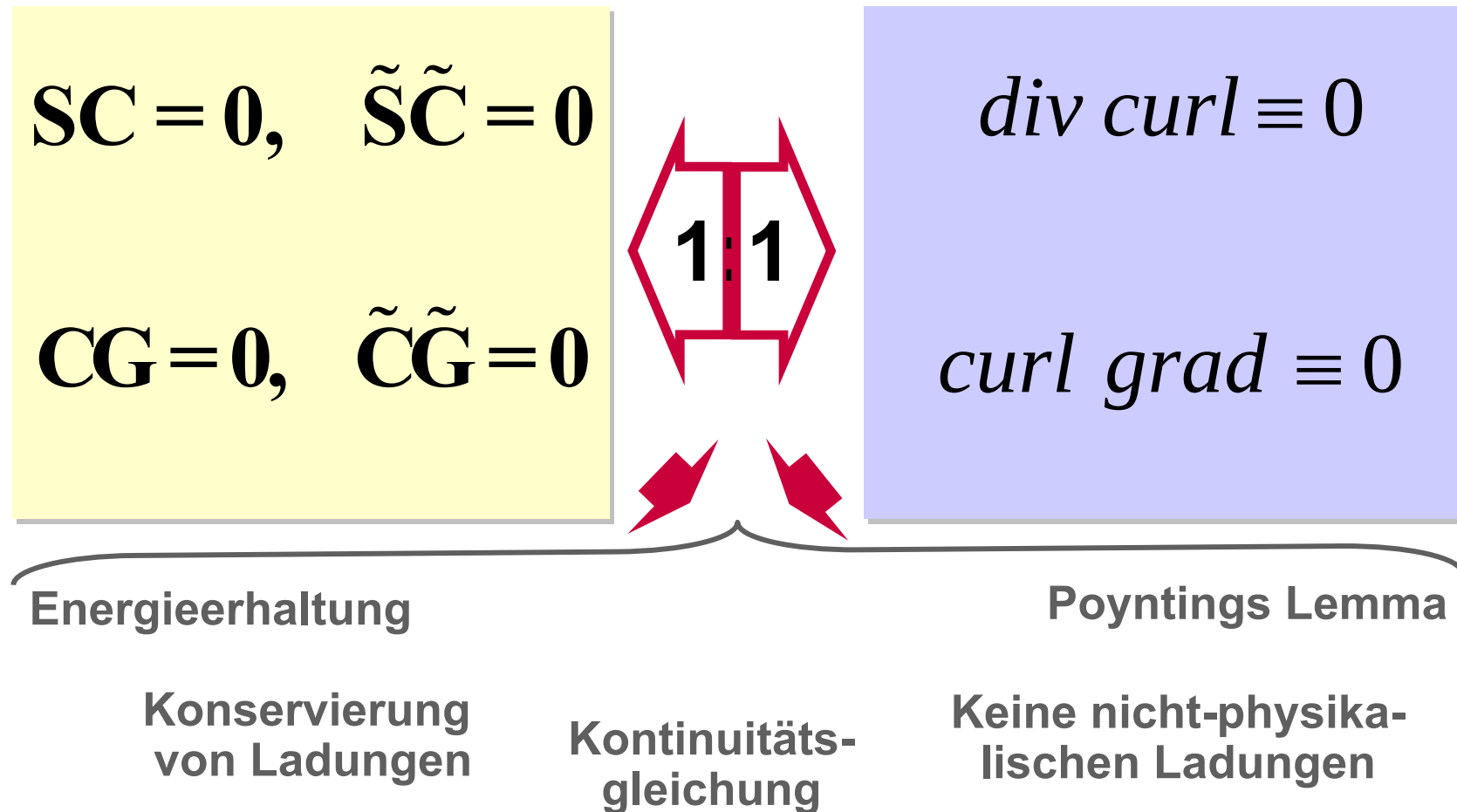
Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

Grundlegende Eigenschaften



Algebraische Eigenschaften der Inzidenzmatrizen



Elektromagnetische Feldtheorie

Elektrostatik

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = q$$

Magnetostatik

$$\nabla \times \vec{H}_i = \vec{J}_s ; \nabla (\cdot \mu \nabla \Phi) = q_m$$

Elektro-Quasistatik

$$\nabla (\cdot \epsilon \nabla \frac{d}{dt} \Phi(t)) + \nabla (\cdot \kappa \nabla \Phi(t)) = 0$$

Magneto-Quasistatik

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}(t)) + \kappa \frac{d}{dt} \vec{A}(t) = \vec{J}_s(t)$$

Schnell veränderliche
transiente Felder

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{E}) + \frac{d}{dt} (\kappa \vec{E}) + \frac{d^2}{dt^2} (\epsilon \vec{E}) = -\frac{d}{dt} \vec{J}_s$$

Zeitharmonische
Probleme

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \underline{\vec{E}}) + i\omega \kappa \underline{\vec{E}} - \epsilon \omega^2 \underline{\vec{E}} &= -i\omega \underline{\vec{J}}_s \\ \text{oder} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times \underline{\vec{E}}) + i\omega \kappa \underline{\vec{E}} - \epsilon \omega^2 \underline{\vec{E}} &= 0 \end{aligned}$$

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Elektrostatik

$$-\tilde{\mathbf{M}}_{\varepsilon} \mathbf{G} \Phi = \mathbf{q}$$

Magnetostatik

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_i = \hat{\mathbf{j}} ; \tilde{\mathbf{M}}_{\mu} \mathbf{G} \Phi = \mathbf{q}_m$$

Elektro-Quasistatik

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\varepsilon} \mathbf{G} \frac{d}{dt} \Phi(t) + \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa} \mathbf{G} \Phi(t) = 0$$

Magneto-Quasistatik

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\nu} \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{M}_{\kappa} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_s(t)$$

Schnell veränderliche
transiente Felder

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\nu} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{M}_{\kappa} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{j}}_s$$

Zeitharmonische
Probleme

$$(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\nu} \mathbf{C} + i\omega \mathbf{M}_{\kappa} - \omega^2 \mathbf{M}_{\varepsilon}) \hat{\mathbf{e}} = -i\omega \hat{\mathbf{j}}_s$$

oder

$$(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\nu} \mathbf{C} + i\omega \mathbf{M}_{\kappa} - \omega^2 \mathbf{M}_{\varepsilon}) \hat{\mathbf{e}} = 0$$

Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

Transiente Magnetfelder

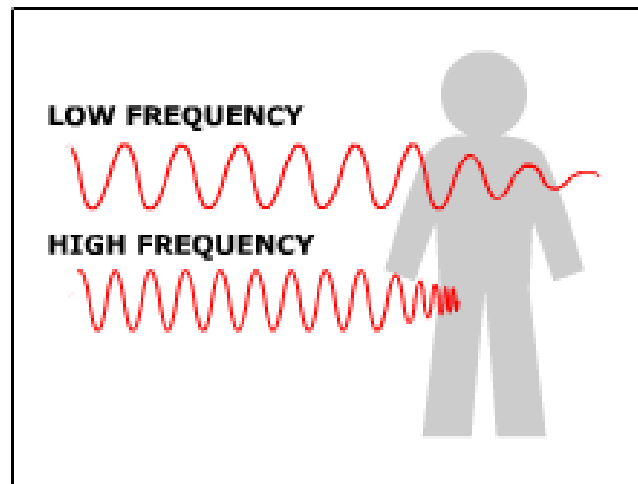
Simulation hochfrequenter Felder

Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

Wirkung niederfrequenter elektromagnetischer Felder auf den menschlichen Körper

Frequenzabhängige Wechselwirkung



Niederfrequenz: **Induzierte Stromdichten**

Hochfrequente Strahlung: SAR (**S**pecific **A**bsorption **R**ate)

Bild: <http://www.nrpb.org/understand/radiowaves/radiowaves.htm>

Das 3D-Anatomiemodell „Hugo“

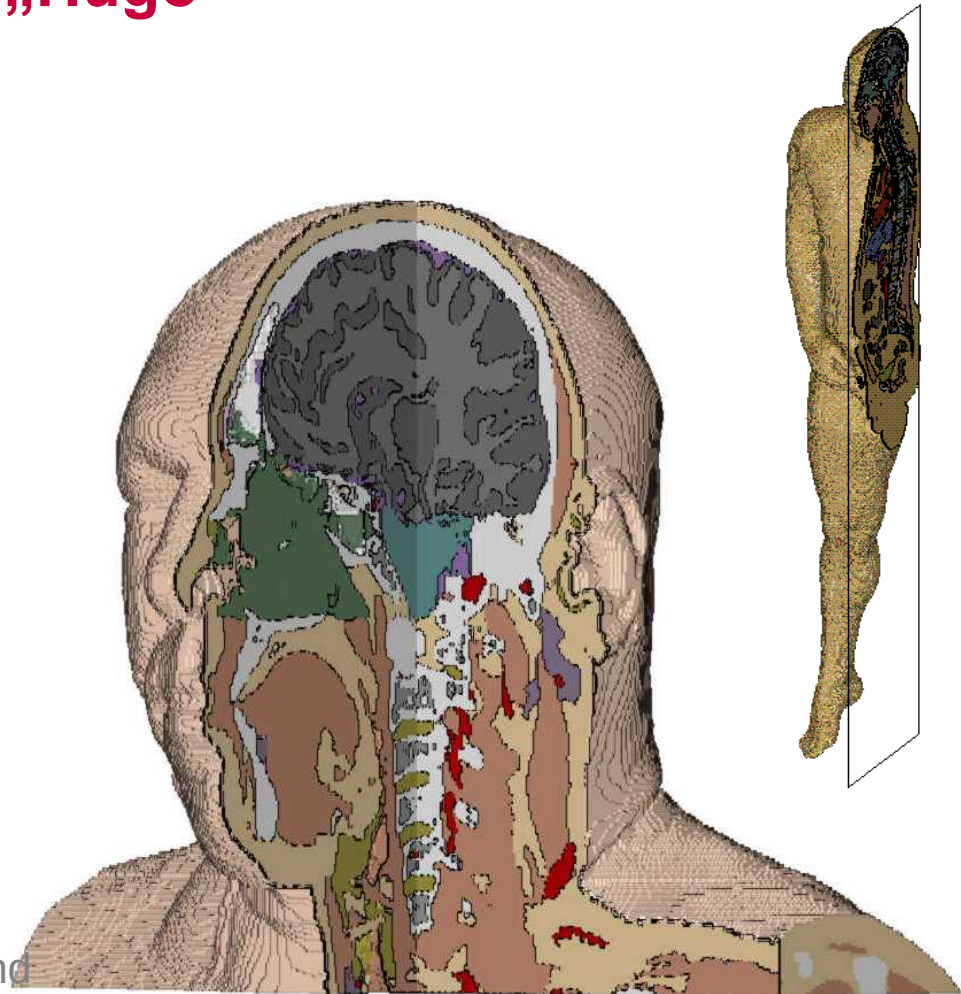
**32 Gewebetypen,
379 Mio. Voxel**

**Verschiedene Auflösungen
8x8x8 mm (0.7 Mb)**



1x1x1mm (371 Mb)

Anatomiemodell „HUGO“
VR Studio GmbH, Lörrach, Germany und
CST GmbH, Darmstadt, Germany



Quasistationäre Modellannahmen

Langsam veränderliche
elektromagnetische
Feldprobleme



Quasistationäre Felder

$$\text{diam}(\Omega) \ll \lambda_{\min}$$

Problem-
durchmesser

„kürzeste“
Wellenlänge

Statische
Felder

Keine Kopplung
der Maxwellgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

Elektro-Quasistatik

$$\text{diam}(\Omega) \ll \delta_e$$

Skintiefe

Keine induktiven
Effekte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \equiv 0$$

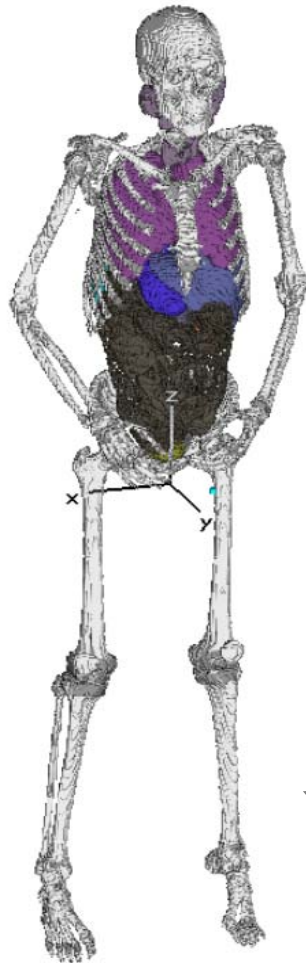
Magneto-Quasistatik:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right| \ll \left| \kappa \vec{E} + \vec{J}_S \right|$$

Keine Verschiebungs-
ströme (in Metallen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \equiv 0$$

Stationäre Ströme in Anatomiemodellen



Stationäre Strömungsfelder in
3D Voxel-Anatomiemodellen

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_K \mathbf{G} \Phi = -\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{j}}_e$$

➔ Lösung einer diskreten
Poisson-Gleichung

5 Gewebetypen,
1.3 Million Gitterzellen
(1 cm Kantenlänge)

„HUGO“:
bis zu 379.Mio Gitterzellen
(1 mm Kantenlänge)
~> 3 Gigabyte pro Vektor !

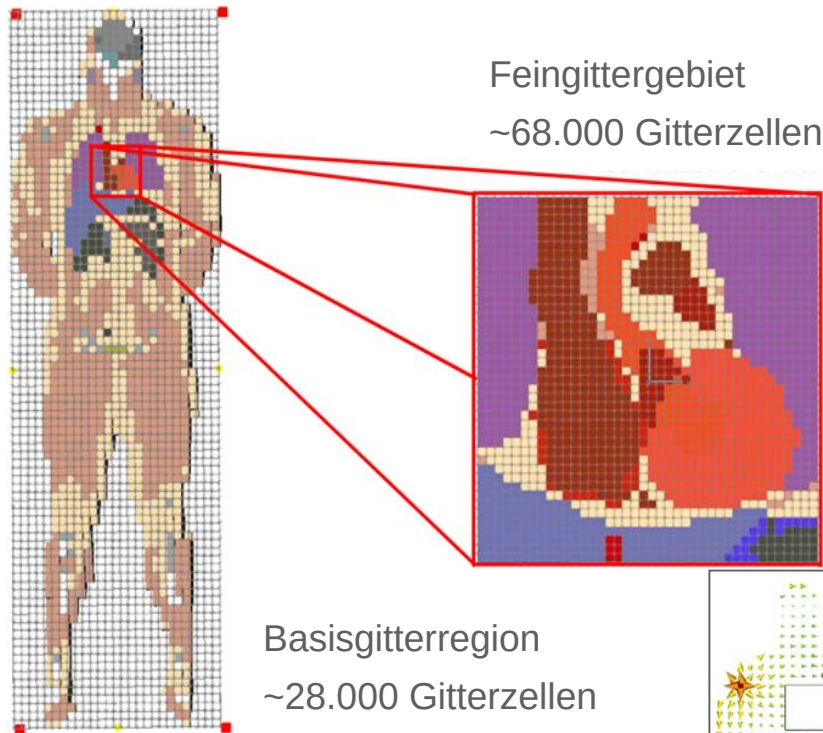


10 kV Potentialdifferenz
Kopf-Fuß

Feldberechnung in Anatomiemodellen

mit Untergitterregionen im Anatomiemodell

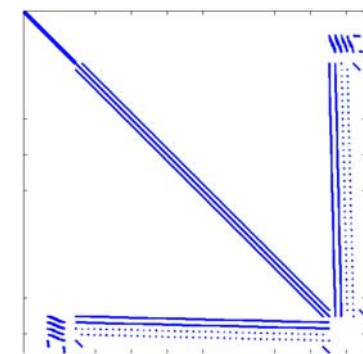
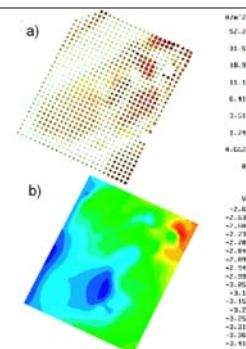
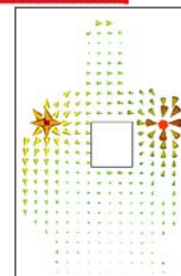
Interface-Bedingung: $\mathbf{B}\mathbf{Q}_H\boldsymbol{\Phi}_H + \mathbf{Q}_h\boldsymbol{\Phi}_h = 0$



Gemischtes System m. **Lagrange-Multiplikator** :

$$\begin{pmatrix} [\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\tilde{\mathbf{S}}^T]_H & 0 & \mathbf{Q}_H^T\mathbf{B}^T \\ 0 & [\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\tilde{\mathbf{S}}^T]_h & \mathbf{Q}_h^T \\ \mathbf{B}\mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_H \\ \boldsymbol{\Phi}_h \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_H \\ \mathbf{q}_h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit A. Barchanski, T. Steiner
TU Darmstadt, FG TEMF



Magnetische Feldexposition: Elektr. Haartrockner

Max. magn. Flussdichte auf der

Körperoberfläche: 551 μT

Nach Bundesamt für Strahlenschutz:

6 - 2000 μT bei 3 cm Abstand

0.01 – 7 μT bei 30 cm Abstand

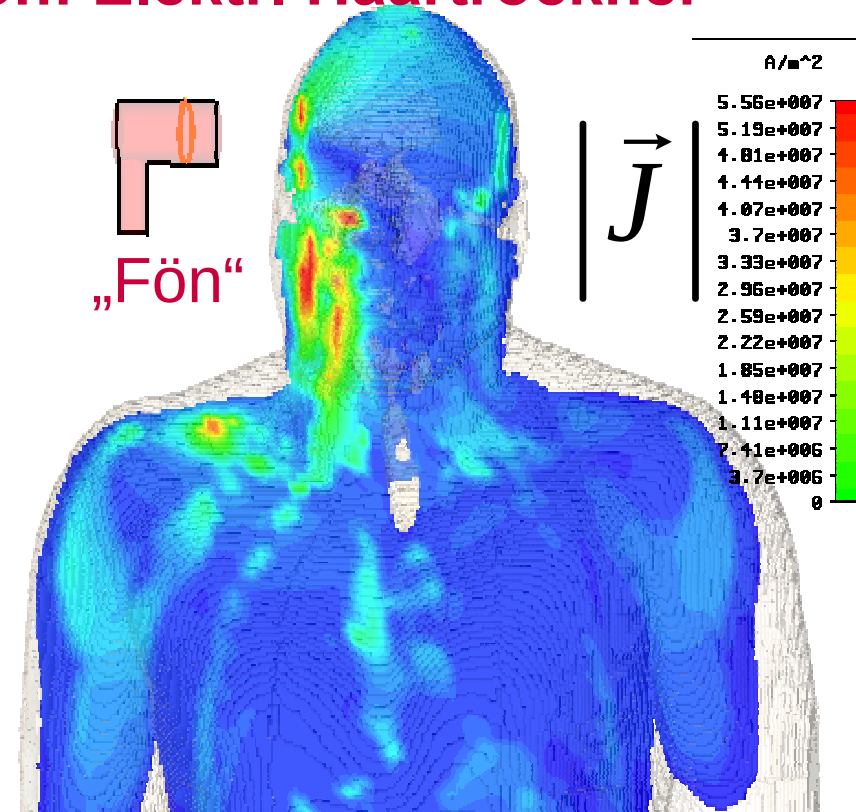
Modellauflösung ~4.2 – 5.0 mm

= 1.45 Mio Gitterzellen

= 4.35 Mio. Unbekannte

Speicherbedarf: 1.5 Gb

A.Barchanski, MC, TU Darmstadt, TEMF



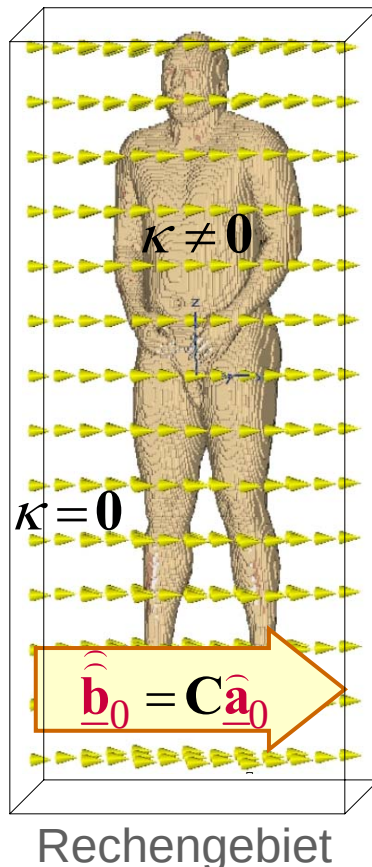
Elektrische Curl-Curl-Gleichung:

$$[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_\nu\mathbf{C} + i\omega\mathbf{M}_\kappa - \omega^2\mathbf{M}_\varepsilon]\hat{\mathbf{e}} = -i\omega\hat{\mathbf{j}}_s$$

Menschmodelle in Magnetfeldern: SPFD-Ansatz

Scalar-Potential-Finite-Difference-Ansatz

für statische und niederfrequente Felder (Stuchly-Dawson, Dimbylow):



$$\underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{A}}_0 - \nabla \Phi, \quad \underline{\vec{B}}_0 = \nabla \times \underline{\vec{A}}_0$$

Quasistatische Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{J}} = \nabla \cdot (\underline{\kappa} \underline{\vec{E}}) = 0$$

SPFD-Formulierung mit GMG:

