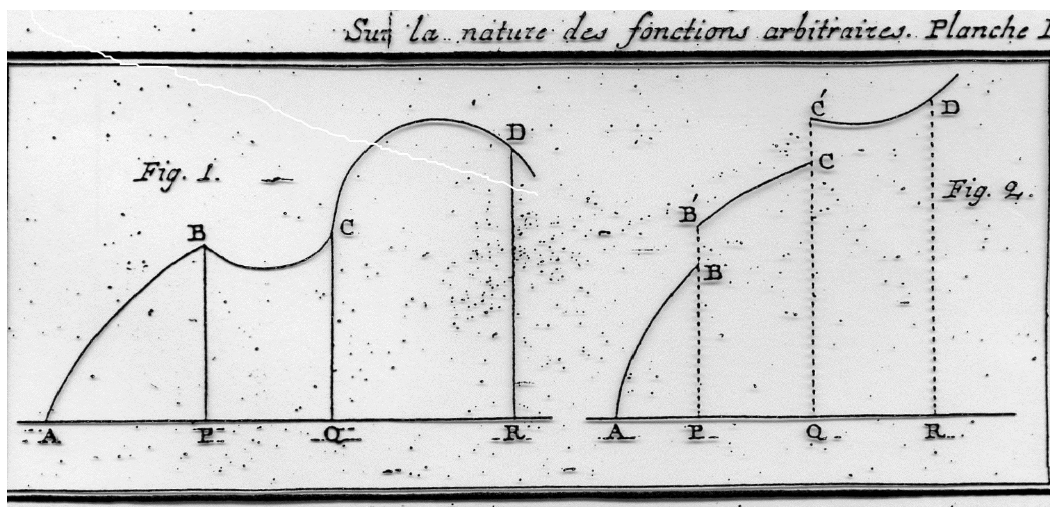
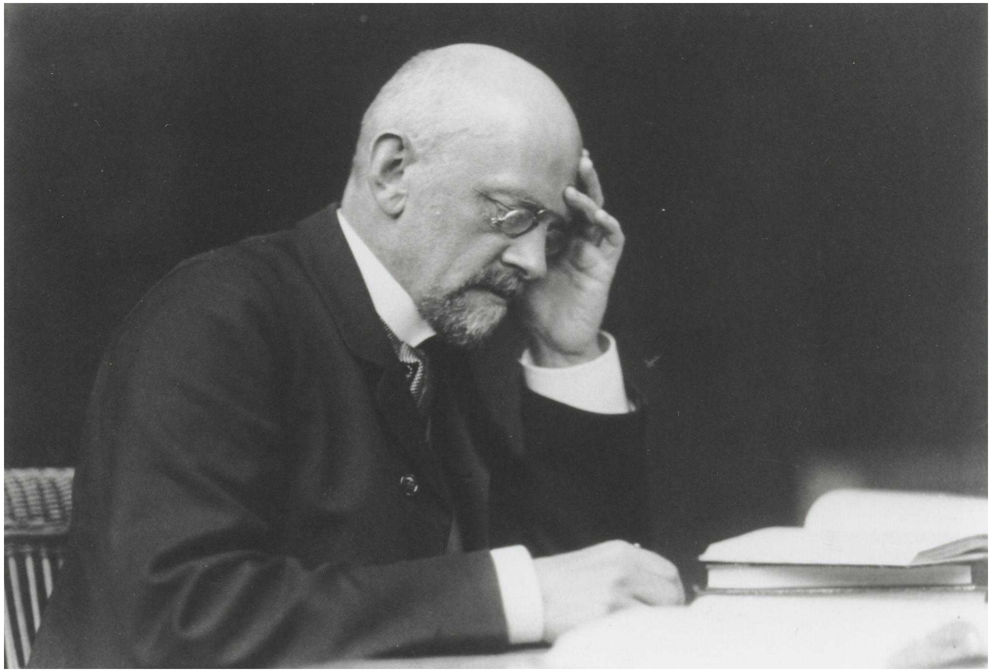
Was ist eine Funktion?