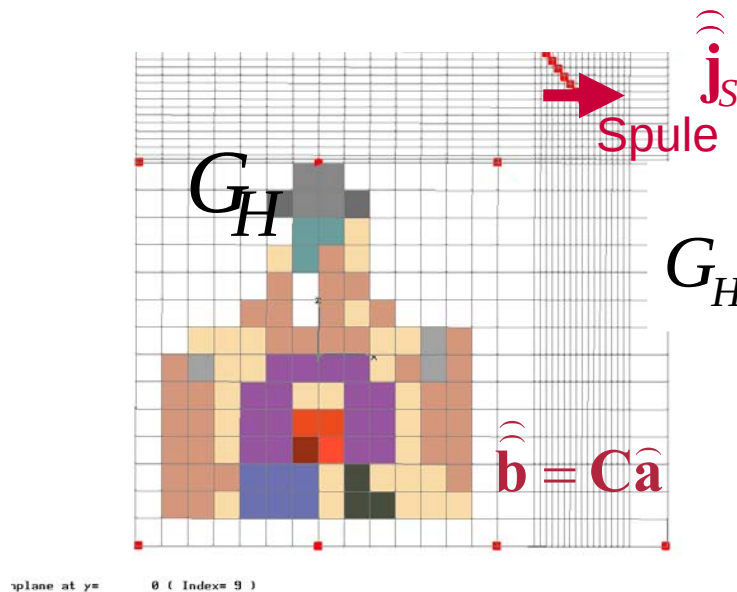
$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_K \mathbf{G} \Phi_{\text{Body}} = -i\omega \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_K \hat{\underline{a}}_0$$

= Inhomogene stationäre Strömungsfeldrechnung ohne Rückwirkung auf einfallendes Magnetfeld $\hat{\underline{b}}_0 = \mathbf{C}\hat{\underline{a}}_0$

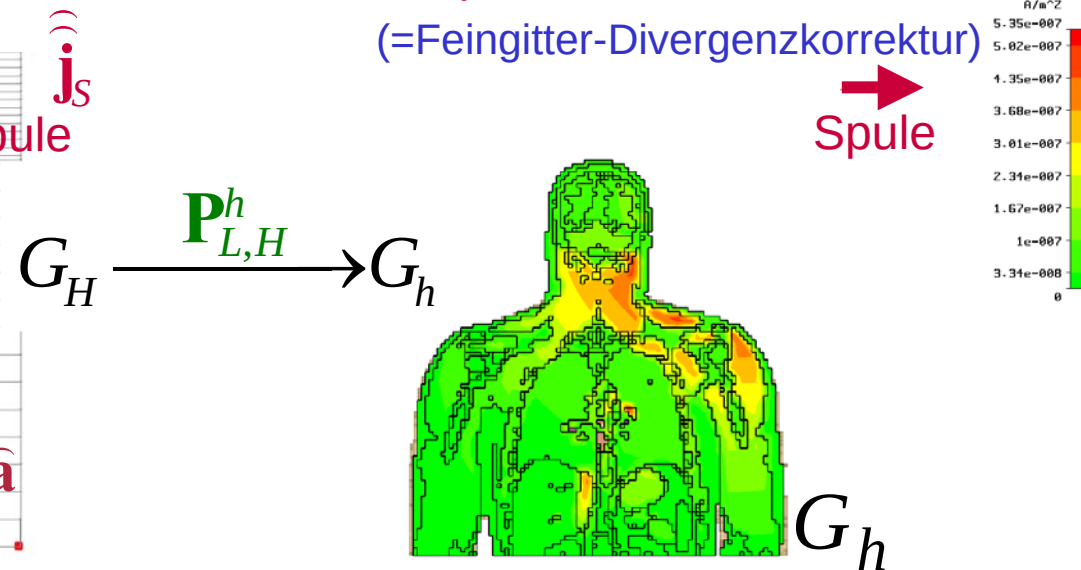
Mensch in Magnetfeldern: Extended SPFD

Erweiterter Scalar-Potential-Finite-Difference-Ansatz
für statische und niederfrequente Felder:

1. Berechnung des magnetischen
Feldes (Vektorpotentials)



2. Berechnung der elektrischen
Körperstromdichten
(=Feingitter-Divergenzkorrektur)



$$[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_V \mathbf{C} + \mathbf{M}_K \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{M}_N \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_K + i\omega \mathbf{M}_K]_H \hat{\mathbf{a}}_H = \hat{\mathbf{j}}_{S,H}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_K \hat{\mathbf{a}}_H = 0$$

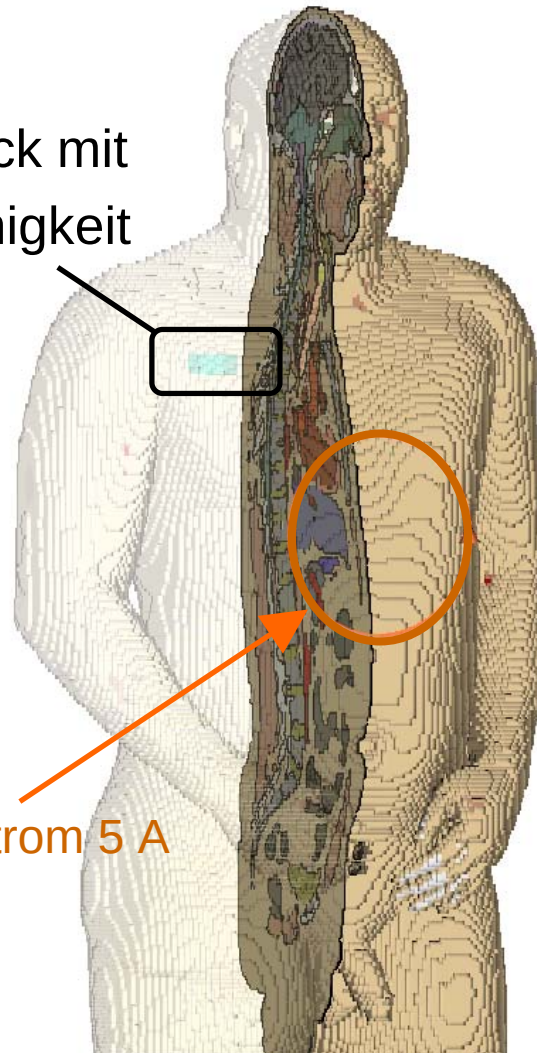
$$\tilde{\mathbf{S}}_h \mathbf{M}_{\kappa,h} \tilde{\mathbf{S}}_h^T \Phi_h = -\tilde{\mathbf{S}}_h \mathbf{M}_{\kappa,h} \mathbf{P}_{L,H}^h \hat{\mathbf{a}}_H$$

$$\hat{\mathbf{j}}_{C,h} = -i\omega \mathbf{M}_{\kappa,h} [\mathbf{P}_{L,H}^h \hat{\mathbf{a}}_H - \tilde{\mathbf{S}}_h^T \Phi_h]$$

Vergleich der Formulierungen

Testfall für die Extended-SPFD Formulierung

Metallblock mit
el. Leitfähigkeit
 $1\text{E}6 \text{ S/m}$



Spulenstrom 5 A

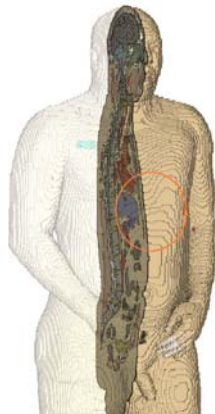
Elektrische Leitfähigkeit des
menschlichen Gewebes @ 50Hz:
 $0.4 \text{ S/m} - 1.6 \text{ S/m}$

Gittereigenschaften:

Gitterzellen: 507.224

Durchschnittl. Gitterweite: 7.35 mm

Vergleich der Formulierungen



Speicherbedarf:

Curl-Curl-Gl.: **3 Unb.** pro Knoten

Ex-SPFD: **1 Unb.** pro Knoten

Rel. Fehler (2-Norm)

Ex-SPFD: **0,01 %**

SPFD : 1,06 %

CPU-Zeit	Genauigkeit	Solver CPU Zeit*
Curl-Curl (Referenz)	1E-15	~ 47 h
Grobgridter Curl-Curl	1E-6	~5 min
SPFD	1E-9	~8 min
Ex-SPFD		<15 min

* 2x Intel Xeon 3.06 GHz CPU

Magnetische Feldexposition: Elektrische Heizdecke

Auflösung ~ 3.4 mm

= **9.3 Mio. Gitterzellen**

7 PC parallel (7 x Xeon 3.06GHz)

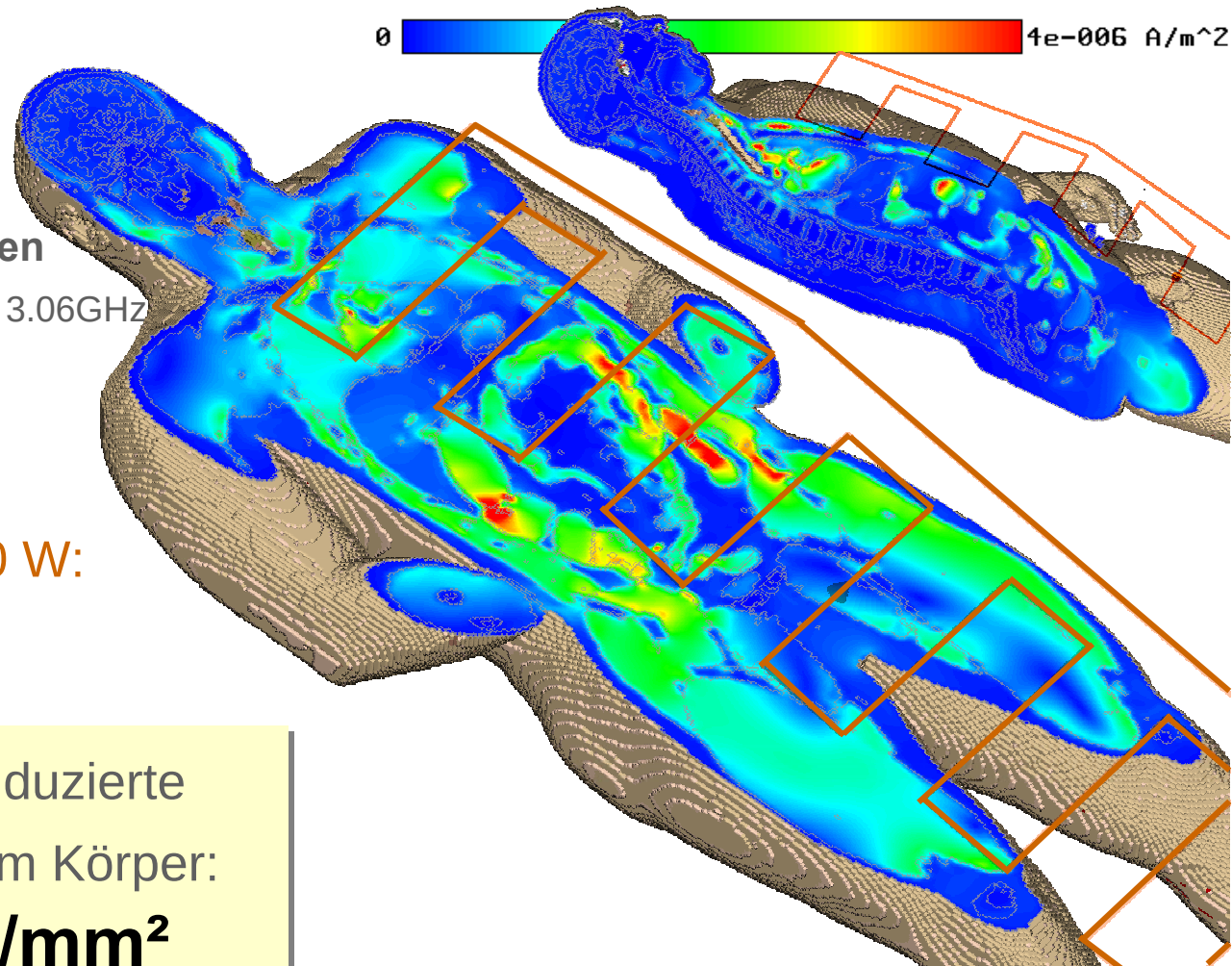
~ 30 min (mit PETSc)

Heizleistung 150 W:

→ 0,65 A Strom

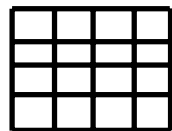
Maximale induzierte
Stromdichte im Körper:

10,6 $\mu\text{A}/\text{mm}^2$



Multigrid-Verfahren

Komponenten des Multigrid-Verfahrens: Löse $\mathbf{A}\mathbf{x}_h = \mathbf{b}_h$



Feingitter h

$$\mathbf{x}_h \xrightarrow{\text{„Glätter“}} \tilde{\mathbf{x}}_h \rightarrow \mathbf{d}_h := \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_h - \mathbf{b}_h \quad \hat{\mathbf{x}}_h := \tilde{\mathbf{x}}_h - \mathbf{e}_h \xrightarrow{\text{„Glätter“}} \mathbf{x}_h^{\text{neu}}$$

Defekt

Restriktion

$$\mathbf{d}_H := \mathbf{R}_h^H \mathbf{d}_h$$

Prolongation

$$\mathbf{e}_h := \mathbf{P}_H^h \mathbf{e}_H$$



Grobgrid H

$$\mathbf{d}_H \xrightarrow{\mathbf{A}_H \mathbf{e}_H = \mathbf{d}_H} \mathbf{e}_H \text{ Fehler}$$

Lösung der Defektgleichung

(exakt oder rekursiver MG-Aufruf)

Konstruktion der Grobgitter-Systemmatrizen

Elektrostatik

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = \rho$$

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G} \phi = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{A} :=$$

Magnetostatik

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \mathbf{a} = \mathbf{j}$$

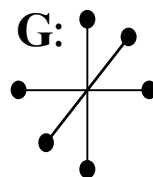
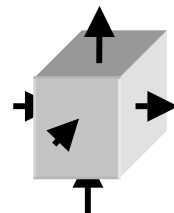
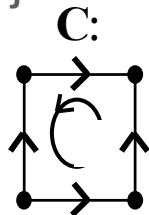
$$\mathbf{A} :=$$

Universell gültig:

$$\mathbf{A}_h := f(\mathbf{C}_h, \mathbf{S}_h, \mathbf{G}_h, \mathbf{M}_{\varepsilon,h}, \mathbf{M}_{\nu,h}, \mathbf{M}_{\sigma,h})$$

Inzidenz-Matrizen

Implizit verfügbar auf
jedem Gitterlevel h



Material-Matrizen

Für jede Gitterauflösung h neue
FIT-Matrizen

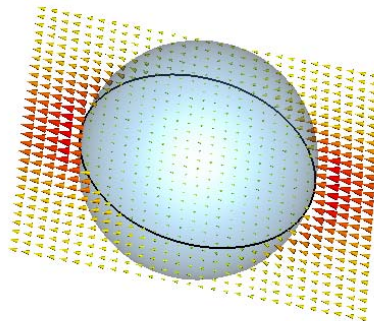
Oder: Algebraische Konstruktion
mit Galerkin-Projektion

$$\mathbf{M}_{x,H} := \mathbf{R}_H^h \mathbf{M}_{x,h} \mathbf{P}_H^h$$

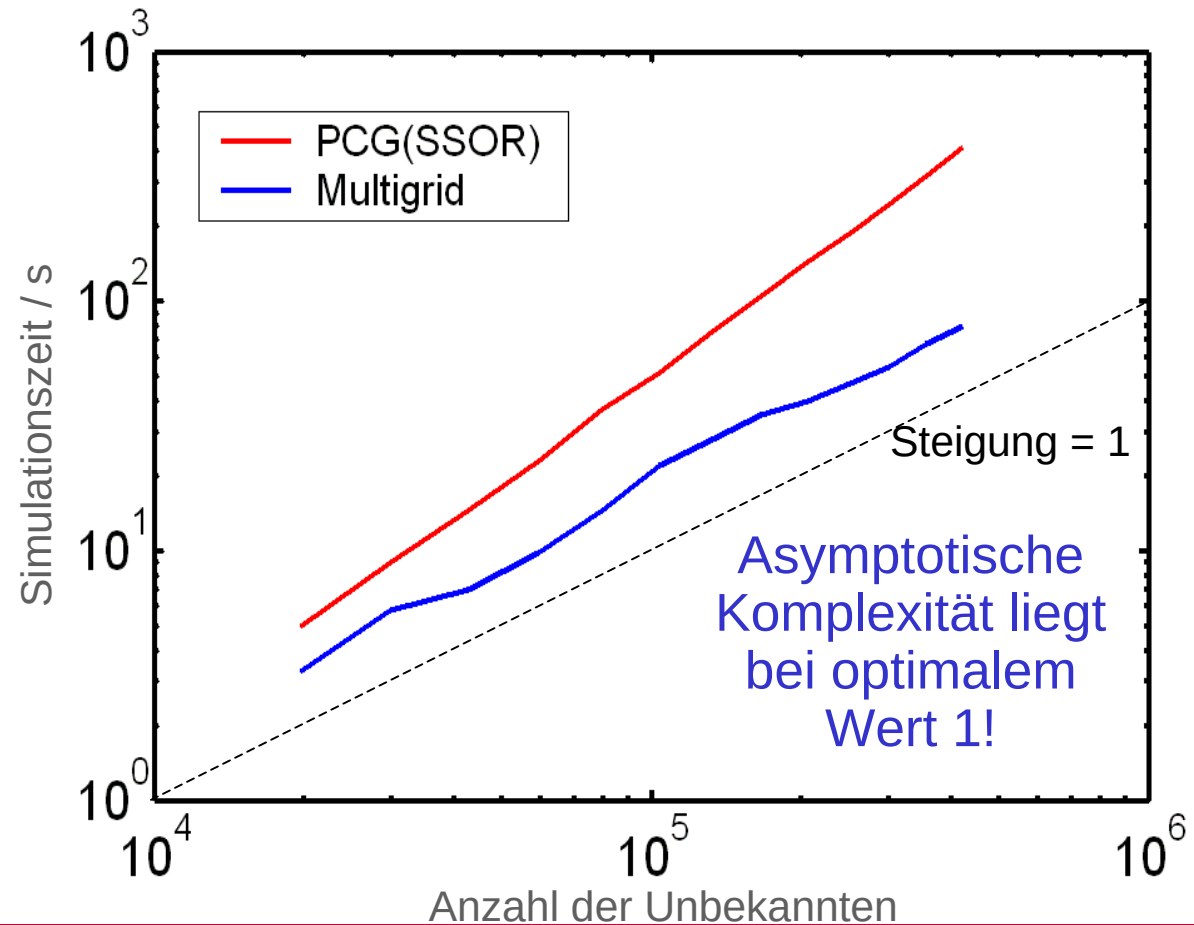
Geometrische Multigrid-Verfahren

Beispiel: Diskrete Elektrostatik mit $-\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\mathbf{G}\Phi = \mathbf{q}$

Dielektrischer Ball
im Plattenkondensator-
feld



Lösung durch
geometrisches
Mehrgitter-Verfahren
(V-Zyklus, GS-Glätter)



In Kooperation mit Stefan Feigh, TU Darmstadt, FG TEMF

Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

Transiente Magnetfelder

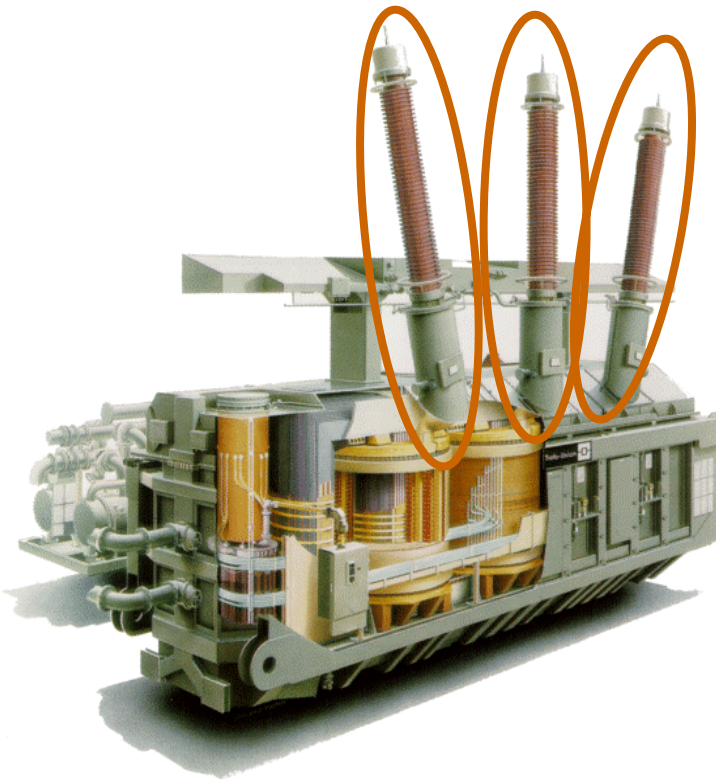
Simulation hochfrequenter Felder

Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

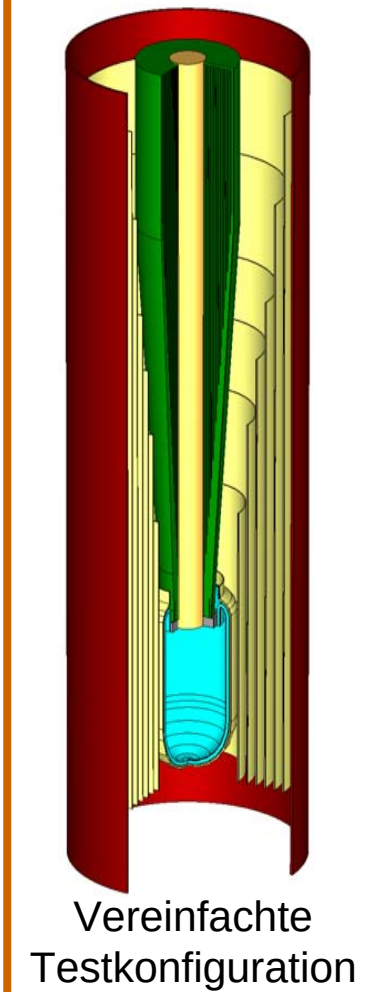
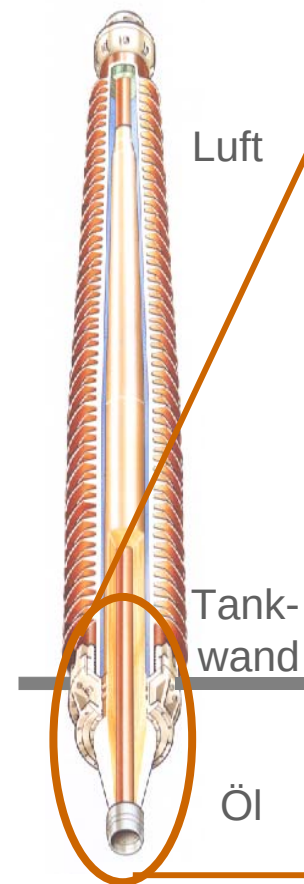
Hochspannungsdurchführungen

Transformator



Bilder: SIEMENS

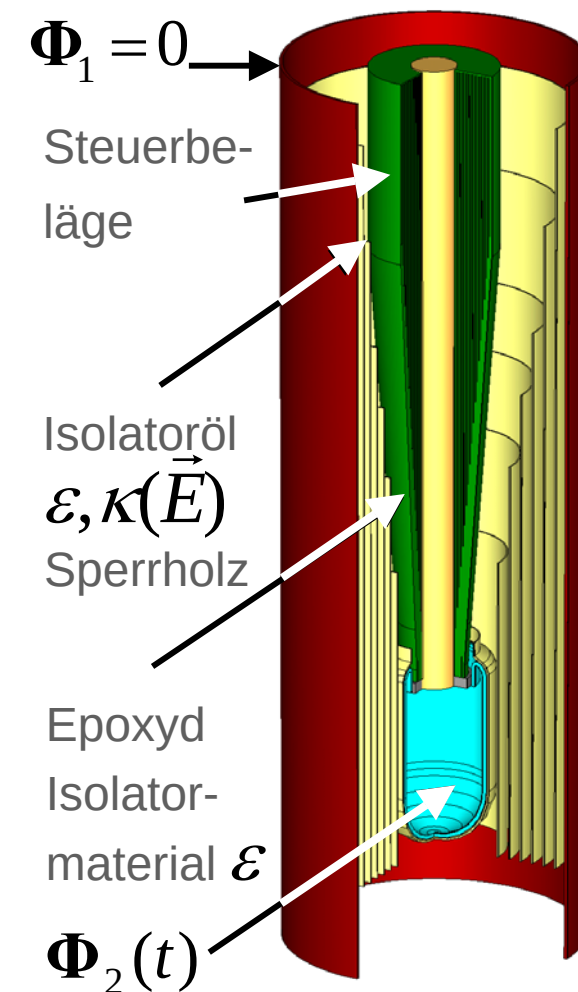
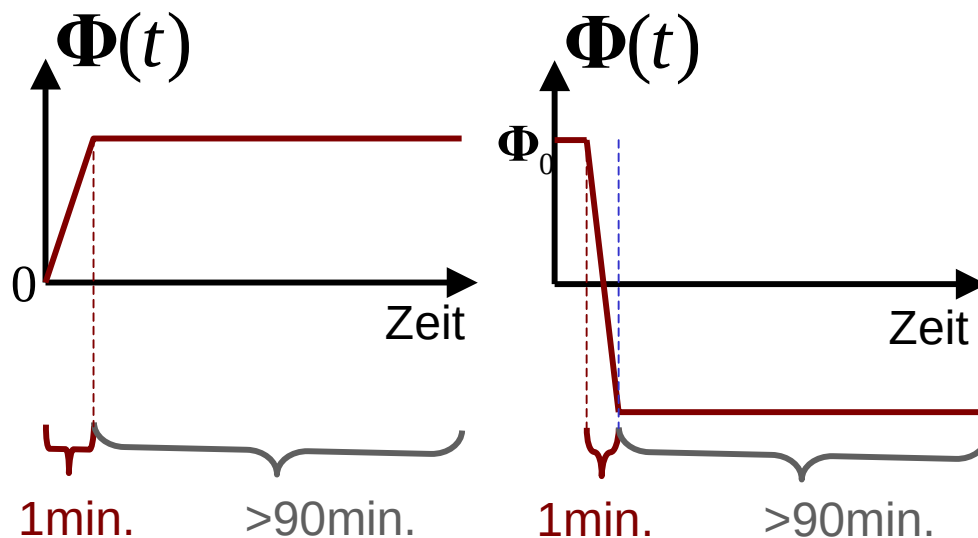
Durchführung



Transiente Hochspannungsfelder

Hochspannungsdurchführungen:

Transiente **Anschalt-** und **Polaritätsumkehr-**
Prozesse



Quasistationäre Annahmen

Langsam veränderliche
elektromagnetische
Feldprobleme



Quasistationäre Felder

$$\text{diam}(\Omega) \ll \lambda_{\min}$$

Problem-
durchmesser

„kürzeste“
Wellenlänge

Statische
Felder

Keine Kopplung
der Maxwellgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

Elektro-Quasistatik

$$\text{diam}(\Omega) \ll \delta_e$$

Skintiefe

Keine induktiven
Effekte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \equiv 0$$

Magneto-Quasistatik:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right| \ll \left| \kappa \vec{E} + \vec{J}_S \right|$$

Keine Verschiebungs-
ströme (in Metallen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \equiv 0$$

Transiente Elektroquasistatische Felder

Kontinuierliches Anfangs-/Randwertproblem:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \frac{d}{dt} \Phi(t)) + \nabla \cdot (\kappa \nabla \Phi(t)) = 0, \quad \text{Partielle Diff. Gl.}$$

$$\Phi_0 := \Phi(t_0), \quad \text{Anfangswert für } t_0$$

$$\Phi(t)|_{\Gamma_D} := g(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma_N} := 0 \quad \text{Randwerte für } H_D, H_N$$

Räumlich diskretisiertes Anfangs-/Randwertproblem:

FIT

$$\mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$
$$\mathbf{x}(t_0) := \mathbf{x}_0$$

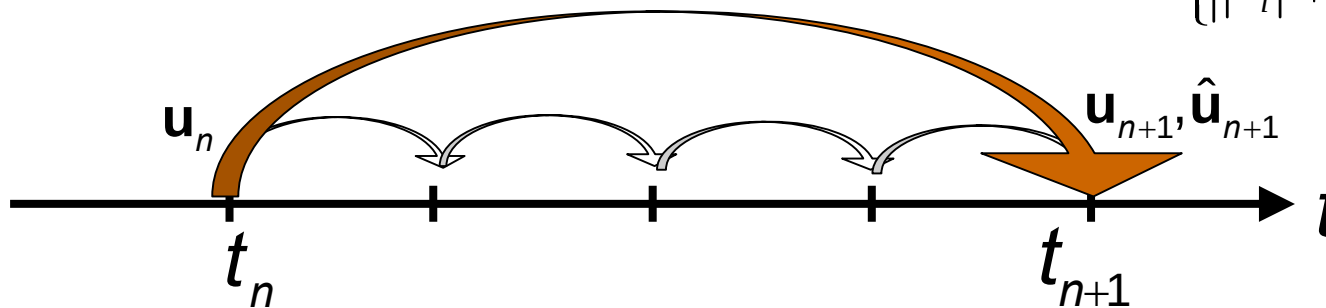
Steifes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

Elektro-Quasistatik: Zeitintegrationsverfahren

Eingebettete implizite Runge-Kutta Methoden

- **s**-stufige **Einschritt**-Methoden
- **Verfahren p -ter Ordnung** mit eingebettetem Verfahren $\hat{p}$ -ter Ordnung
- Beide Lösungen sind “steifgenau” (d.h. beide sind L-stabil)
- Zeitschrittkontrolle aus normierter Differenz der Lösungen

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{\text{err}} = \max_i \left\{ \left| \frac{u_i - \hat{u}_i}{|u_i| + \text{atol}} \right| \right\}$$



Linear-implizite Verfahren

- **Lineare Stufenlösungen**
- **Komplexe Einbindung von Randbedingungen**

Animation einer Zeitbereichssimulation

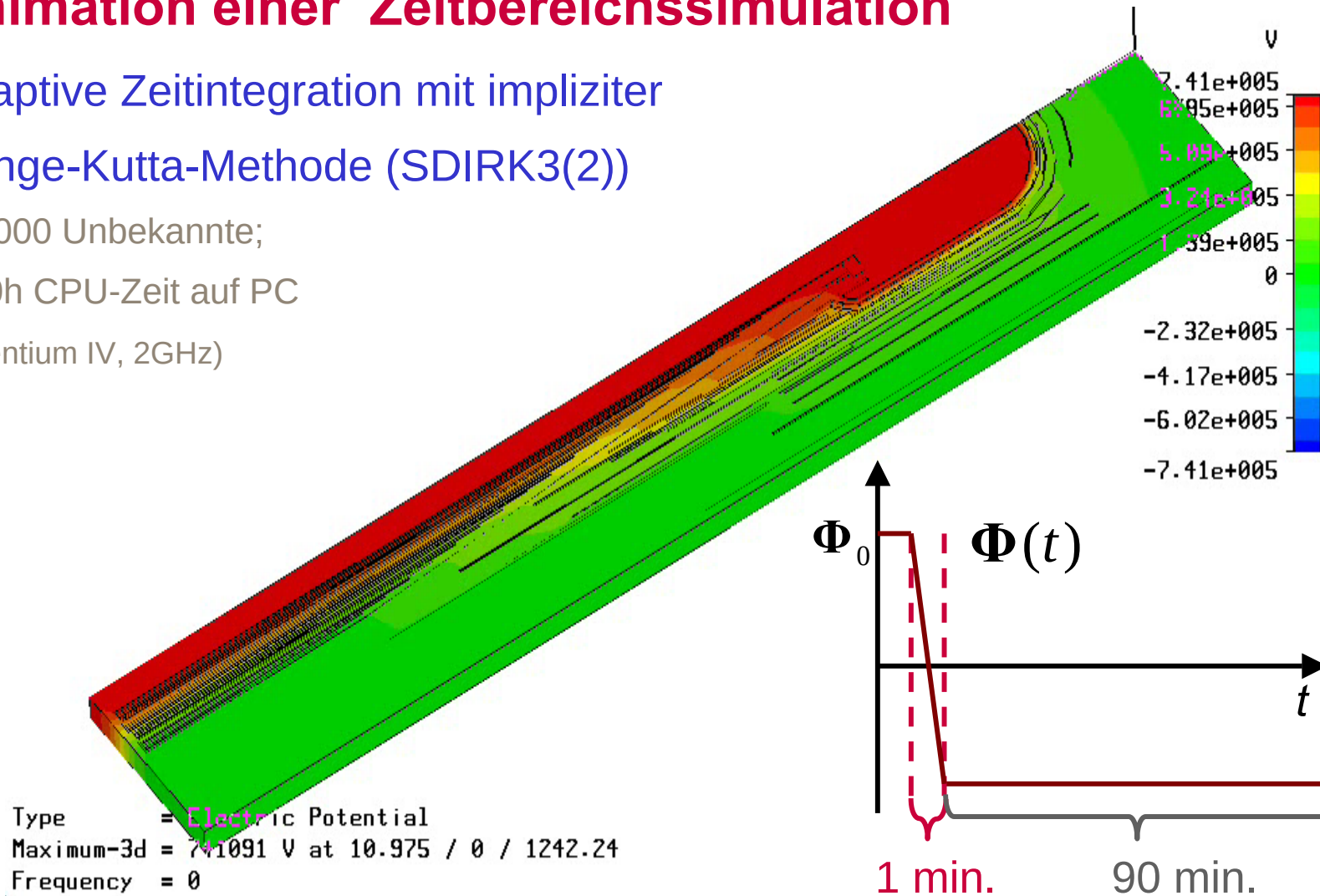
Adaptive Zeitintegration mit impliziter

Runge-Kutta-Methode (SDIRK3(2))

80.000 Unbekannte;

<10h CPU-Zeit auf PC

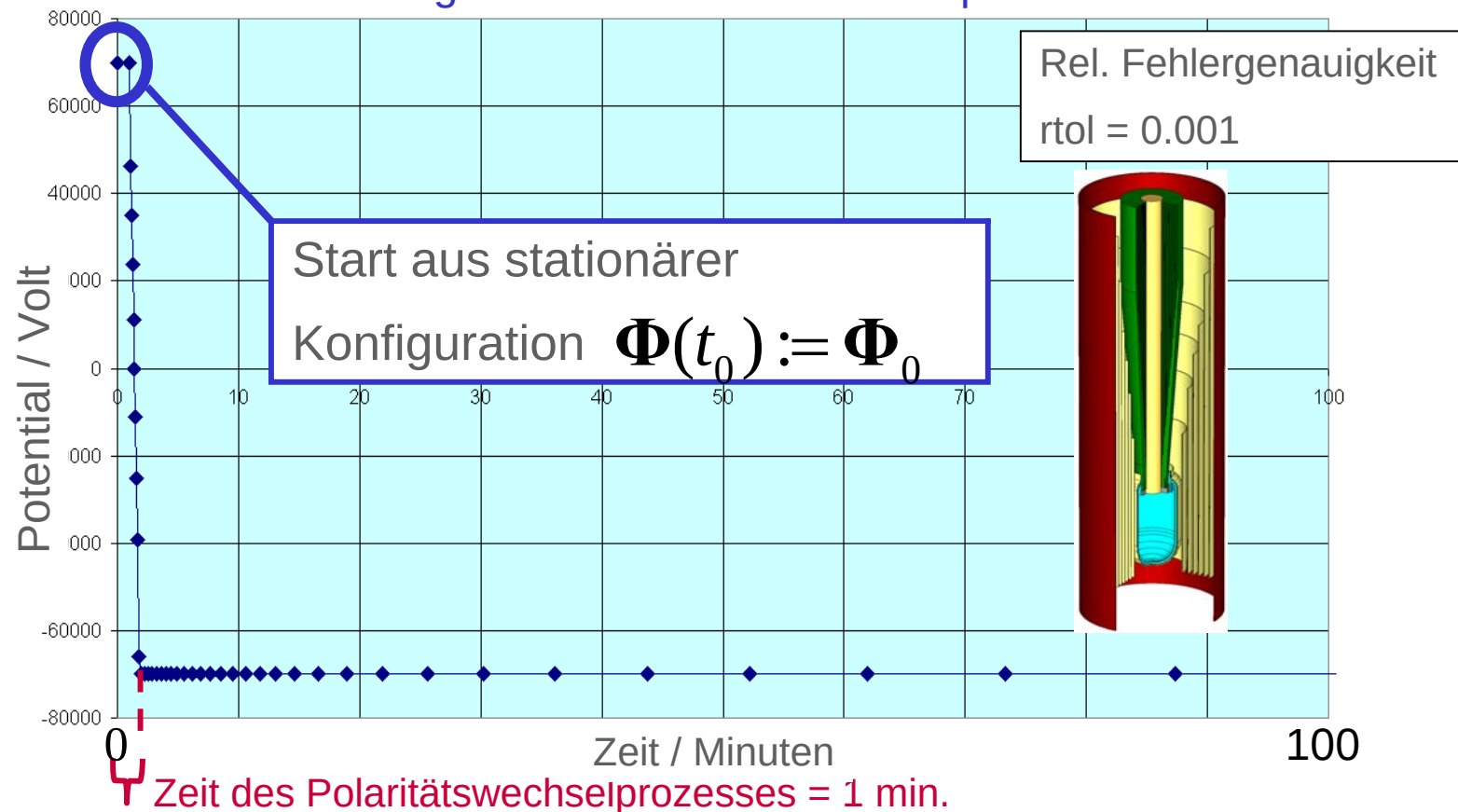
(Pentium IV, 2GHz)



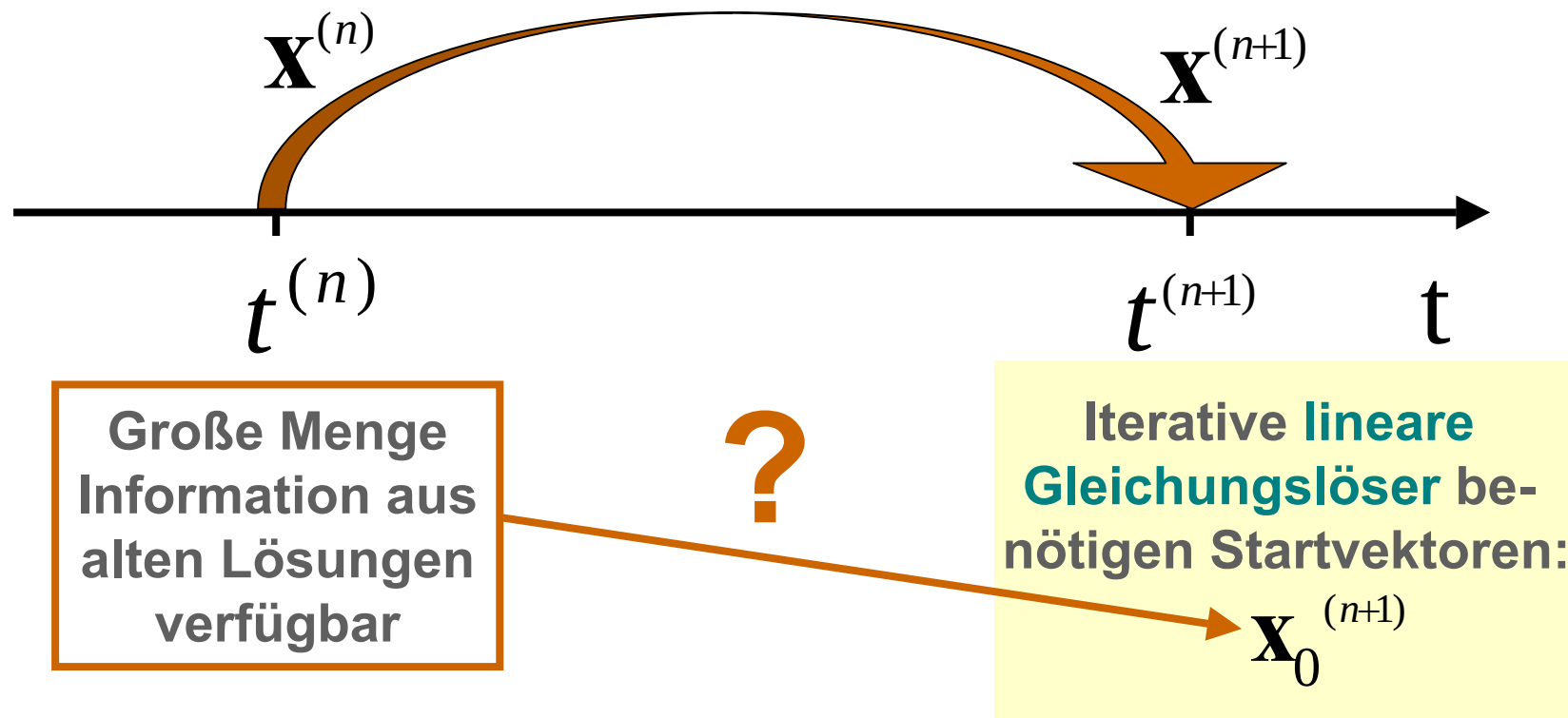
Adaptive Zeitintegration

Fehlergesteuerte Zeitschritt-Adaptive Zeitintegration

= Automatisches Abtastung des Polarisationsumkehrprozesses



Effiziente implizite Zeitintegration mit Extrapolation



Sind mehrere Startvektoren sind verfügbar:

Subspace Projection Extrapolation!