Die Entwicklung des Funktionsbegriffs seit Leibniz

RÜDIGER THIELE

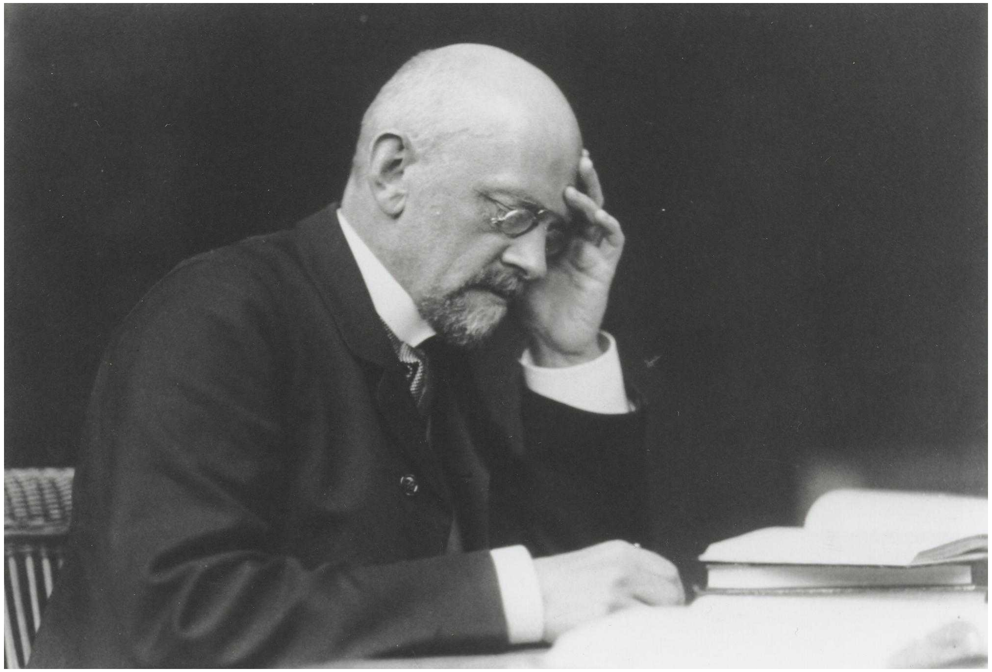




„Neben dem Zahlbegriff ist der Begriff einer Funktion der wichtigste in der Mathematik.“

Vorlesung „*Functionentheorie*“, 1893

David Hilbert (1862-1943)



„Neben dem Zahlbegriff ist der Begriff einer Funktion der wichtigste in der Mathematik.“

Vorlesung „*Functionentheorie*“, 1893

David Hilbert (1862-1943)

„Niemand kann erklären, was eine Funktion ist.“ (1928)

„ … but this is what really matters in mathematics.“ (1948)

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, 1928, und amerikanische Ausgabe 1948

Hermann Weyl (1885-1955), Schüler von Hilbert

Eine mengentheoretische Definitionen einer Funktion

.

Mit den rechtseindeutigen [hier zweistelligen] Relationen R auf einer Menge M ist das gegeben, was in der Mathematik als

Abbildung oder *Funktion*

bezeichnet wird.

Rechtseindeutigkeit:

Für alle x, y, z aus M gilt
$(x, y) \in R$ und $(x, z) \in R \rightarrow y = z$.

Encyclopædia Britannica

1. Auflage, 1771, Band 2

Encyclopædia Britannica;

OR, A

DICTIONARY

OF

ARTS and SCIENCES,

COMPILED UPON A NEW PLAN.

IN WHICH

The different SCIENCES and ARTS are digeſted into diſtinct Treatiſes or Syſtems;

AND

The various TECHNICAL TERMS, *&c.* are explained as they occur in the order of the Alphabet.

ILLUSTRATED WITH ONE HUNDRED AND SIXTY COPPERPLATES.

By a SOCIETY *of* GENTLEMEN *in* SCOTLAND.

IN THREE VOLUMES.

VOL. II.

EDINBURGH:

Printed for A. BELL and C. MACFARQUHAR;

And ſold by COLIN MACFARQUHAR, at his Printing-office, Nicolſon-ſtreet.

M.DCC.LXXI.

FUNCHAL, the capital of the Madeira iſlands, ſubject to Portugal: W. long. 16°, N. lat. 32° 33′.

FUNCTION, the act of fulfilling the duties of any employment.