Subspace Projection Extrapolation

Für jeden Zeitschritt: Mehrere Startvektoren $\mathbf{x}_{0,i}$ für iterative Lösung der
($\mathbf{M}$ sei spd.) linearen algebraischen Systeme $\mathbf{M}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ verfügbar

$$\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,m} \longrightarrow \mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_l\}$$

G.S.-Orthonormalization

Löse das Galerkin-projezierte neue System:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} \quad (\text{Lineares System kleiner Dimension } l)$$

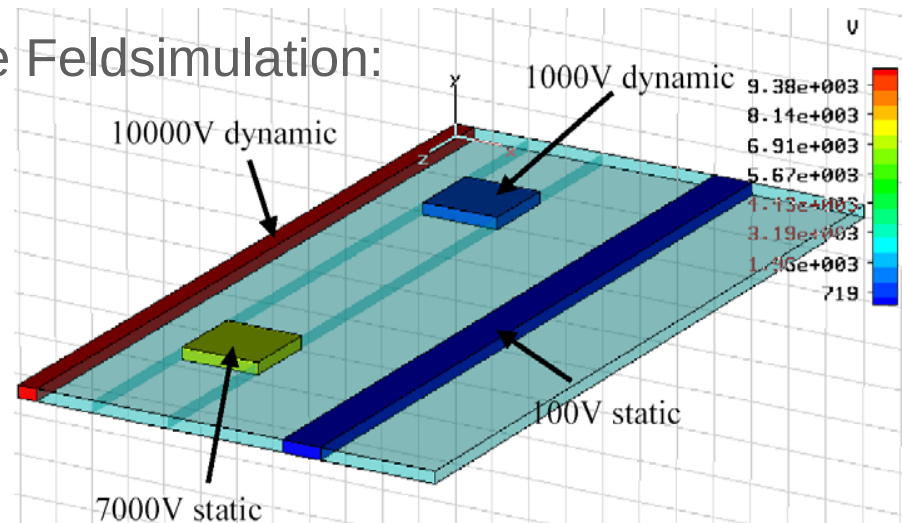
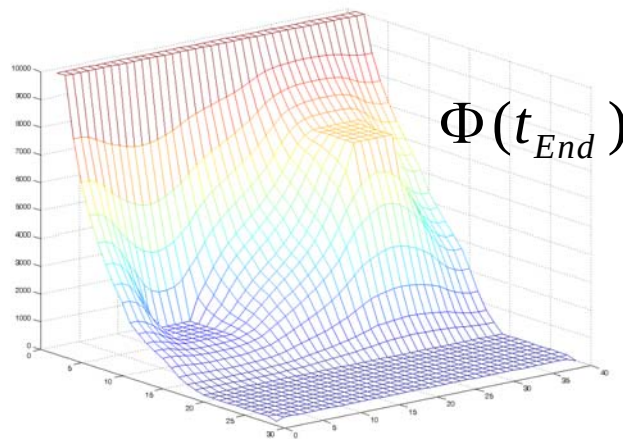
$$\mathbf{x}_0^{\text{SPE}} := \mathbf{V} \mathbf{z}$$

Subspace Projection Extrapolation (SPE) konstruiert die optimale Linearkombination der Startvektoren für den iterativen Gleichungssystemlöser



Startwert Generatierung in EQS-Feldsimulationen

Transiente elektroquasistatische Feldsimulation:



SDiRK3(2)
(adaptive
Zeitschritte)

a) Taylor 0: $\mathbf{x}_0^{(n+1)} := \mathbf{0}$

5260

b) Taylor 1: $\mathbf{x}_0^{(n+1)} := \mathbf{x}^{(n)}$

3049

c) SPE (alte Stufenlösungen l = 5 - 8)

386

In Kooperation mit
G. Benderskaya
S. Feigh, TUD

Gesamtzahl der Matrix-Vektor-Multiplikationen (MxV)

Schwebende Potentiale I

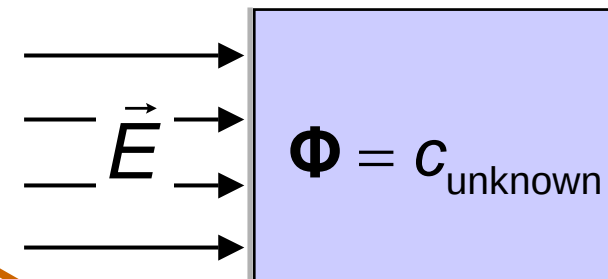
“Floating Potential” = Körper mit unbekanntem Potential:

- Passive, (metallisch) leitende Bauteile sind feldfrei
- Gleiche Knotenpotentiale:

$$\phi_{\text{slv}_1} - \phi_{\text{mst}} = 0 \quad \phi_{\text{slv}_2} - \phi_{\text{mst}} = 0 \quad \dots$$

Algebr. Bedingung $\mathbf{B}\Phi = 0 \Rightarrow$ Lagrange Multiplikator

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

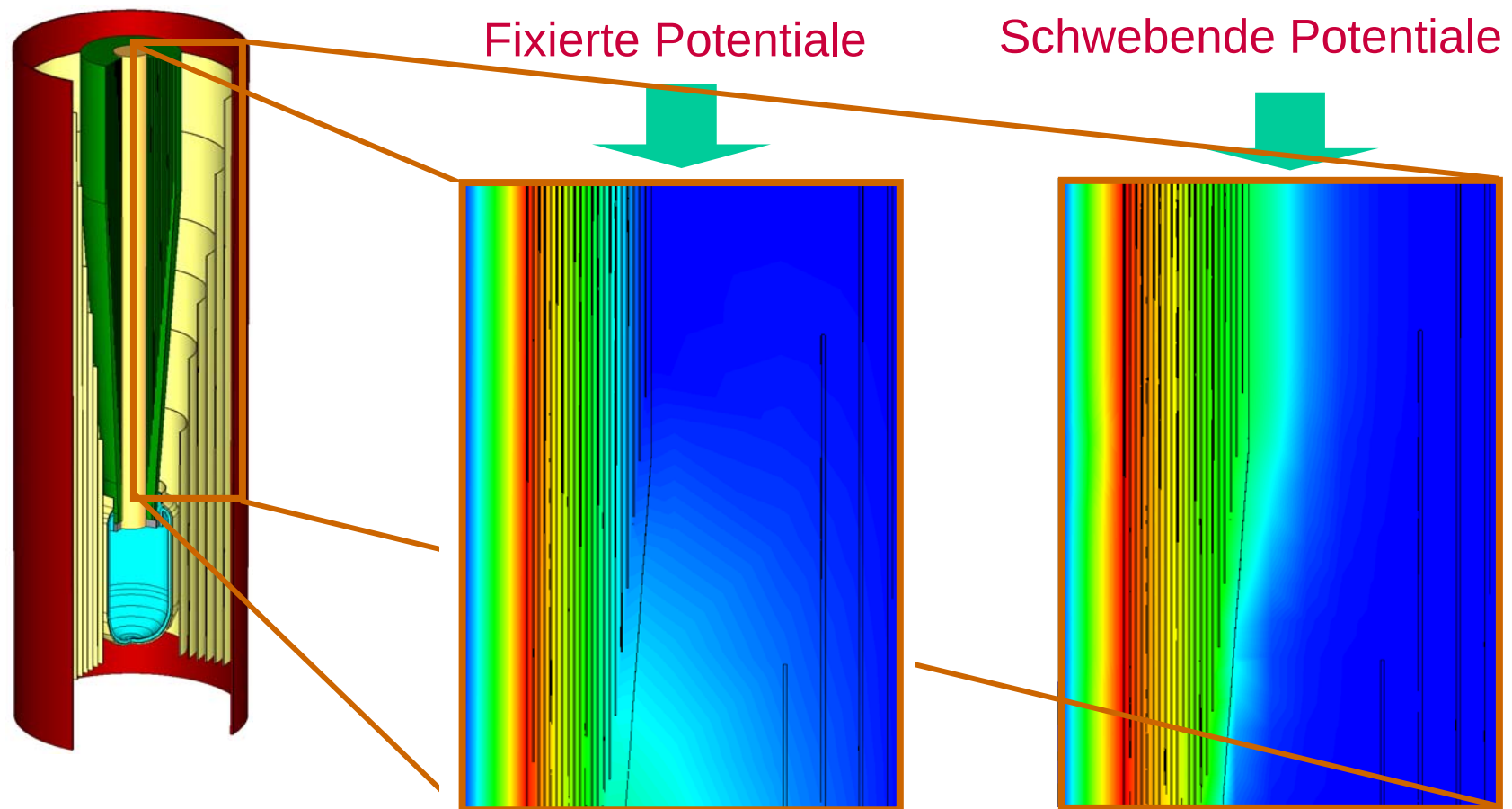


$q_F = ?$



Schwebende Potentiale II

Potentialverteilung in HV-Durchführung:



Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

Transiente Magnetfelder

Simulation hochfrequenter Felder

Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

Quasistationäre Annahmen

Langsam veränderliche
elektromagnetische
Feldprobleme



Quasistationäre Felder

$$\text{diam}(\Omega) \ll \lambda_{\min}$$

Problem-
durchmesser

„kürzeste“
Wellenlänge

Statische
Felder

Keine Kopplung
der Maxwellgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

Elektro-Quasistatik

$$\text{diam}(\Omega) \ll \delta_e$$

Skin depth

Keine induktiven
Effekte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \equiv 0$$

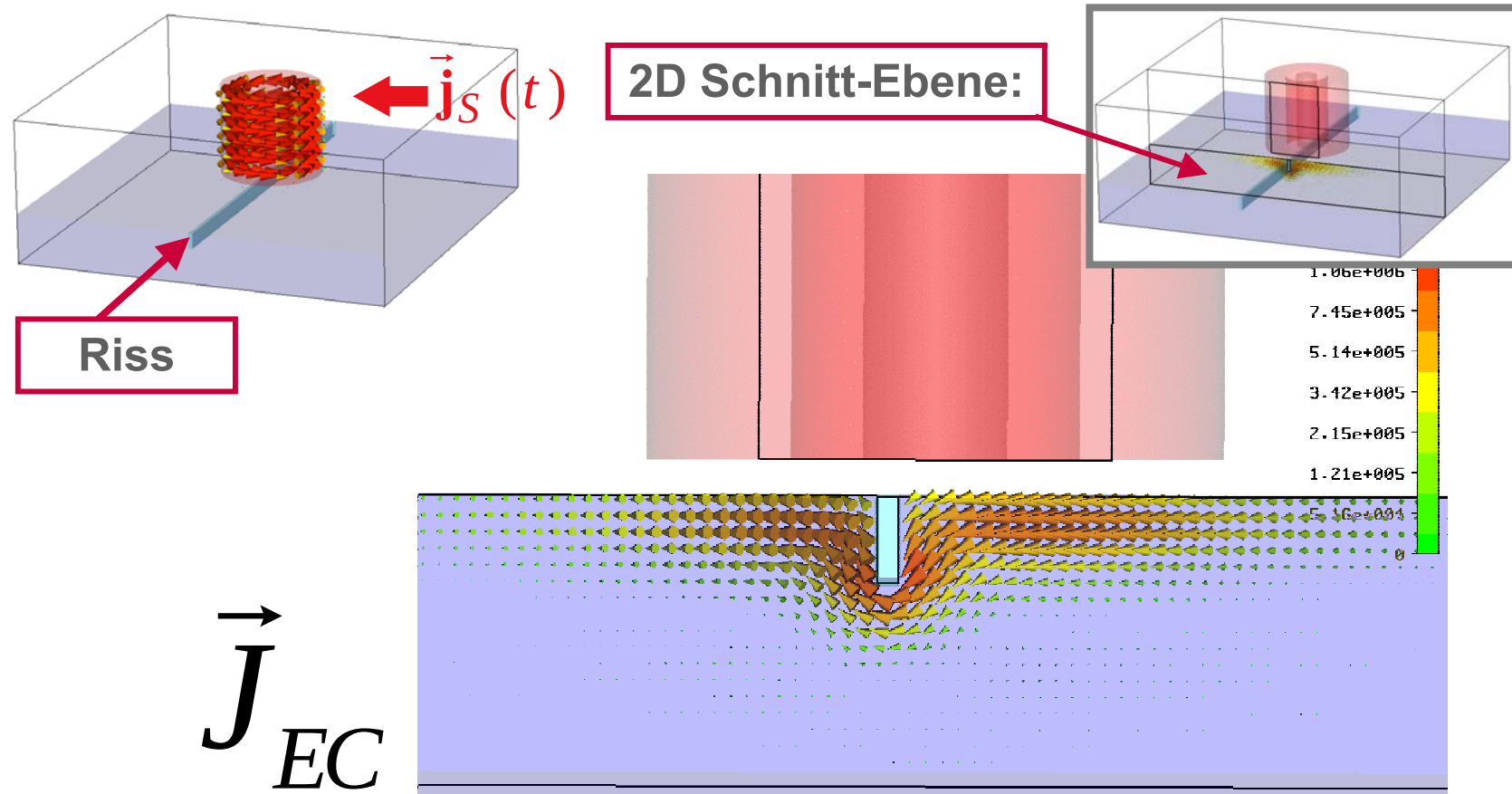
Magneto-Quasistatik:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right| \ll \left| \kappa \vec{E} + \vec{J}_S \right|$$

Keine Verschiebungs-
ströme (in Metallen)

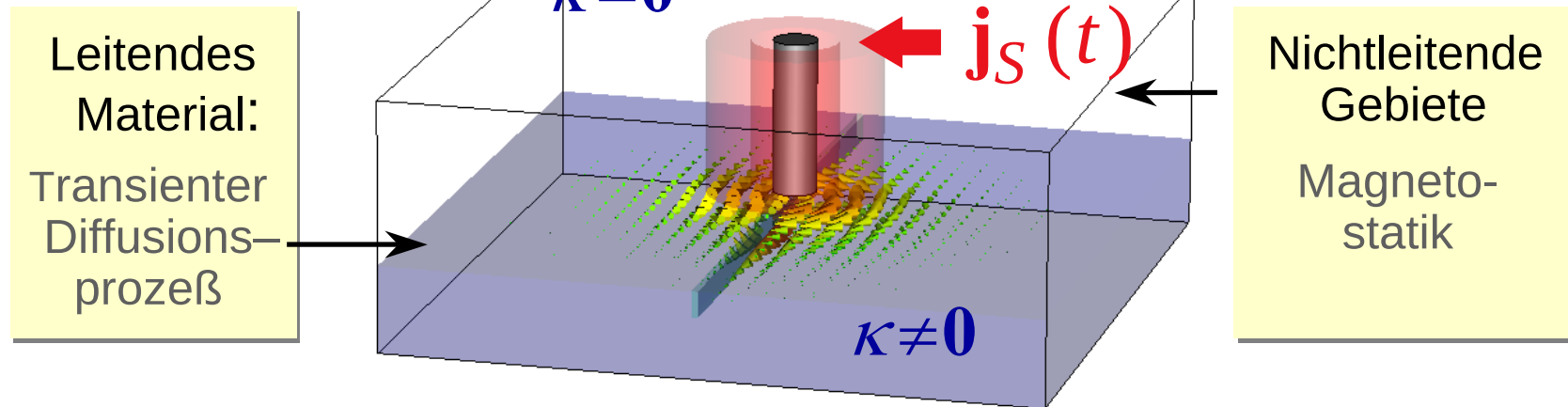
$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \equiv 0$$

Wirbelströme in Leiterplatte mit Riss



Magneto-Quasistatik: Die A^* -Formulierung

Wirbelstromprobleme:



Modifiziertes magn. Vektorpotential $\vec{A}^* = -\int \vec{E} \cdot d\vec{t}$, $\hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}$

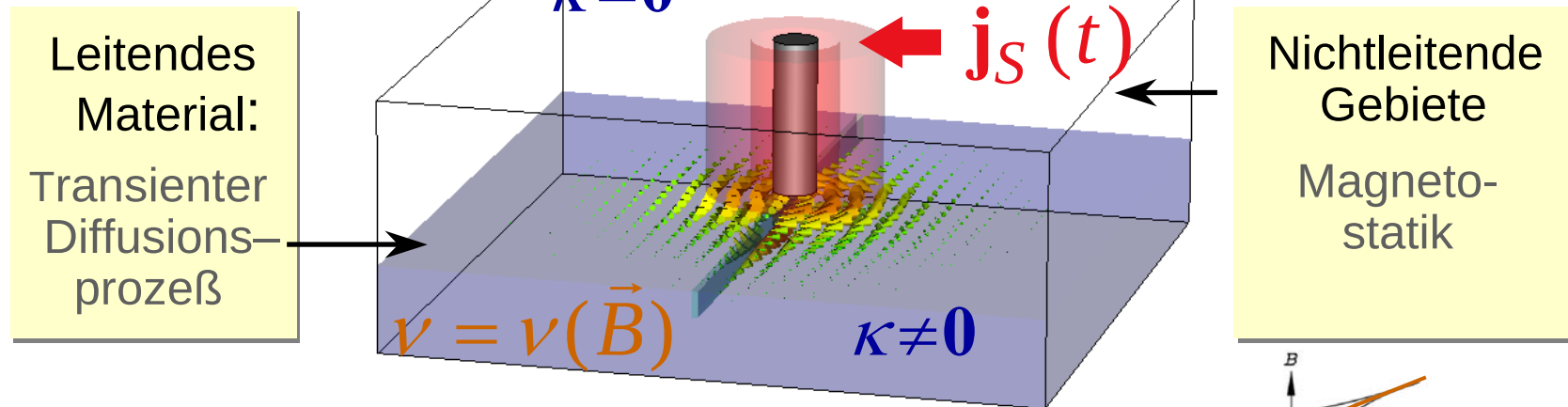
$$\mathbf{M}_\kappa \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_s(t)$$

+ zusätzliche Regularisierung („Eichung“)

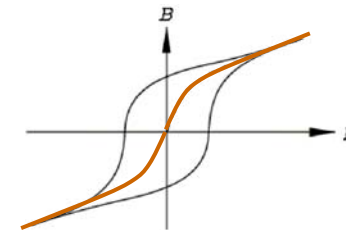
“System differential-algebraischer
Gleichungen vom Index 1”

Magneto-Quasistatik: Nichtlineare Materialien

Wirbelstromprobleme:



Ferromagn. Materialien: $\nu = \nu(\vec{B}) = \nu(\nabla \times \vec{A}^*)$

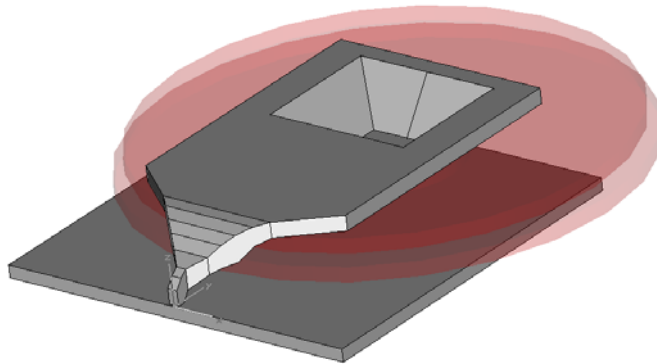


$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{r}(t)$$

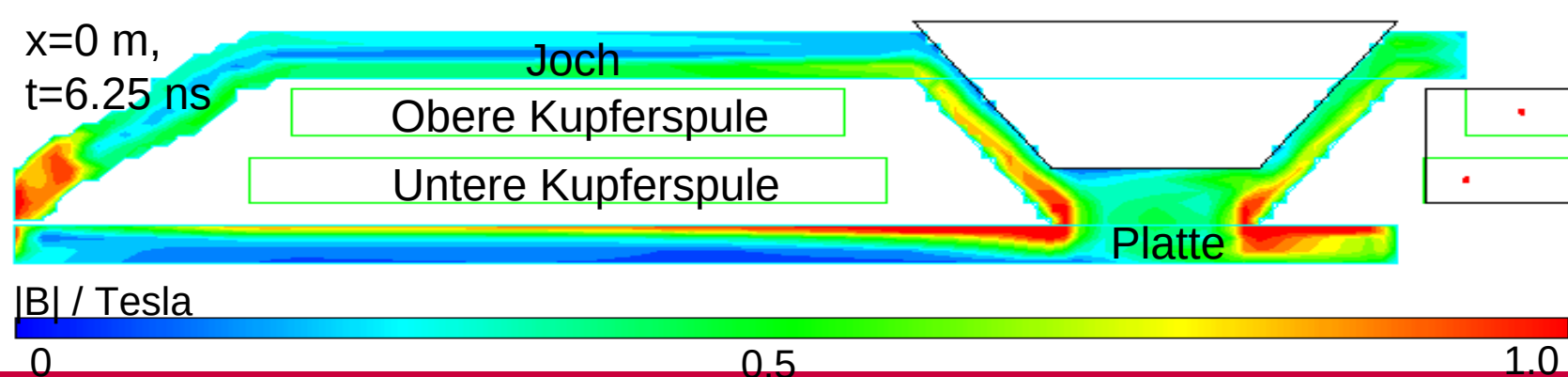
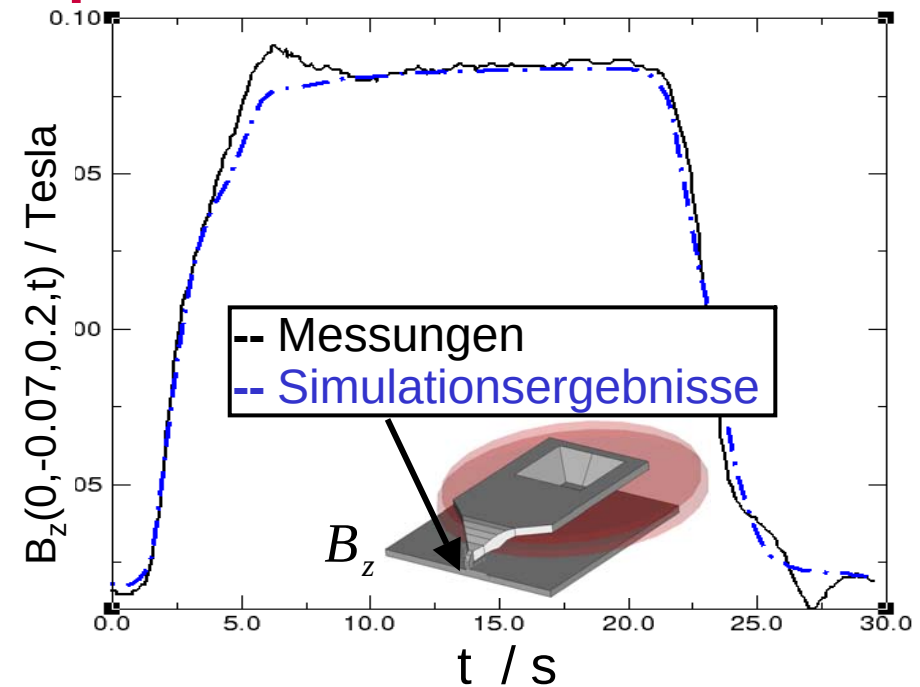
Nichtlineares System

differential-algebraischer Gleichungen vom Index 1

Festplatten Lese-/Schreibkopf: Transiente Simulation

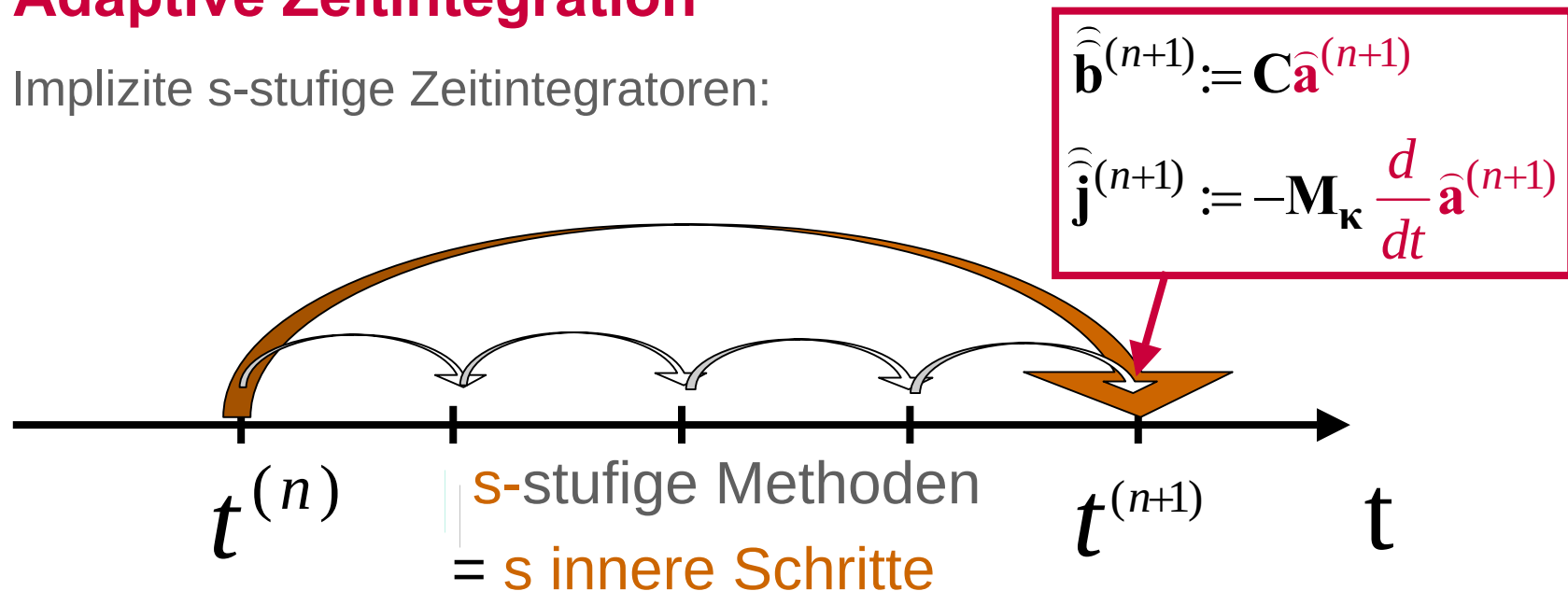


Magnetische Festplatten-Lese-/
Schreibkopf:
Sättigungseffekte an Spitze und
Joch-/Bodenplatten-Kontakt