FUNCTION, being alſo applied to the actions of the body, is by phyſicians divided into vital, animal, and natural. The vital functions are thoſe neceſſary to life, and without which the individual cannot ſubſiſt; as the motion of the heart, lungs, *&c.* The natural functions are ſuch as it cannot ſubſiſt any conſiderable time without them, as the digeſtion of the aliment, and its converſion into blood. Under animal functions are included the ſenſes of touching, taſting, *&c.* memory, judgment, and voluntary motion, without any, or all of which an animal may live, but not very comfortably.

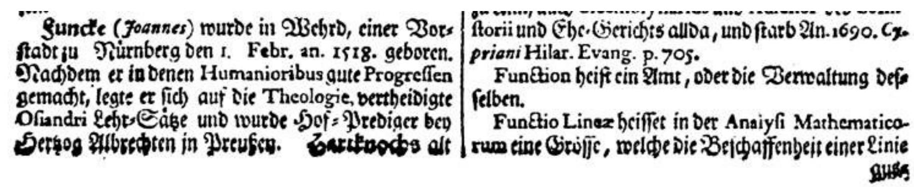
The animal functions perform the motion of the body by the action of the muſcles, and this action conſiſts chiefly in the ſhortening the fleſhy fibres, which is called contraction, the principal agents of which are the arteries and nerves diſtributed in the fleſhy fibres.

In ſhort, all parts of the body have their own functions, or actions peculiar to themſelves. Life conſiſts in the exerciſe of theſe functions, and health in the free and ready exerciſe of them.

FUND, in commerce, ſignifies the ſtocks of the great trading and monied companies. See STOCKS.

Der Große Zedler

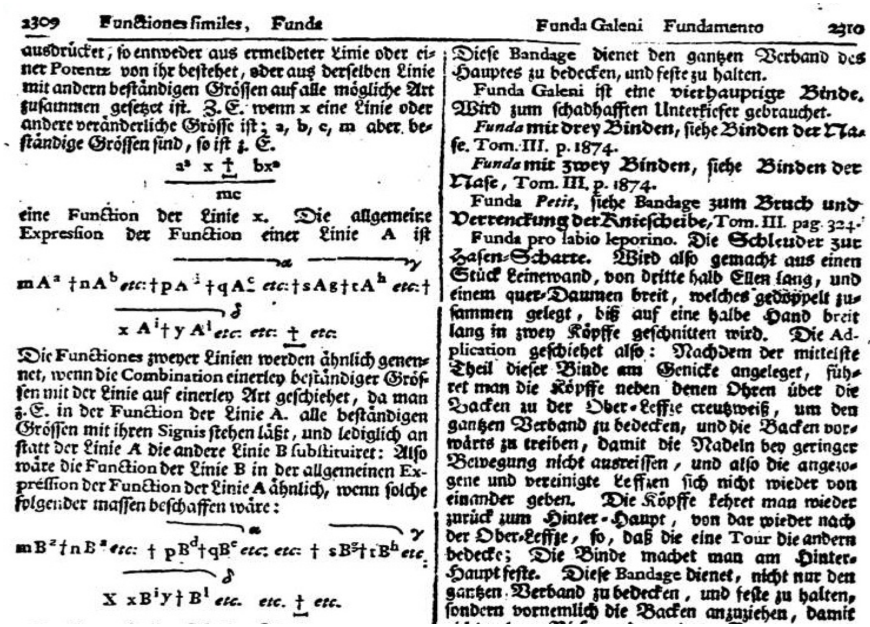
Grosses vollständiges
UNIVERSAL
LEXICON
Aller Wissenschafften und Künste,
Welche bißhero durch menschlichen Verstand und Witz
Biblio: erfunden und verbessert worden. Assat:
Darinnen so wohl die Geographisch-Politische
Beschreibung des Erd-Creyses, nach allen Monarchien Kayserthümern, Königreichen, Fürstenthümern, Republicken, freyen Herschafften, Ländern, Städten, See-Häfen, Festungen, Schlössern, Flecken, Aemtern, Klöstern, Gebürgen, Pässen, Wäldern, Meeren, Seen, Inseln, Flüssen, und Canälen; Samt der natürlichen Abhandlung von dem Reich der Natur, nach allen himmlischen, lufftigen, feurigen, wässerigen und irrdischen Cörpern, und allen hierinnen befindlichen Gestirnen, Planeten, Thieren, Pflantzen, Metallen, Mineralien, Saltzen und Steinen &c.
Band: 1738
Als auch eine ausführliche Historisch-Genealogische Nachricht von den Durchlauchten und berühmtesten Geschlechtern in der Welt:
Den Leben und Thaten der Kayser, Könige, Churfürsten und Fürsten, grosser Helden, Staats-Minister, Kriegs-Obersten zu Wasser und zu Lande, den vornehmsten geist- und weltlichen Ritter-Orden &c.
Ingleichen von allen Staats- Kriegs- Rechts- Policey- und Haußhaltungs-Geschäfften des Adelichen und Bürgerlichen Standes, der Kauffmannschaft, Handthierungen, Künste und Gewerbe, ihren Innungen, Zünfften und Gebräuchen, Schiff-Fahrten, Jagden, Fischereyen, Berg- Wein- Acker- Bau und Viehzucht &c.
Wie nicht weniger die völlige Vorstellung aller in den Kirchen-Geschichten berühmten Alt-Väter, Propheten, Apostel, Päbste, Cardinäle, Bischöffe, Prälaten und Gottes-Gelehrten, wie auch Concilien, Synoden, Orden, Wallfahrten, Verfolgungen der Kirchen, Märtyrer, Heiligen, Sectirer und Ketzer aller Zeiten und Länder;
Endlich auch ein vollkommener Inbegriff der allergelehrtesten Männer, berühmter Universitäten Academien, Societäten und der von ihnen gemachten Entdeckungen: Ferner der Mythologie, Alterthümer, Müntz-Wissenschafft, Philosophie, Mathematic, Theologie, Jurisprudentz und Medicin, wie auch aller freyen und mechanischen Künste, samt der Erklärung aller darinnen vorkommenden Kunst-Wörter u. s. f. enthalten ist.
Mit Hoher Potentaten allergnädigsten Privilegiis.
Neunter Band, F.
Halle und Leipzig,
Verlegts Johann Heinrich Zedler,
Anno 1735.



Funcke (*Joannes*) wurde in Wehrd, einer Vorstadt zu Nürnberg den 1. Febr. an. 1518. geboren. Nachdem er in denen Humanioribus gute Progressen gemacht, legte er sich auf die Theologie, vertheidigte Osiandri Lehr-Sätze und wurde Hof-Prediger bey Hertzog Albrechten in Preussen. Hartknochs alt ... storii und Ehe-Gerichts allda, und starb An. 1690. *Cypriani* Hilar. Evang. p. 705.

Function heist ein Amt, oder die Verwaltung desselben.

Functio Lineæ heisset in der Analysi Mathematicorum eine Grösse, welche die Beschaffenheit einer Linie aus-



2309 Functiones similes, Funda

ausdrücket, so entweder aus ermeldeter Linie oder einer Potentz von ihr bestehet, oder aus derselben Linie mit andern beständigen Grössen auf alle mögliche Art zusammen gesetzet ist. Z. E. wenn x eine Linie oder andere veränderliche Grösse ist; a, b, c, m aber beständige Grössen sind, so ist z. E.

$$\frac{a^3 x \pm bx^2}{mc}$$

eine Function der Linie x. Die allgemeine Expression der Function einer Linie A ist

$$\overbrace{mA^a + nA^b \, etc.}^{\alpha} + \overbrace{pA^d + qA^c \, etc.}^{\beta} + \overbrace{sA^g + tA^h \, etc.}^{\gamma} + \overbrace{xA^i + yA^l \, etc.}^{\delta} \, etc. \pm etc.$$

Die Functiones zweyer Linien werden ähnlich genennet, wenn die Combination einerley beständiger Grössen mit der Linie auf einerley Art geschiehet, da man z. E. in der Function der Linie A. alle beständigen Grössen mit ihren Signis stehen läßt, und lediglich an statt der Linie A die andere Linie B substituiret: Also wäre die Function der Linie B in der allgemeinen Expression der Function der Linie A ähnlich, wenn solche folgender massen beschaffen wäre:

$$\overbrace{mB^a + nB^b \, etc.}^{\alpha} + \overbrace{pB^d + qB^c \, etc.}^{\beta} \, etc. + \overbrace{sB^g + tB^h \, etc.}^{\gamma} + \overbrace{xB^i + yB^l \, etc.}^{\delta} \, etc. \pm etc.$$

Funda Galeni Fundamento 2310

Diese Bandage dienet den gantzen Verband des Hauptes zu bedecken, und feste zu halten.