Adaptive Zeitintegration

Implizite s-stufige Zeitintegratoren:



Methode mit Ordnung p mit eingebettetem Ordnung $\hat{p}$ -Verfahren:

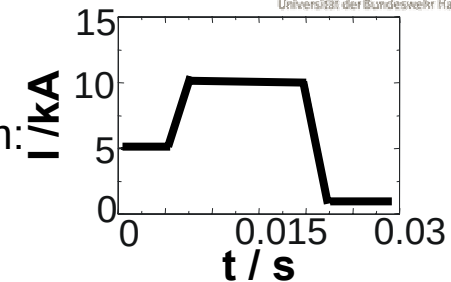
Fehlerkriterium aus Differenz der Lösungen:

$$\hat{\mathbf{y}}_{Error} := \hat{\mathbf{a}}^{(p)} - \hat{\mathbf{a}}^{(\hat{p})}, \quad (\hat{p} < p)$$

Adaptive Zeitschrittweiten-Selektion

Nichtlineares Wirbelstromtestproblem

Spulenstrom:



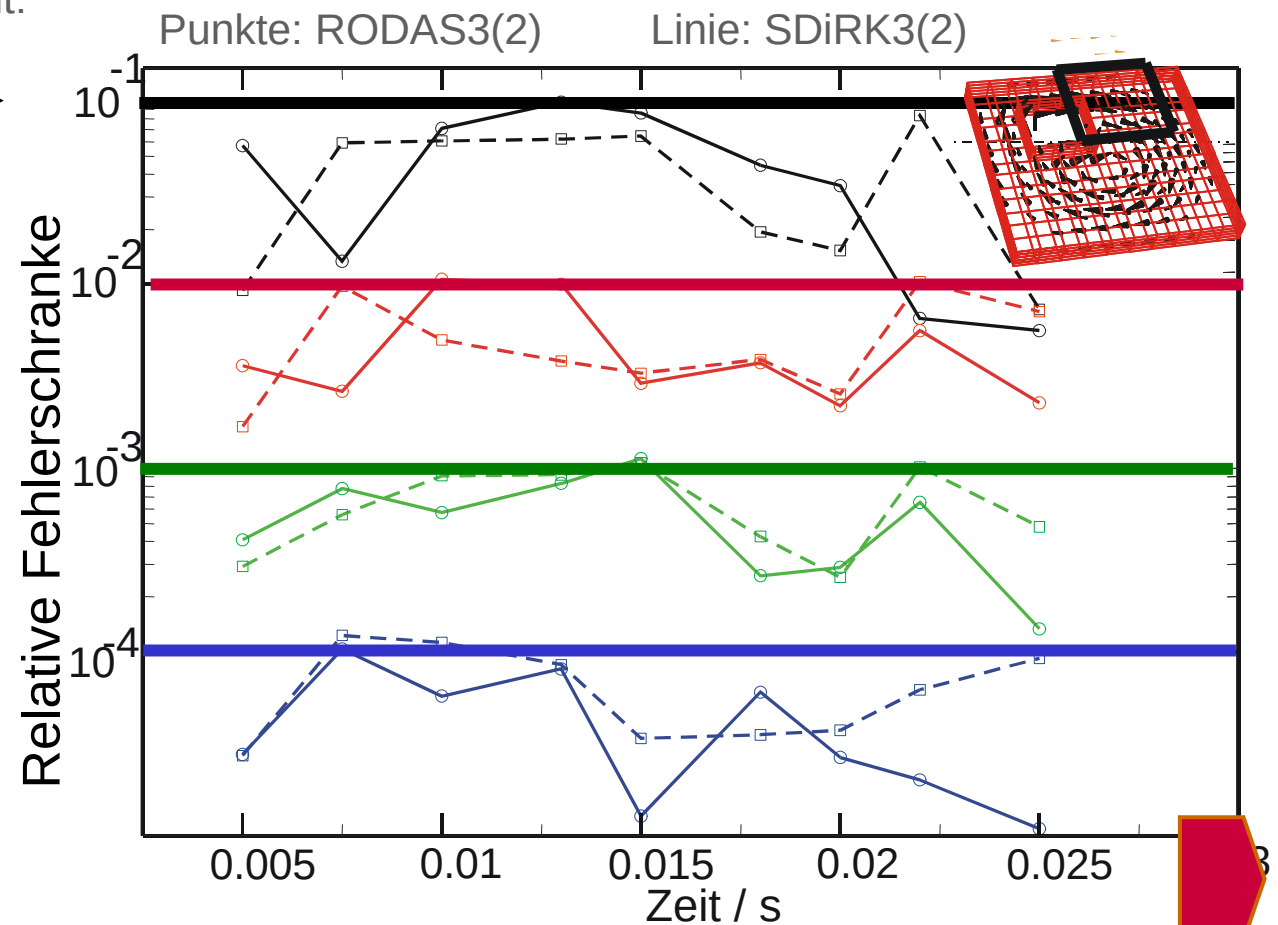
User-definierte Genauigkeit:

$rtol = 10^{-1}$ →

$rtol = 10^{-2}$ →

$rtol = 10^{-3}$ →

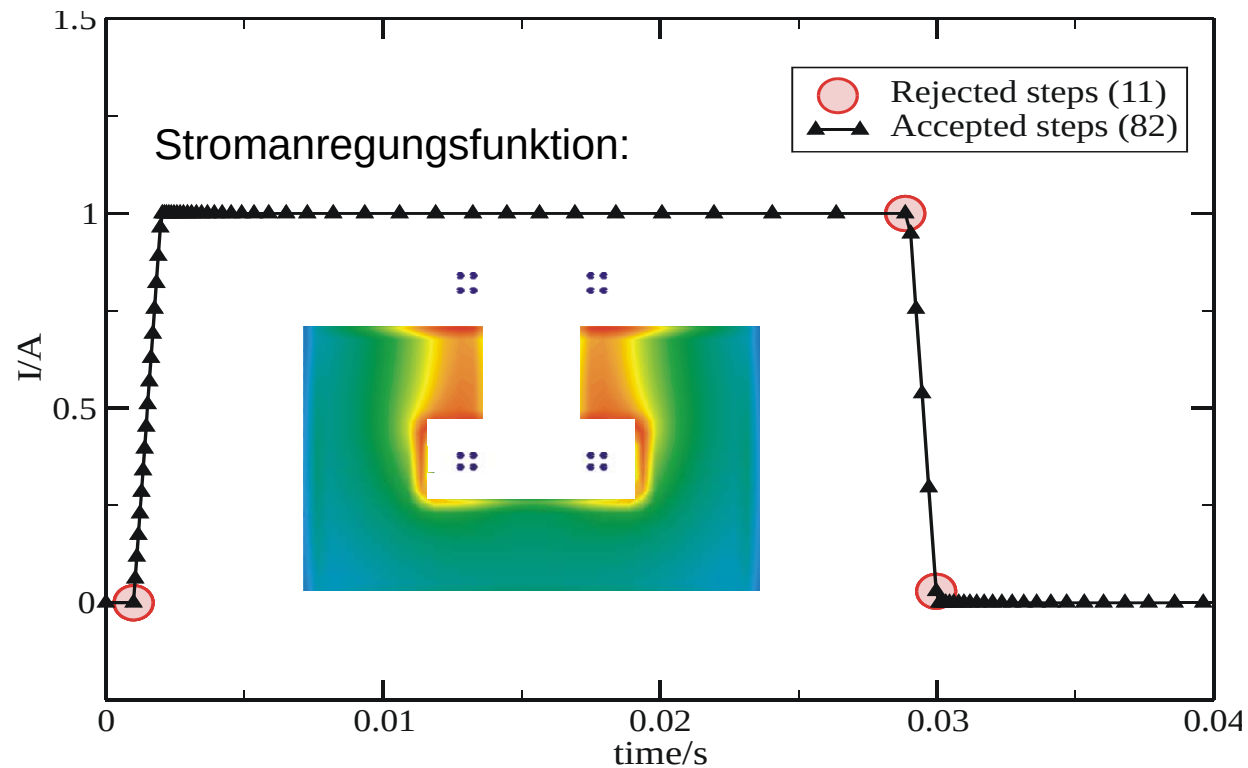
$rtol = 10^{-4}$ →



Adaptive Zeitschrittweiten-Selektion

Nichtlinearer C-Magnet:

(Zeitintegration mit linear-implizitem RODAS3(2)-Verfahren, $rtol = 10^{-3}$)

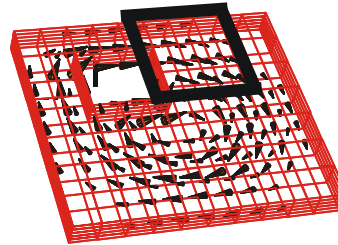


Aktuell: Vollständig **zeitlich und räumlich adaptive** transiente Magnetfeldberechnung
(DFG-Projekt CL 143-3, in Kooperation mit Prof. J. Lang, TU Darmstadt)

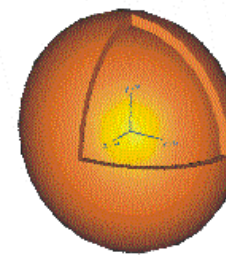
Optimale Startwert-Generierung

Gesamtzahl der Matrix-Vektor
Multiplikationen (MxV)

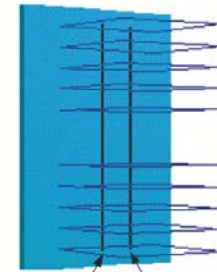
Linear-implizites
RODAS3(2)-Verfahren:



EC-Plate



TEAM11



TEAM 21b

Taylor 0: $\mathbf{x}_0^{(n+1)} := 0$	8397	8135	87277
SPE: letzte 3 Stufenlösungen	4766	5537	45590

Konvergenzverbesserung mit
Subspace Projection Extrapolation

Divergenzkorrigierende Multigrid-Glätter

Multigrid-Verfahren für Wirbelstrom-Probleme:

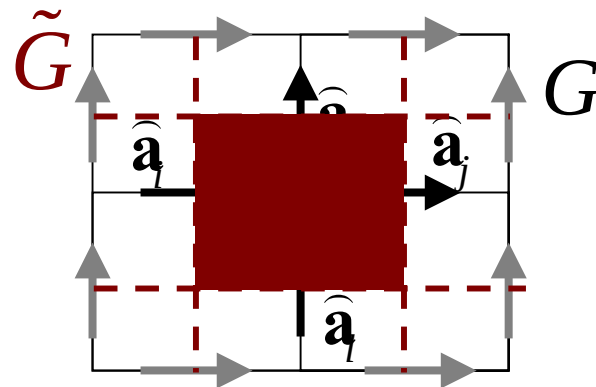
Für $\hat{\mathbf{a}}$ mit $\tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$: $[\alpha\mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}]\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}$

Symmetrisch,
positiv-semi-
definit

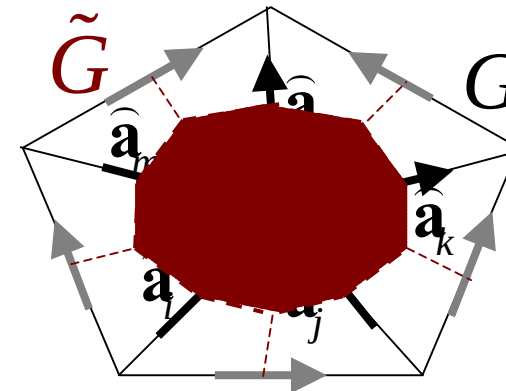


$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\kappa\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$$

gilt implizit, d.h., keine „Ladungen“ in allen dualen Zellvolumina:



Dual-orthogonales Gitter



Duales baryzentrische Gitter

= Null-Flußbilanz für duale Zellvolumina



Divergenzkorrigierende Multigrid-Glätter

Mehrgitterglätter für Wirbelstromprobleme:

Löse auf jedem Gitterlevel h_i :

$$[\alpha \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C}]_{h_i} \hat{\mathbf{a}}_{h_i} = \hat{\mathbf{j}}_{h_i}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{h_i} \mathbf{M}_{\kappa, h_i} \mathbf{a}_{h_i} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \text{Algebraische} \\ \text{Nebenbedingung} \\ \text{(implizit gegeben)} \end{array}$$

Einführung **Lagrange-Multiplikator** Φ (= elektr. Knotenpotentialvektor):

$$\left| \begin{array}{cc} [\alpha \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C}] & \mathbf{M}_\kappa \tilde{\mathbf{S}}^T \\ \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\kappa & \mathbf{0} \end{array} \right|_{h_i} \left| \begin{array}{c} \hat{\mathbf{a}} \\ \Phi \end{array} \right|_{h_i} = \left| \begin{array}{c} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right|_{h_i}$$

Divergenzkorrigierende Multigrid-Glätter

Löse/glätte auf jedem Gitterlevel h_i :

$$\begin{bmatrix} [\alpha \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C}] & \mathbf{M}_\kappa \tilde{\mathbf{S}}^T \\ \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\kappa & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{h_i} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \Phi \end{bmatrix}_{h_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{j}} \\ 0 \end{bmatrix}_{h_i} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{h_i} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}_{h_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}_{h_i}$$

SIMPLE-Scheme:

(Patankar/Spalding, 1972)

- 1) Choose $\mathbf{p}^*$
- 2) $\mathbf{u}^* \leftarrow \mathbf{Q} \mathbf{u}^* = \mathbf{b}_1 - \mathbf{G} \mathbf{p}^*$
- 3) $\Delta \mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{G}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{G}^T \mathbf{u}^*$
- 4) $\mathbf{u} := \mathbf{u}^* + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{p},$
 $\mathbf{p} := \mathbf{p}^* + \Delta \mathbf{p}$
- 5) $\mathbf{p}^* := \mathbf{p},$ goto 2)

Hybrid-Glätter:

(Hiptmair 1996)

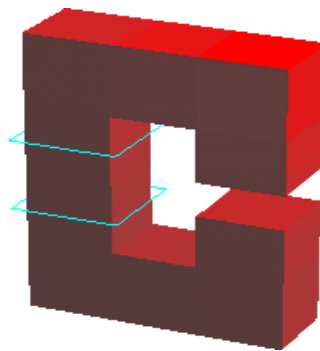
- 1) Choose $\Phi = 0$
 - 2) $\hat{\mathbf{a}}^* \leftarrow [\alpha \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C}] \hat{\mathbf{a}}^* = \hat{\mathbf{j}}$
 - 3) $\Delta \Phi \leftarrow \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\kappa \tilde{\mathbf{S}}^T \Delta \Phi = -\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{a}}^*$
 - 4) $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^* + \tilde{\mathbf{S}}^T \Delta \Phi,$
- = Entspricht einem
einem SIMPLE-Schritt

Multigrid-Konvergenz für Wirbelstromprobleme

Beispiel: C-Magnet

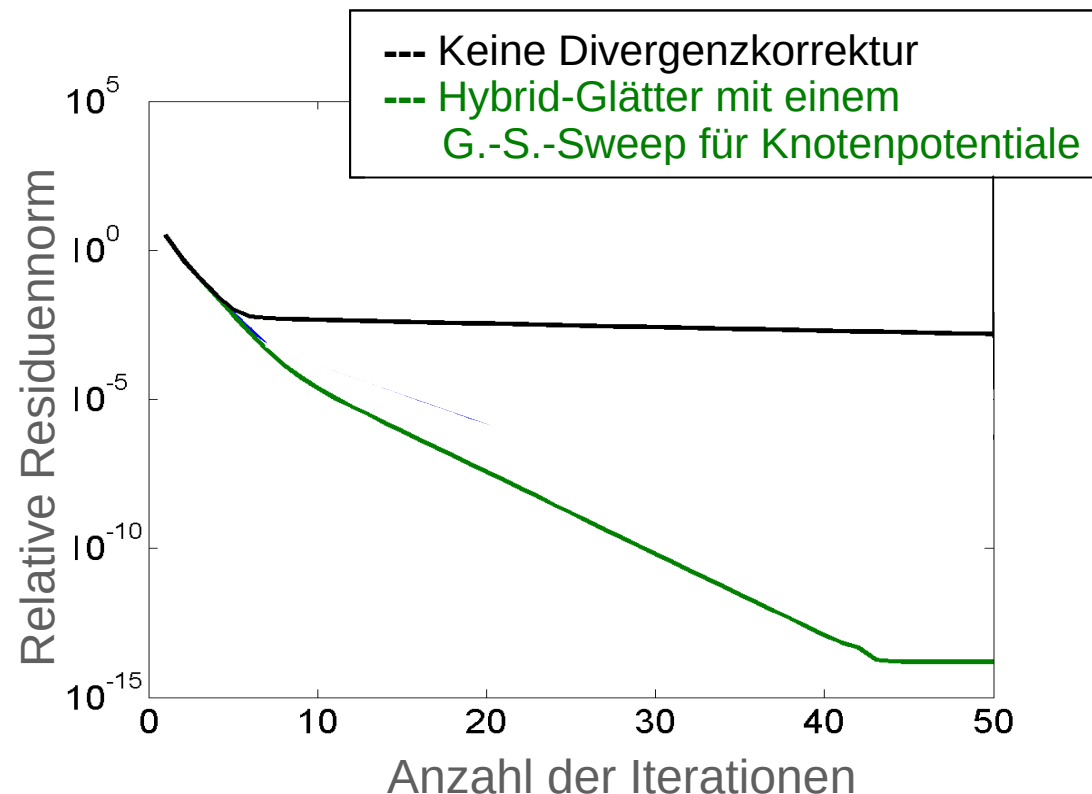
Hier: Erster BDF1 Zeitschritt:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \right] \hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \hat{\mathbf{j}}$$



C-Magnet

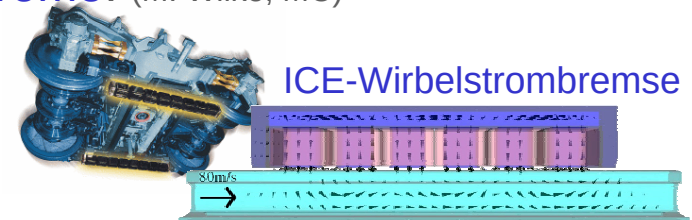
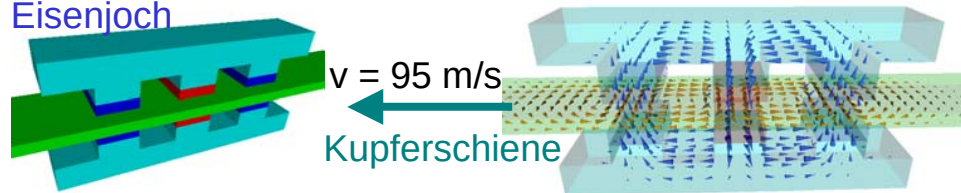
Geometrisches
Mehrgitter-
Verfahren mit
V(1,1)-Zyklus



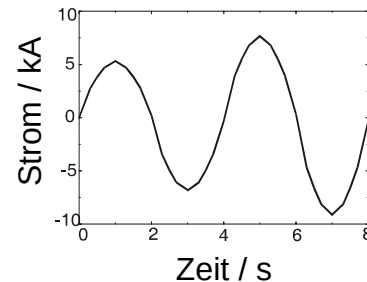
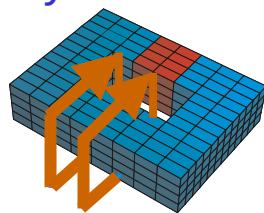
Magnetfeldberechnung: Erweiterte Modelle

- Modellierung bewegungsinduzierter Wirbelströme: (M. Wilke, MC)

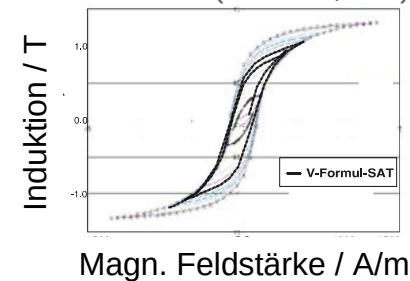
Eisenjoch



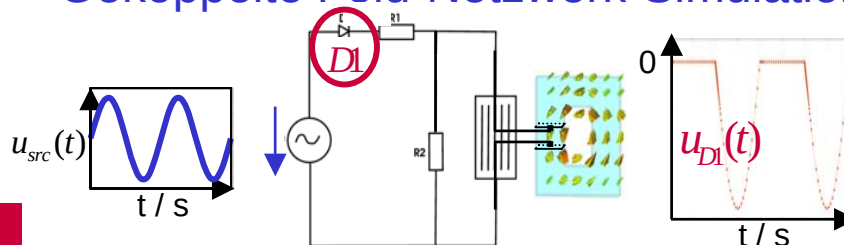
- Hysteresesimulation in ferromagnetischen Materialien: (J. Yuan, MC)