Funda Galeni ist eine vierhauptige Binde. Wird zum schadhafften Unterkiefer gebrauchet.

Funda mit drey Binden, siehe Binden der Nase, Tom. III. p. 1874.

Funda mit zwey Binden, siehe Binden der Nase, Tom. III. p. 1874.

Funda *Petit*, siehe Bandage zum Bruch und Verrenckung der Kniescheibe, Tom. III. pag. 324.

Funda pro labio leporino. Die Schleuder zur Hasen-Scharte. Wird also gemacht aus einen Stück Leinewand, von dritte halb Ellen lang, und einem quer-Daumen breit, welches gedoppelt zusammen gelegt, biß auf eine halbe Hand breit lang in zwey Köpffe geschnitten wird. Die Application geschiehet also: Nachdem der mittelste Theil dieser Binde am Genicke angeleget, führet man die Köpffe neben denen Ohren über die Backen zu der Ober-Leffze creutzweiß, um den gantzen Verband zu bedecken, und die Backen vorwärts zu treiben, damit die Nadeln bey geringer Bewegung nicht ausreissen, und also die angezogene und vereinigte Leffzen sich nicht wieder von einander geben. Die Köpffe kehret man wieder zurück zum Hinter-Haupt, von dar wieder nach der Ober-Leffze, so, daß die eine Tour die andern bedecke; Die Binde machet man am Hinter-Haupt feste. Diese Bandage dienet, nicht nur den gantzen Verband zu bedecken, und feste zu halten, sondern vornemlich die Backen anzuziehen, damit

Der *Große Zedler* war das umfangreichste Wörterbuch der Frühen Neuzeit mit fast 290 000 Einträgen auf ca. 68 000 Seiten; es erschien 1732-1750, 1755.

Der Eintrag *Function lineæ* in Zedlers 64bändigem „Universal Lexicon“ nebst 4 Zusatzbänden steht im Bd. 9, S. 1185f. bzw. Sp. 2308f., Halle und Leipzig 1735.

René Descartes (1596-1650)
Algebra und Geometrie

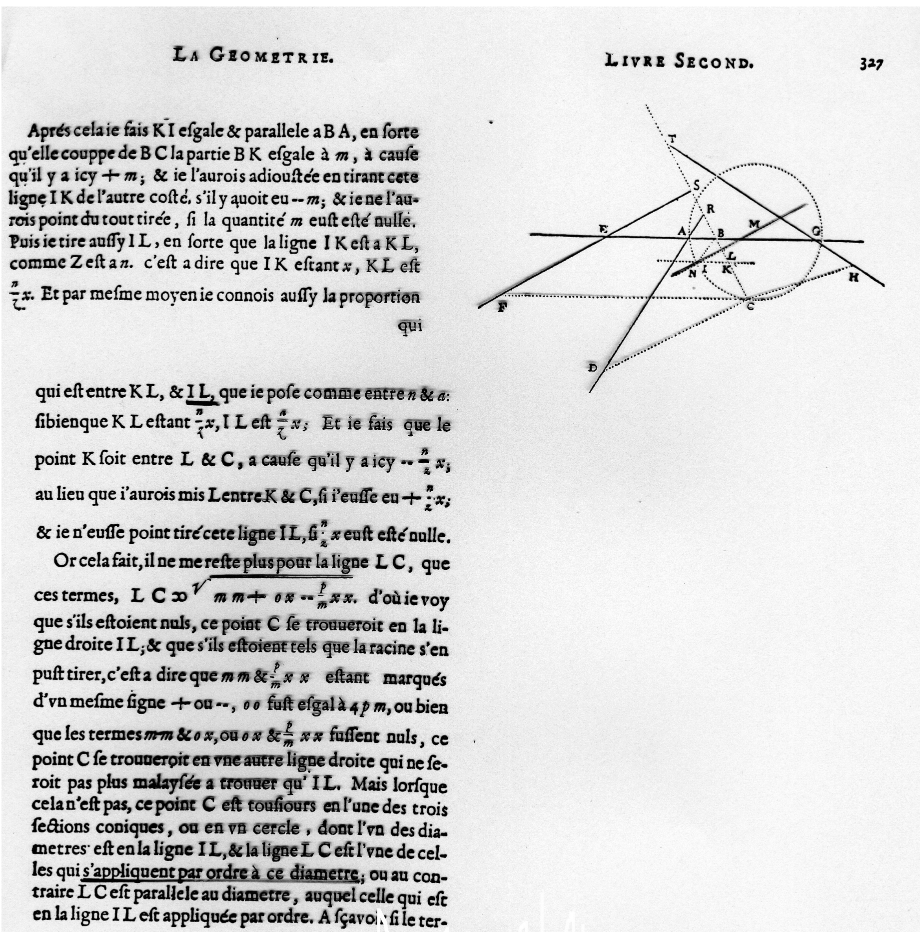
Verbindung von Algebra und Geometrie (später analytische Geometrie genannt)

$$G(x, y) = 0$$

↓	↓
<u>Algebra</u>	<u>Geometrie</u>
algebr. Gleichung	*(algebr.) Kurve*
x, y Unbestimmte im Sinn d. Algebra, keine Variablen	punktweise Konstruktion einer Kurve

La Géométrie, 1637

Seite mit Abbildung, die die Descartesschen Koordinaten-linien zeigt, und Abbildungen neuer Zeicheninstrumente

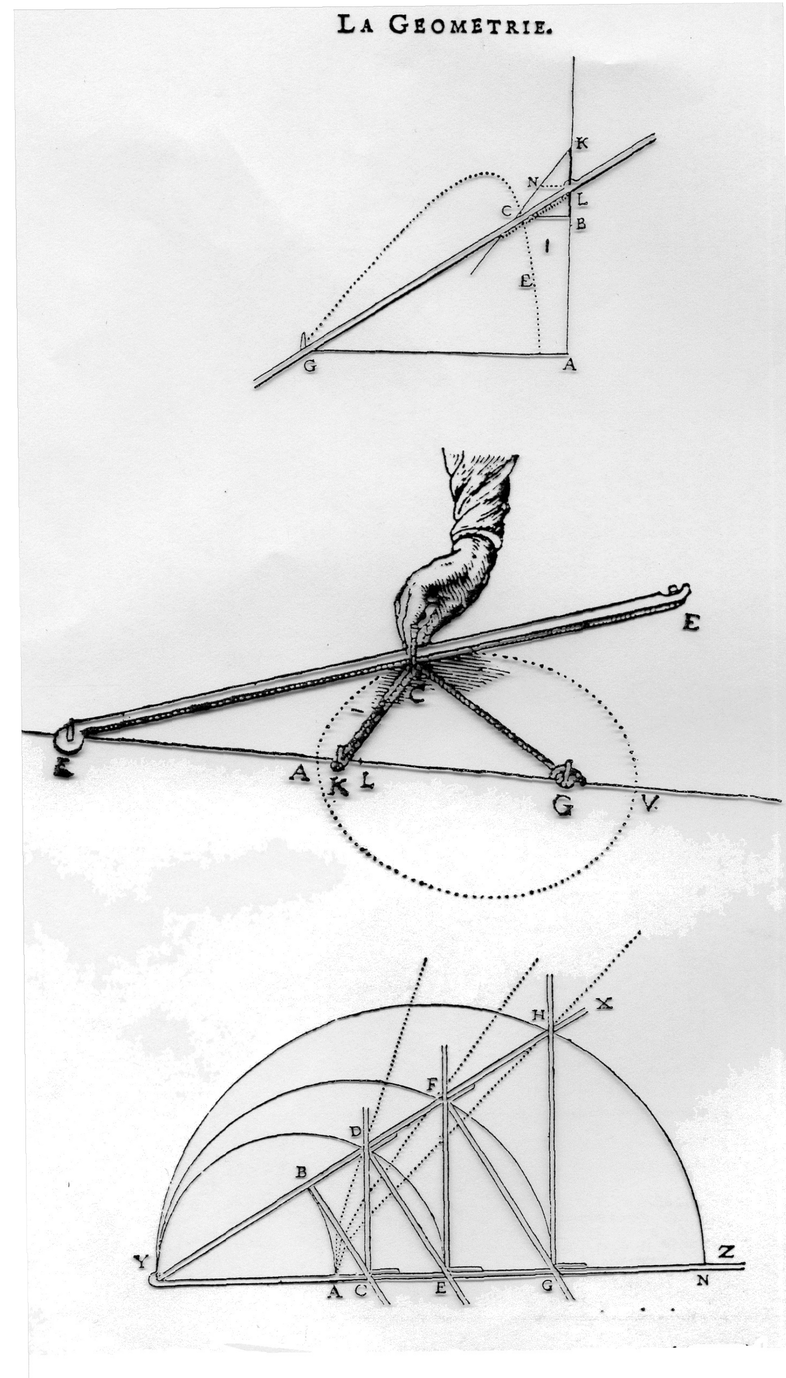


La Geometrie. — Livre Second. 327

Aprés cela ie fais K I esgale & parallele a B A, en sorte qu'elle couppe de B C la partie B K esgale à m, à cause qu'il y a icy $+ m$; & ie l'aurois adioustée en tirant cete ligne I K de l'autre costé, s'il y auoit eu $-- m$; & ie ne l'aurois