Preisach-
modell



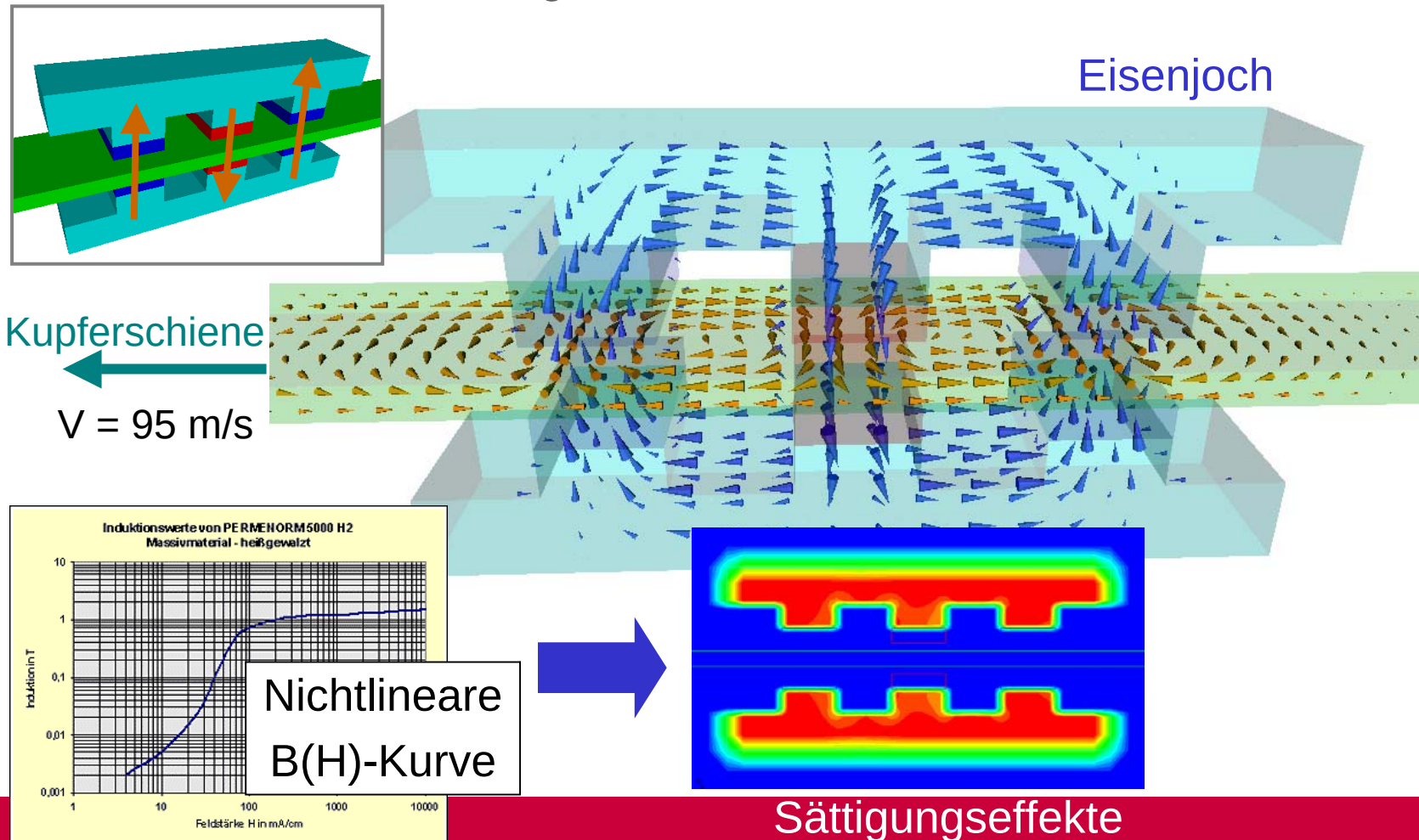
- Gekoppelte Feld-Netzwerk-Simulation: (G. Benderskaya, H. De Gersem, MC)



$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_k & \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_L \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_k \mathbf{C} & -\mathbf{M}_k \mathbf{Q} & -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_G & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^T & -\mathbf{N}_R \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_s \mathbf{i}_s \\ \mathbf{B}_s \mathbf{v}_s \end{bmatrix}$$

Bewegungsinduzierte Wirbelströme

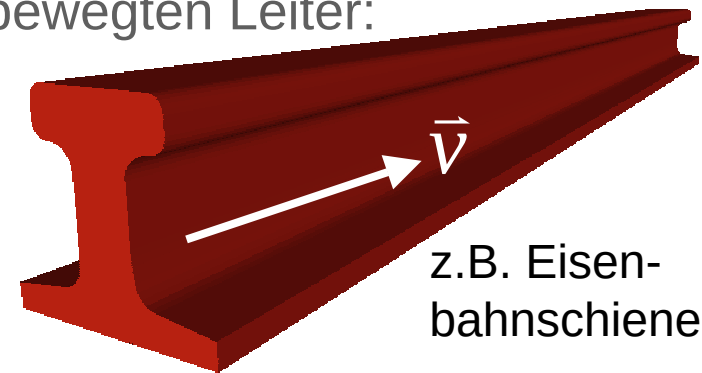
Struktur mit Permanentmagneten:



Bewegungsinduzierte Wirbelströme

Geometrische Einschränkungen an den bewegten Leiter:

- „Unendlich langer Leiter“
 - Transversal invariant
 - Keine schleifenden Kontakte
 - Nichtrelativistische Geschwindigkeiten $\vec{v}$
- ⇒ Keine Änderungen im Gitter



Fixed-Coordinate-Formulierung:
(Euler-Koordinaten)

$$\mathbf{M}_\kappa \frac{d}{dt'} \hat{\mathbf{a}}' + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}' - \boxed{\mathbf{M}_\kappa \mathbf{O} \vec{v} \times \vec{B} \underbrace{\mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}'}_{=\hat{\mathbf{b}}}} = \hat{\mathbf{j}}_s$$

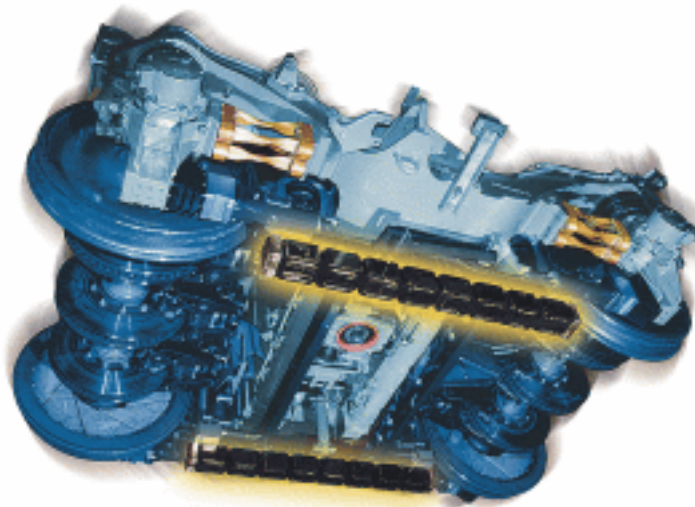
$$\approx \vec{J}_{mov} = \kappa (\vec{v} \times \vec{B})$$

Moving-Coordinate-Formulierung:
(Lagrange-Koordinaten)

BDF1 Zeitintegration:

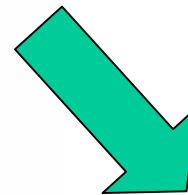
$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_\kappa + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \right] \hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_\kappa \boxed{\mathbf{T}(\vec{v}) \hat{\mathbf{a}}^{(n)}} + \hat{\mathbf{j}}_s$$

Lineare Wirbelstrombremse

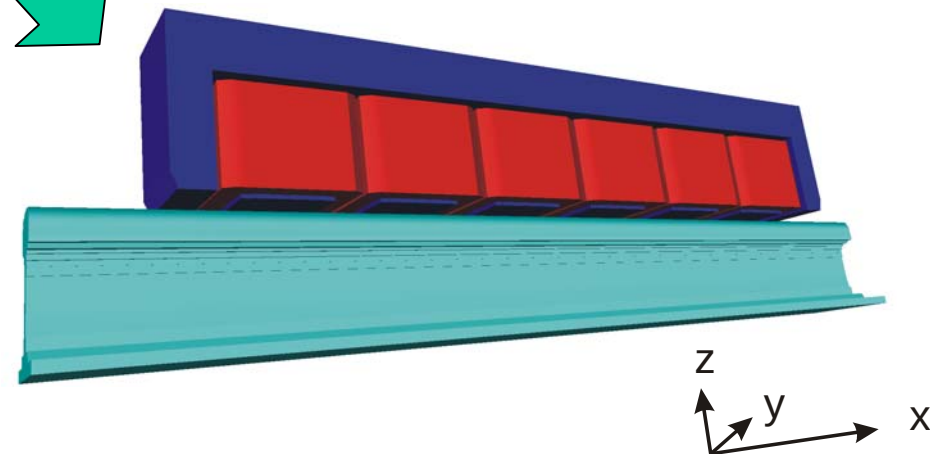


© www.innovation.co.at/deutsch/staat/detail02.html

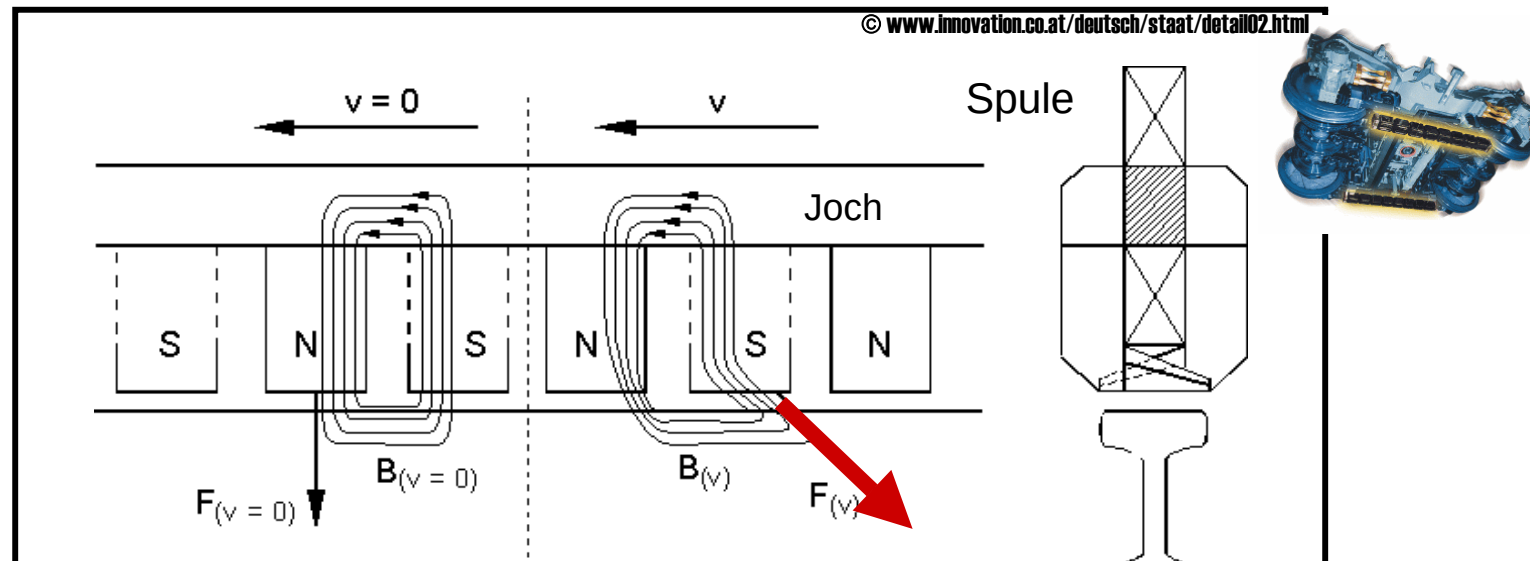
Installation in Treibköpfen des
ICE3 Hochgeschwindigkeitszuges



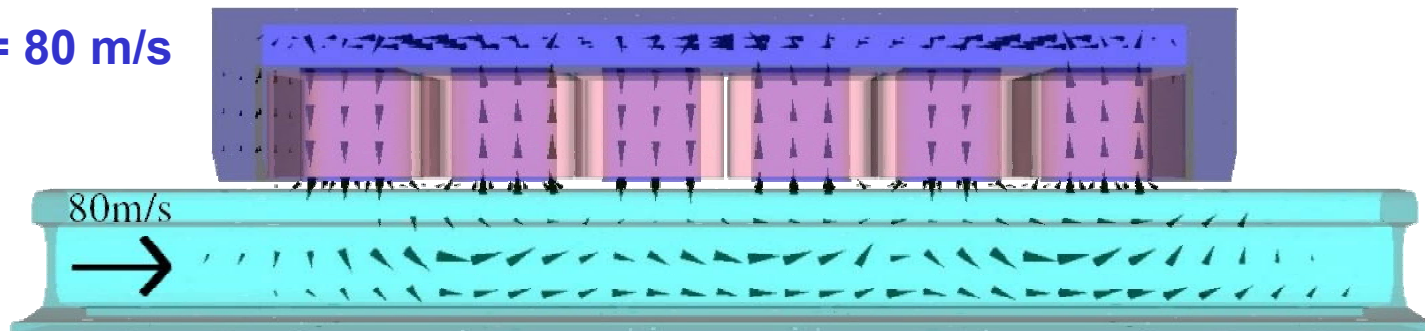
Geometriemodell für die
numerischen Simulationen



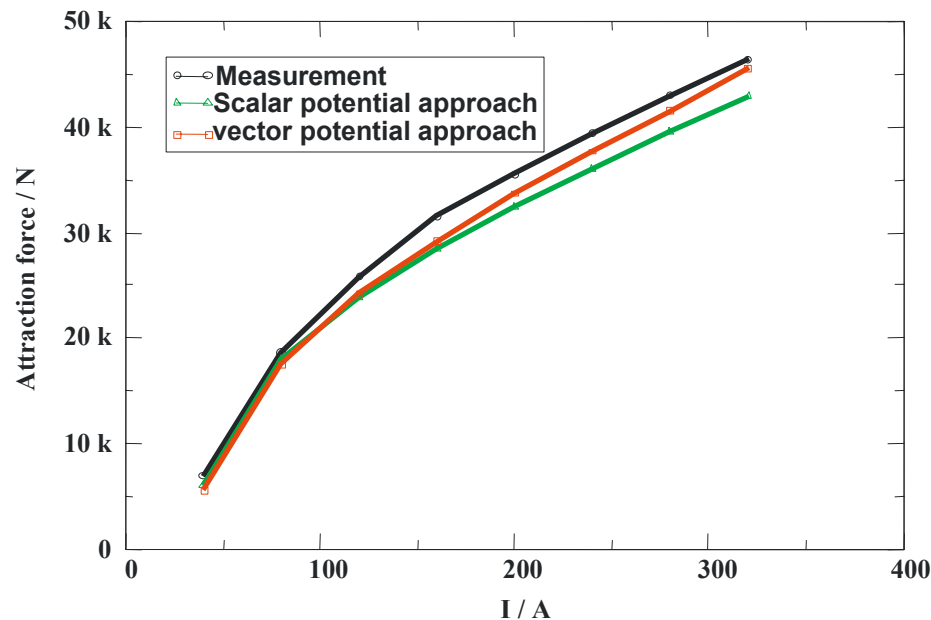
Lineare Wirbelstrombremse



V = 80 m/s

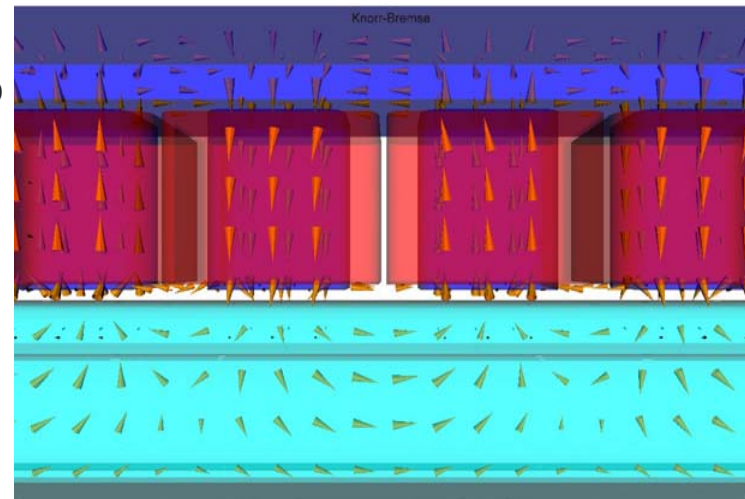


Lineare Wirbelstrombremse: Simulation



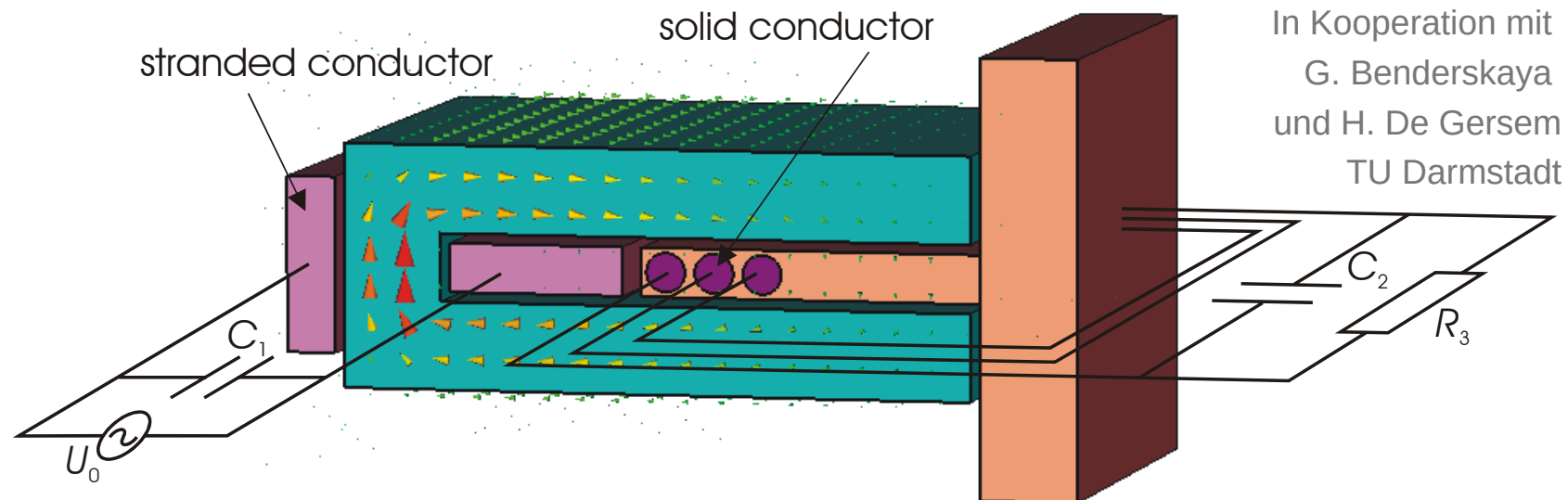
Vergleich von FIT-Simulationen mit zueinander dualen Formulierungen und Meßergebnissen für die Anzugskräfte bei verschiedenen Anregungen

Visualisierung der magn. Flüsse in der Anordnung



Feld-Netzwerk gekoppelte Probleme

Modell eines Transformators für drahtlose Energieübertragung:



Magnetodynamische GMG:

Freiheitsgrade:

$$\begin{array}{ll} \hat{e}(t) = -\frac{d}{dt} \hat{a}(t) & \text{- Spannungen} \\ \hat{j}(t) & \text{- Ströme} \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{v}(t) & \text{- Spannungen} \\ \mathbf{i}(t) & \text{- Ströme} \end{array}$$

Kirchhoffsche Netzwerkgl.:

Freiheitsgrade:

Diskrete gekoppelte Feld-Netzwerk-Formulierung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_k & \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_L \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_v \mathbf{C} & -\mathbf{M}_k \mathbf{Q} & -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_G & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^T & -\mathbf{N}_R \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_s \mathbf{i}_s \\ \mathbf{B}_s \mathbf{v}_s \end{bmatrix}$$

Notation:

$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_v \mathbf{C}$ - Curl-curl Steifigkeitsmatrix (positiv-semi-definit)

$\mathbf{M}_k$ - Leitfähigkeitsmatrix

$\mathbf{D}_s$ - “Fundamental cutset”-Matrix

$\mathbf{B}_s$ - “Fundamental loop”-Matrix

$\mathbf{N}_C$ - Kapazitätsmatrix

$\mathbf{N}_L$ - Induktanzmatrix

$\mathbf{N}_G$ - Leitwertmatrix

$\mathbf{N}_R$ - Widerstandsmatrix

Freiheitsgrade:

$\hat{\mathbf{a}}(t)$ - Vektor d. MVP

$\mathbf{v}(t)$ - Spannungen

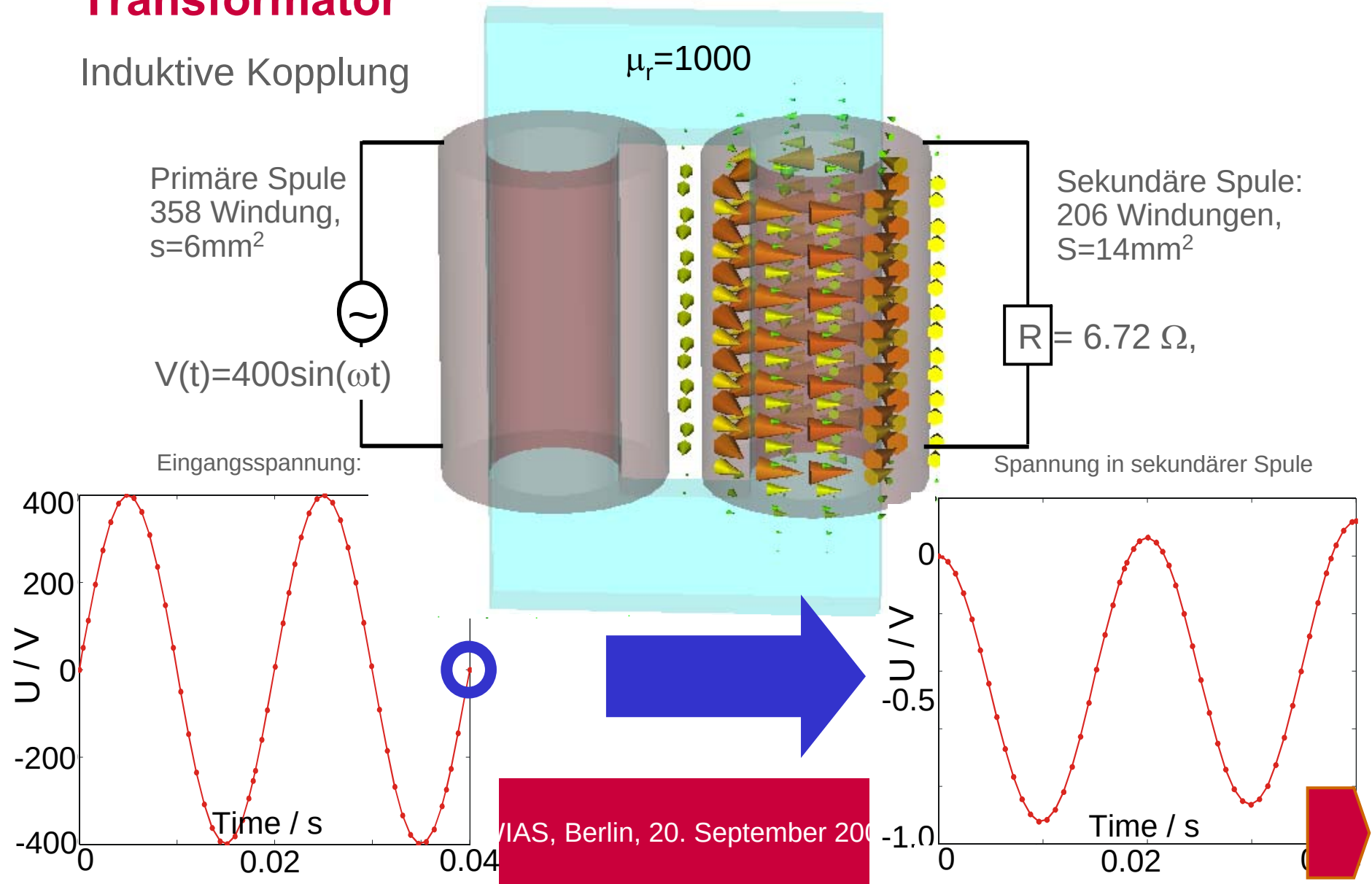
$\mathbf{i}(t)$ - Ströme

$\mathbf{v}_s$ - Quellspannungen

$\mathbf{i}_s$ - Quellströme

Transformator

Induktive Kopplung



Transiente Feld-Netzwerk gekoppelte Formulierung

Beispiel: Elektrisches Netzwerk mit idealer Diode + massivem Leiter



= Beispiel einer gekoppelten Simulation eines
Anfangs-/Randwert-Problems
(PDE mit kontinuierlichen Zustandsvariablen)
und eines
äquivalenter Netzwerk-Modells
mit konzentrierten Zustandsvariablen

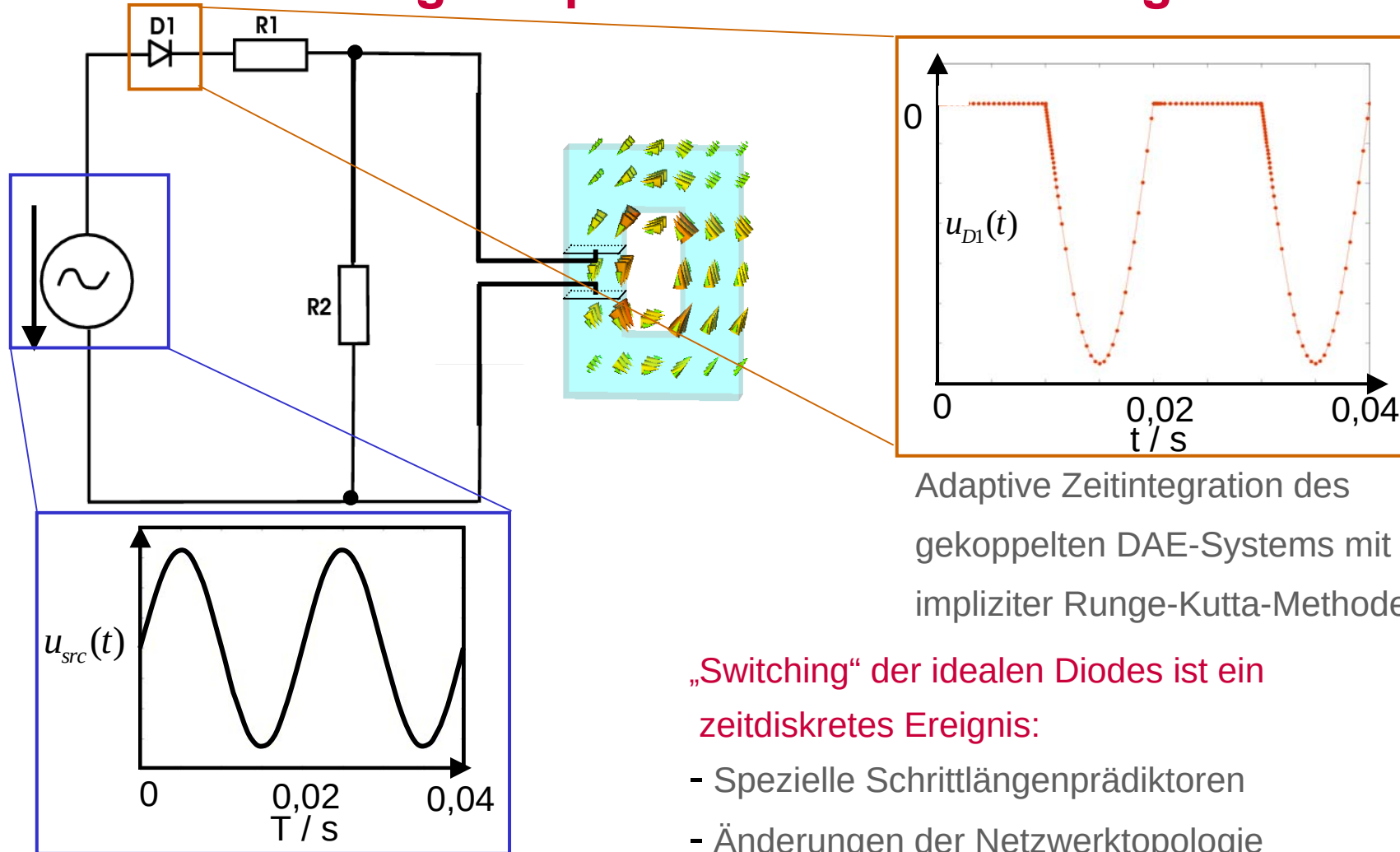


elektrischer Leiter
mit Stromverdrän-
gungseffekten

Zielgröße der Simulation:

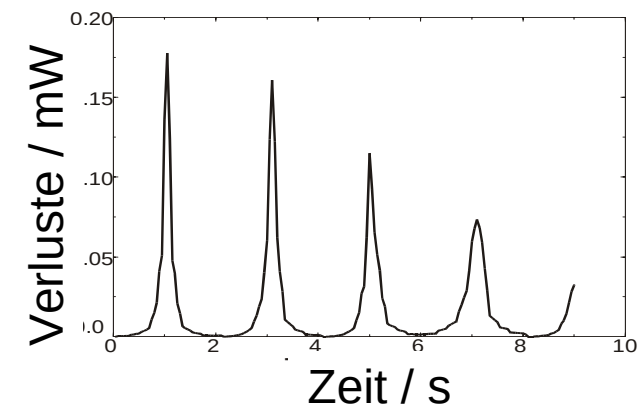
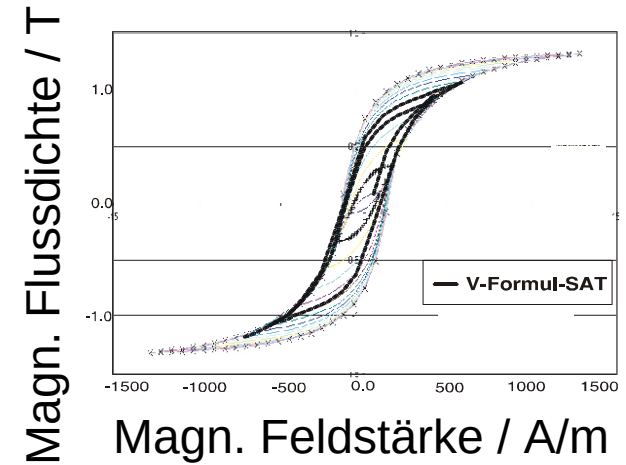
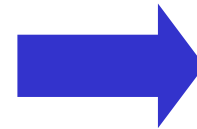
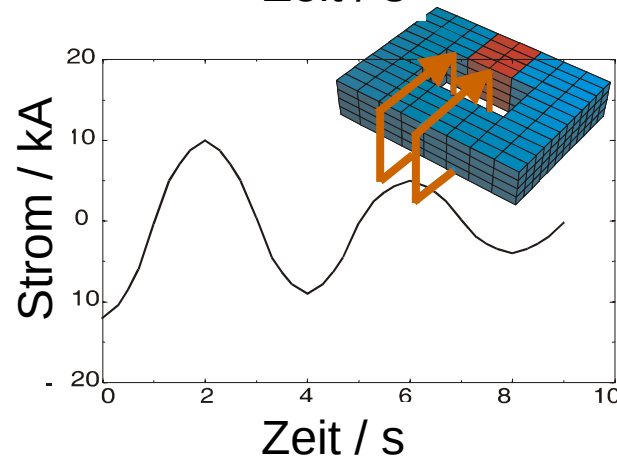
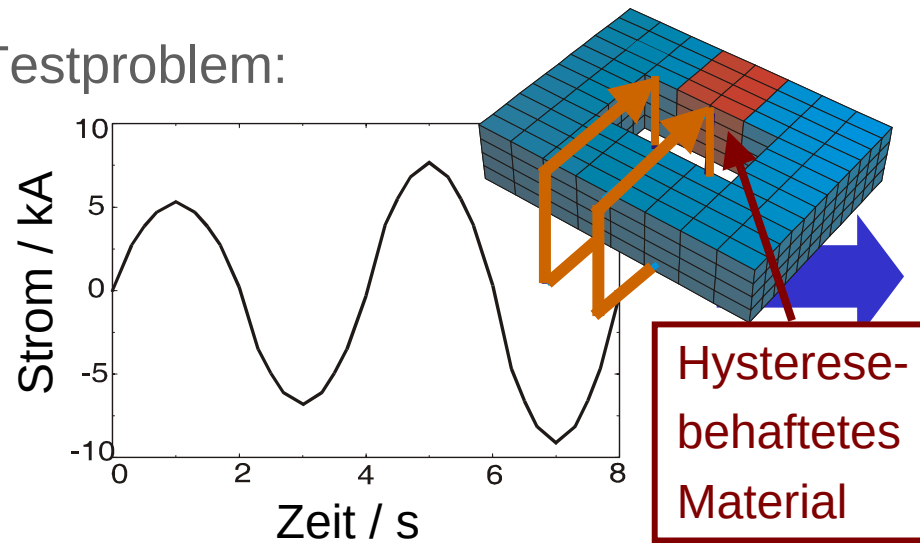
Spannungen und Ströme in R1, R2, D1

Fehlersteuerung: Adaptive Zeitdiskretisierung



Ferromagnetische Hysterese-Effekte

Testproblem:



Ferromagnetische Hysterese-Effekte

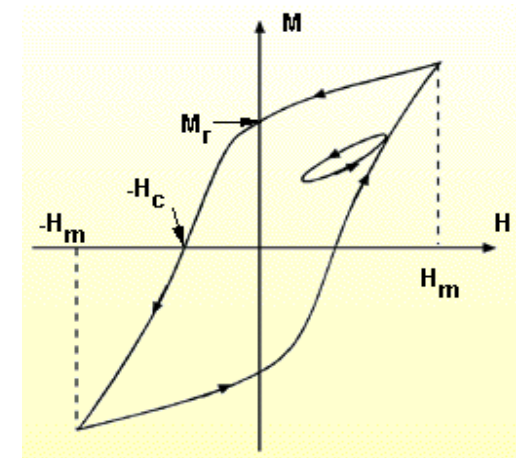
Iterative Lösungsverfahren:

Newton-Polarisations-Hybrid-Verfahren:

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{v_d}(\hat{\mathbf{a}}^{(n)}) \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \hat{\mathbf{j}}_s + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{v_0} \hat{\mathbf{m}}^{(n)} \quad (n=0,1,\dots)$$

$$\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)} := \mathbf{M}_{v_0}(\hat{\mathbf{b}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{m}}^{(n)})$$

$\hat{\mathbf{m}}$ = magn. Polarizationsflussvektor



Hysterebehaftete Magnetisierung:

$$M(t) := \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta} H(t) d\alpha d\beta \quad (\text{Preisach Modell})$$

$$= \iint_{S^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

Gliederung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Simulation langsam veränderlicher Felder

Elektrische Ströme im menschlichen Körper

Elektrische Hochspannungsfelder

Transiente Magnetfelder

Simulation hochfrequenter Felder

Transiente EM-Felder

Zusammenfassung

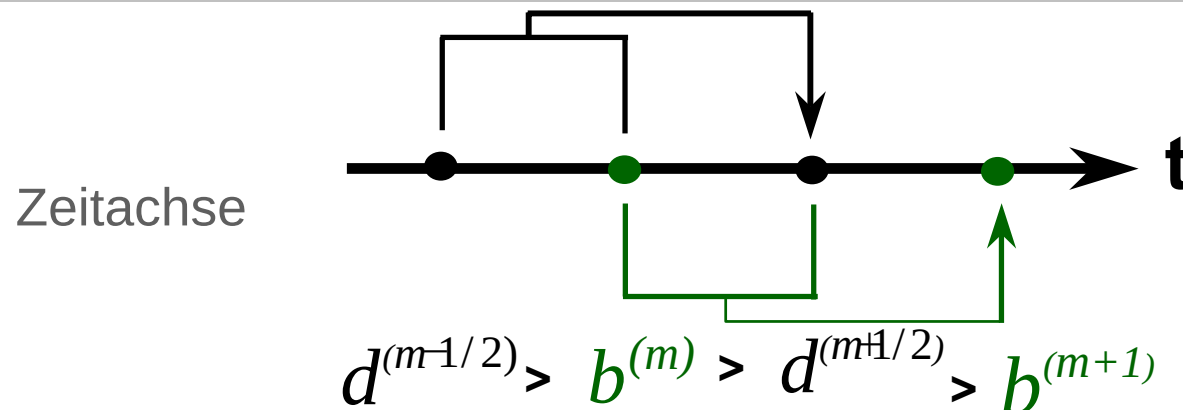
Explizite Zeitintegration hochfrequenter EM-Felder

Das Leapfrog-Zeitintegrationsverfahren

Finite Integration Time Domain (FITD): Explizites Zeitschrittverfahren!

$$\widehat{\mathbf{b}}^{(m+1)} := \widehat{\mathbf{b}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1} \widehat{\mathbf{d}}^{(m+1/2)}$$

$$\widehat{\mathbf{d}}^{(m+3/2)} := \widehat{\mathbf{d}}^{(m+1/2)} + \Delta t \left(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu}^{-1} \widehat{\mathbf{b}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right)$$



Explizite Zeitintegration hochfrequenter EM-Felder

Leapfrog Zeitintegrationsverfahren

$$\widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{b}}^{(m+1)} = \widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{b}}^{(m)}$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{d}}^{(m+3/2)} = \widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{d}}^{(m+1/2)} - \Delta t \widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)}$$

Diskrete magnetische und elektrische Ladungen werden erhalten

Stabilitätskriterium (Courant-Friedrich-Levi)

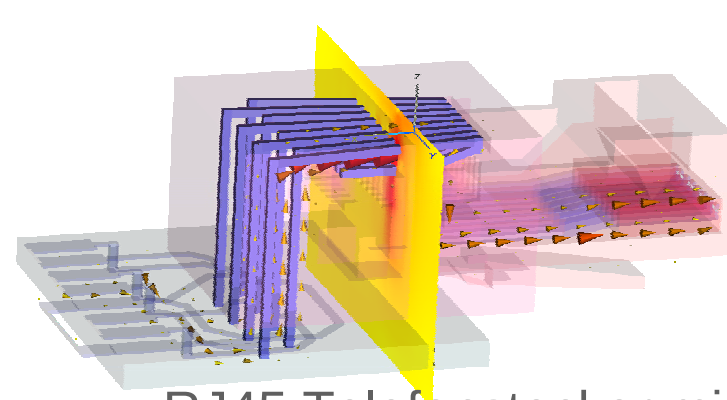
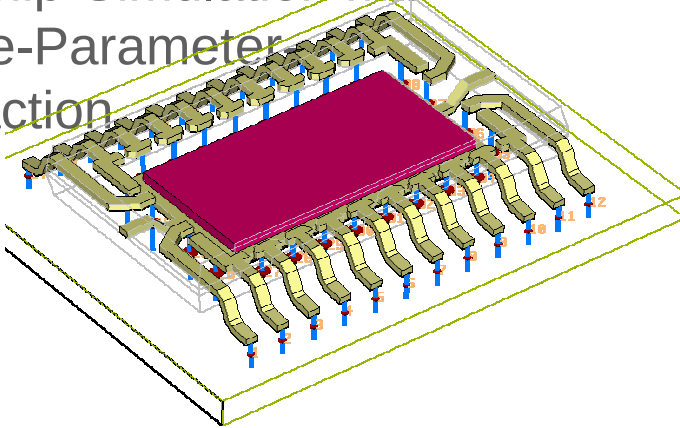
$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{CFL}} := \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

Vorteile des FITD/FDTD Verfahrens

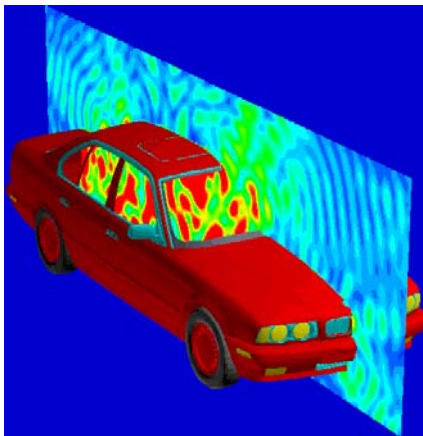
- Hohe Speichereffizienz
- Numerische effiziente Implementierungen
- (Quasi-)reflektionsfreie “offen” Randbedingungen (Perfectly Matched Layers)
- Fortgeschrittene Post-Processing Methoden (DFT-Monitore, AR-Filter,...)