point du tout tirée, si la quantité m eust esté nulle. Puis ie tire aussy I L, en sorte que la ligne I K est a K L, comme Z est a n. c'est a dire que I K estant x, K L est $\frac{n}{z}x$. Et par mesme moyen ie connois aussy la proportion qui

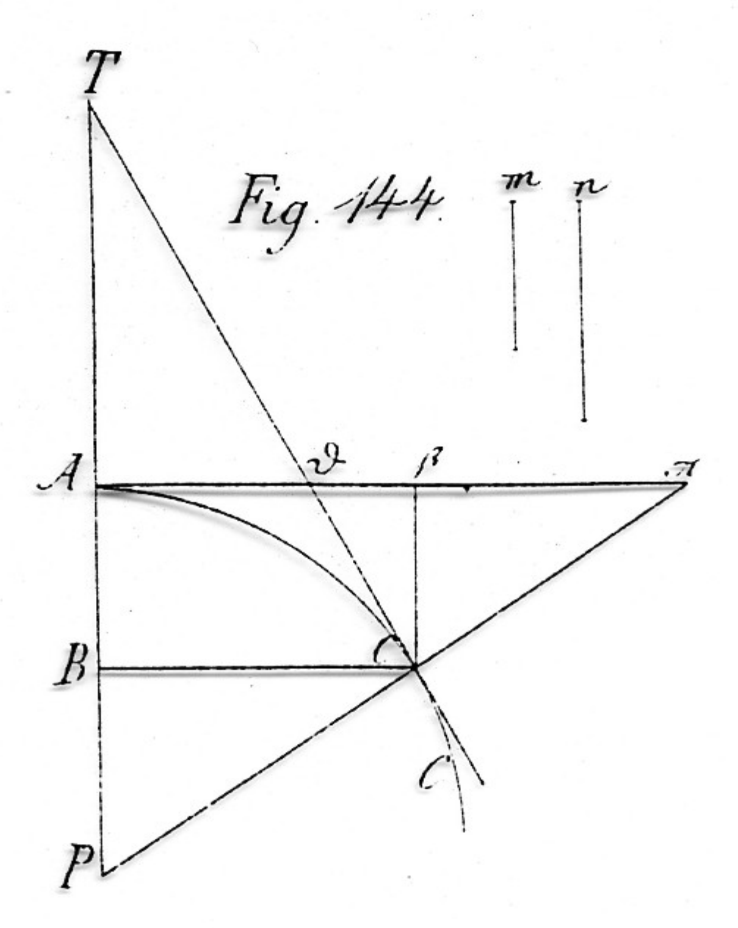
qui est entre K L, & I L, que ie pose comme entre n & a: si bienque K L estant $\frac{n}{z}x$, I L est $\frac{a}{z}x$; Et ie fais que le point K soit entre L & C, a cause qu'il y a icy $-- \frac{n}{z}x$; au lieu que i'aurois mis L entre K & C, si i'eusse eu $+ \frac{n}{z}x$; & ie n'eusse point tiré cete ligne I L, si $\frac{n}{z}x$ eust esté nulle.