Anwendungsbeispiele FITD:

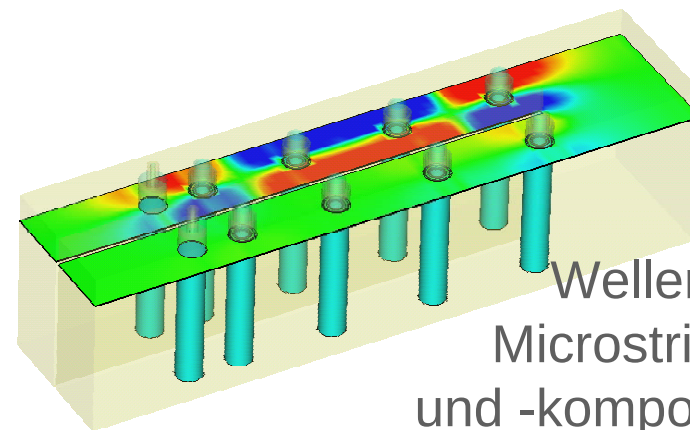
IC-Chip-Simulation mit
Spice-Parameter
extraction



RJ45 Telefonstecker mit
8 Pins auf jeder Seite

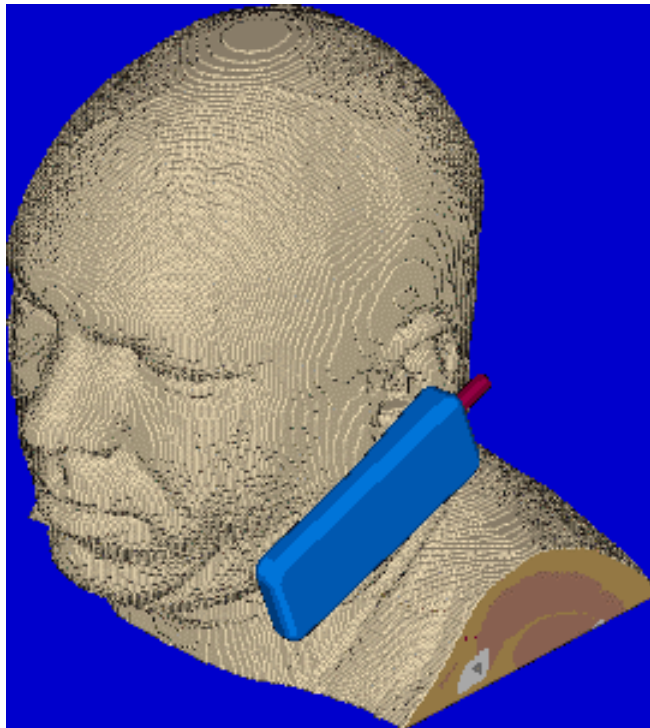


Mobiltelefon
im Auto



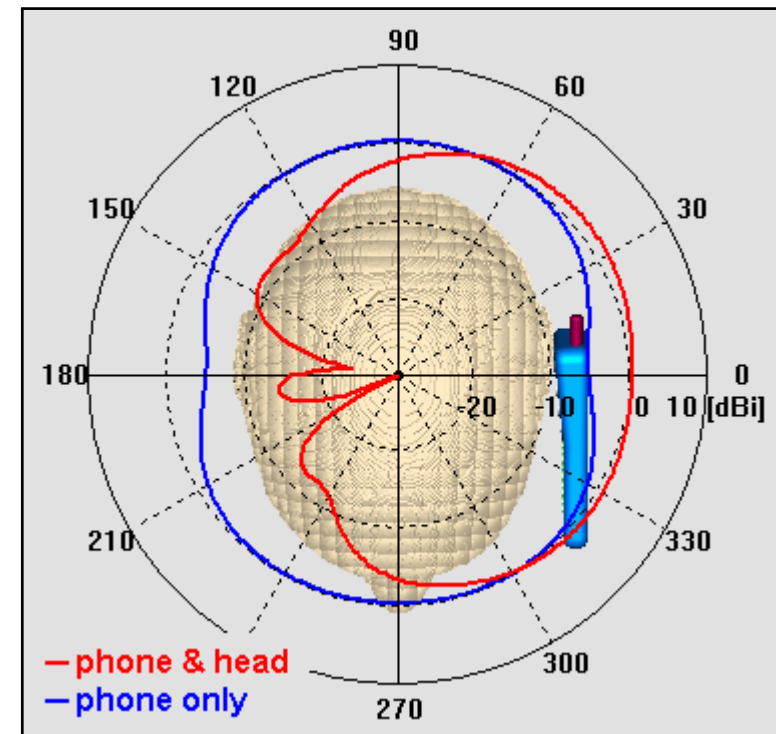
Wellenleiter /
Microstrip-Filter
und -komponenten

Anwendungsbeispiel FITD: Kopf Nahfeld Exposition



Hochauflösendes
Kopfmodell

Vertikale Komponente der
Richtcharakteristik
bei 1.95 GHz



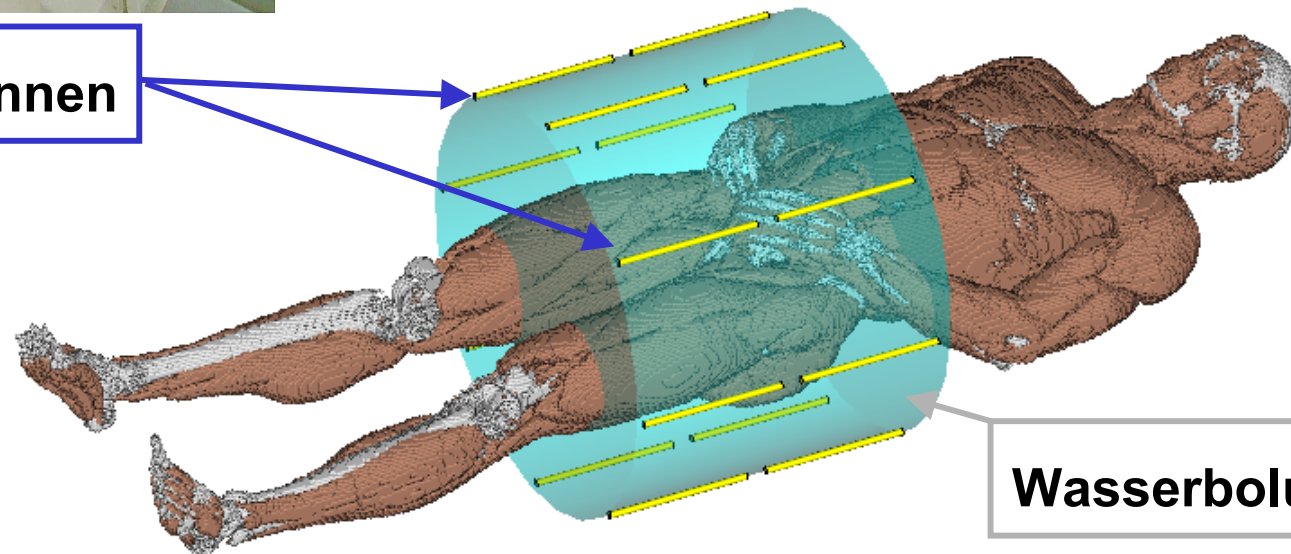
Anwendungsbeispiel FITD: Hyperthermie Behandlung



Sigma-60-Anular Phase Array

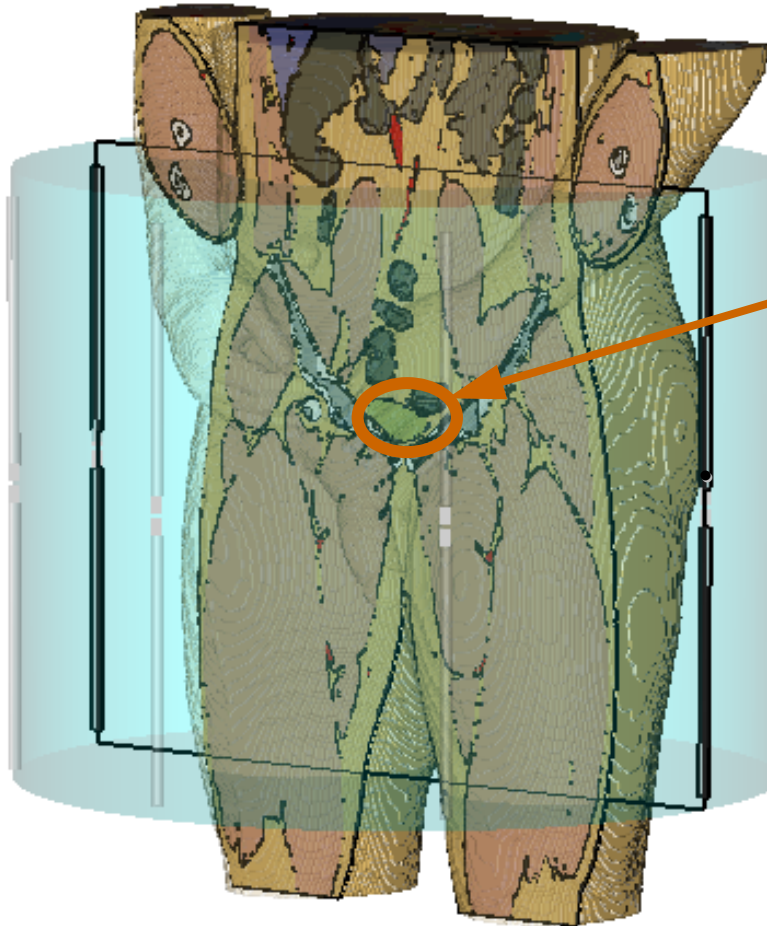
- Zylindrischer Ring
- 8 Dipolantennen, paarweise angeordnet
- Frequenz: 60 bis 120 MHz
- Ansteuerung über Amplitude und Phase
- Wasserbolus

Dipol Antennen



Wasserbolus

Hyperthermie Felder



HUGO Modell:

15 Gewebesorten inkl.
Tumorgewebe
($\epsilon_r = 80, \sigma = 0.8 \text{ S/m}$)

Auflösung mit
2x2x2 mm Voxelzellen

Rechengebiet:
> 7,800,000 Unbekannte,
1,440,000 für Torso

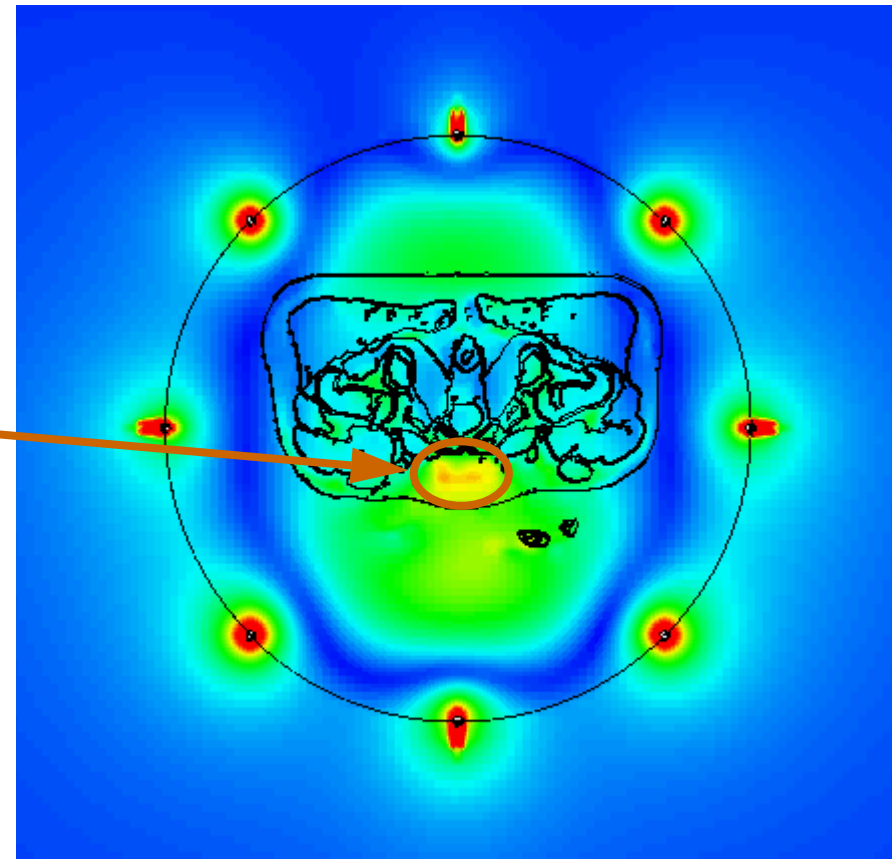
Hyperthermie Felder

„Hot Spots“ bei 90 MHz
Leapfrog Zeitbereichssimulation mit FIT (FITD)

Überlagerung der einzelnen
Antennenfelder

„Hot spot“ aufgrund von
Jouleschen Verlusten

Quelle für anschließende
Zeitintegration der
Bio-Wärmegleichung (Pennes)

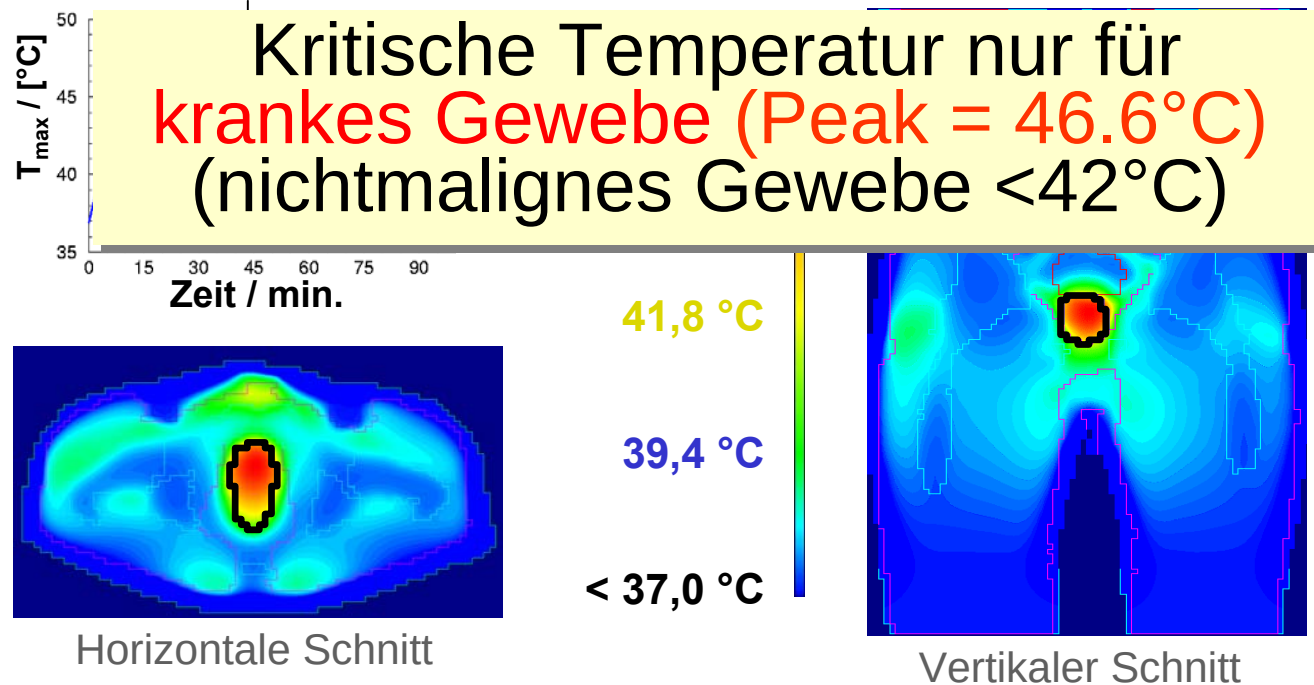


Hyperthermie: Bio-Wärmetransport-Gleichung

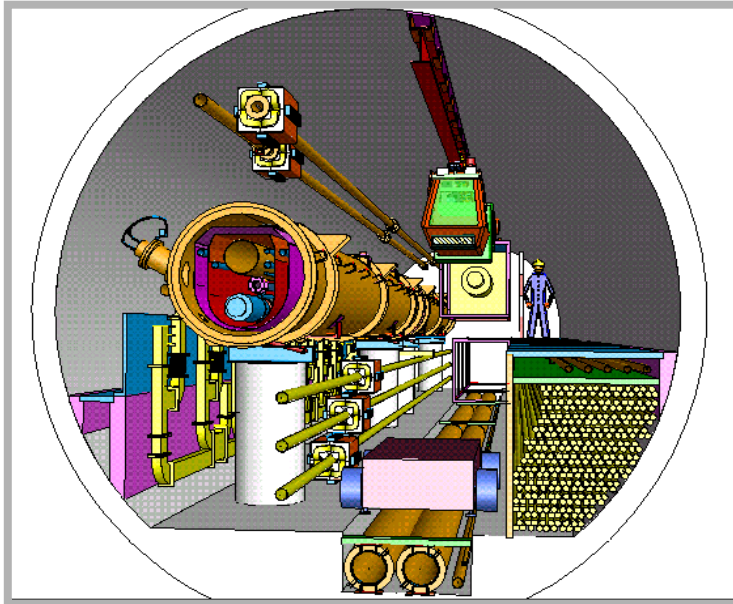
Optimierte Regelung für 90 MHz:

Bio Heat Equation (Pennes):

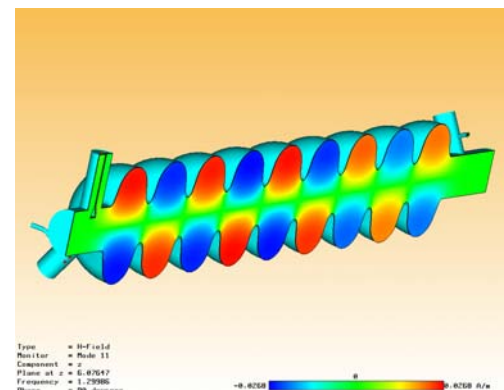
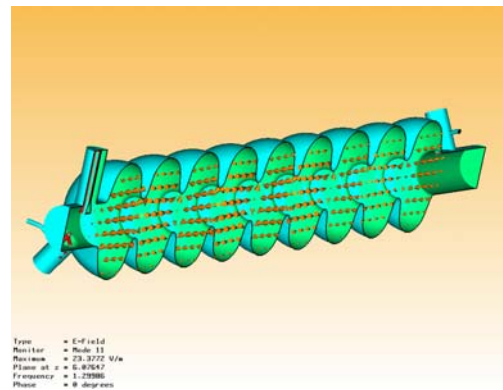
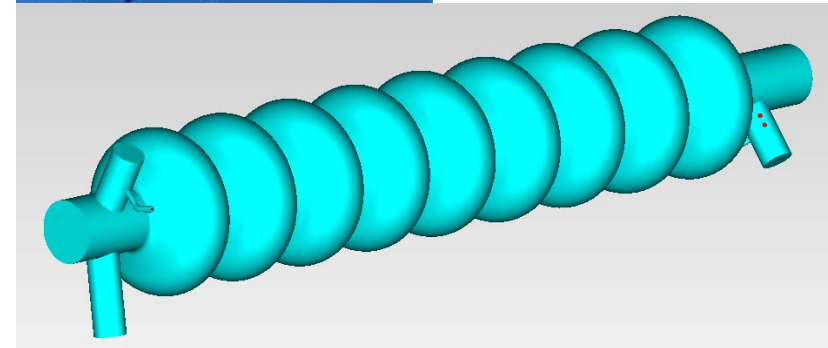
$$\rho(T) c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\lambda(T) \text{grad}T] + \underbrace{Q_p}_{\text{Absorb. Energie}} + \underbrace{Q_m}_{\text{Metabol. Prozesse}} - \underbrace{w\rho\rho_b c_b}_{\text{Perfusion}} [T - T_b]_{\text{Blut Temperatur}}$$



TESLA (DESY Hamburg)



Supraleitende
RF Cavities
beim DESY,
Hamburg



Cavity Design:
Eigenmode-
Berechnung

Zeitharmonische Probleme: Resonante Felder

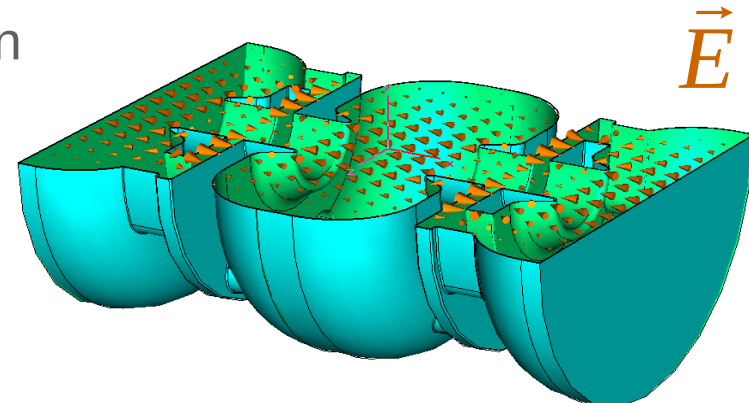
Berechnung resonanter elektromagnetischer Felder:

- Partikel-Beschleunigerstrukturen

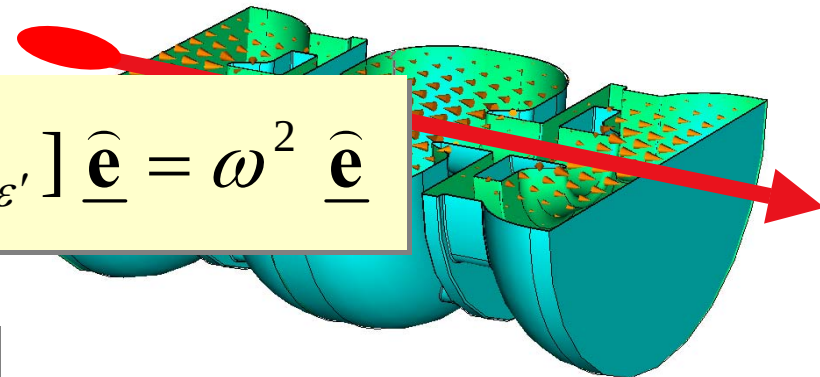
$$\vec{E}(t) := \text{Re}\{\vec{E} \cdot e^{i\omega t}\} \quad \underline{\varepsilon}'(\omega) := \varepsilon + \frac{1}{i\omega} \sigma$$

$$\underline{\varepsilon}'^{-1} \nabla \times (\tilde{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot (\underline{\varepsilon}' \vec{E}) = 0$$



$$(\mathbf{M}_{\varepsilon'}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} + \mathbf{G} \mathbf{M}_N \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{\varepsilon'}) \hat{\mathbf{e}} = \omega^2 \hat{\mathbf{e}}$$



Algebraisches Eigenwertproblem:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^H)$$

Lösung z.B.

mit Jacobi-Davidson-Verfahren

Bilder: TU Darmstadt, FG TEMF

Zusammenfassung

Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

Gitter-Maxwellgleichungen (FIT, N-/C-FIT, Whitney-FEM, Cell-M.,...)

Diskrete Feldformulierungen

Stationäre elektrische und magnetische Felder (im Menschen: „Bioelectromagnetics“)

Quasistatische elektrische Hochspannungs-/ Magnetfelder

Hochfrequente EM-Felder (transient / zeitharmonisch)

Gekoppelte Simulation: Elektro- und Thermodynamik („Hyperthermie“)

Effiziente numerische Lösungsverfahren

für hochdimensionale, nichtlineare / lineare

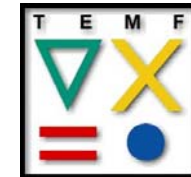
- algebraische Gleichungssysteme

- differential-algebraische Gleichungssysteme

- steife/nicht-steife Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

- algebraische Eigenwertprobleme

Ergebnisse in enger Zusammenarbeit mit dem ehemaligen
„Solver“ Team am Institut für Theorie Elektromagnetischer
Felder (Prof. Weiland), Technische Universität Darmstadt



Andreas Barchanski, Galina Benderskaya, Herbert De Gersem
Stefan Feigh, Nassos Skarlatos, Markus Wilke, Jing Yuan

sowie den **Mitarbeitern** der „Professur für Theoretische Elektrotechnik
und Numerische Feldberechnung“ an der Helmut-Schmidt-Universität:

Lars-Ole Fichte, Thorsten Steinmetz, Georg Wimmer
Andreas Priesmeyer,
Moritz Helias, Thomas Wernitz, Nico Gödel