Or cela fait, il ne me reste plus pour la ligne L C, que ces termes, L C $\infty \sqrt{mm + ox -- \frac{p}{m}xx}$. d'où ie voy que s'ils estoient nuls, ce point C se trouueroit en la ligne droite I L; & que s'ils estoient tels que la racine s'en pust tirer, c'est a dire que mm & $\frac{p}{m}xx$ estant marqués d'vn mesme signe + ou --, oo fust esgal à $4pm$, ou bien que les termes mm & ox, ou ox & $\frac{p}{m}xx$ fussent nuls, ce point C se trouueroit en vne autre ligne droite qui ne seroit pas plus malaysée a trouuer qu' I L. Mais lorsque cela n'est pas, ce point C est tousiours en l'une des trois sections coniques, ou en vn cercle, dont l'vn des diametres est en la ligne I L, & la ligne L C est l'vne de celles qui s'appliquent par ordre à ce diametre; ou au contraire L C est parallele au diametre, auquel celle qui est en la ligne I L est appliquée par ordre. A sçavoir si le ter-



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

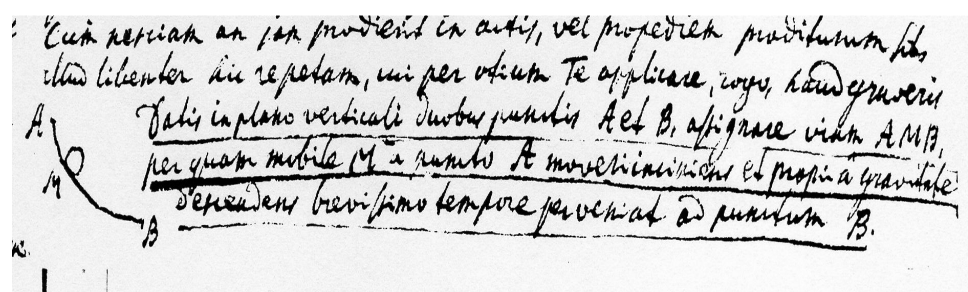
„De linea ex lineis … “, Acta erudit. 1692



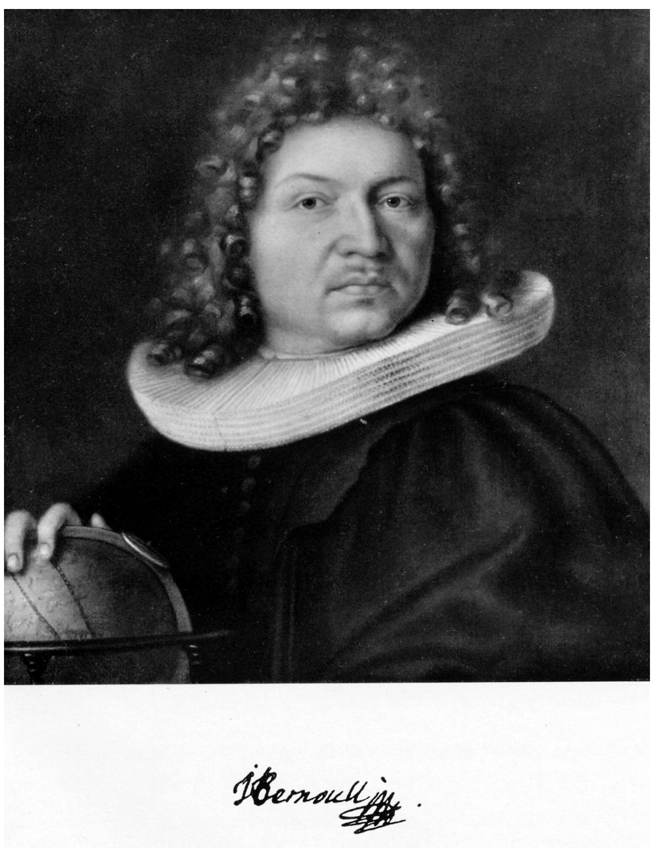
- $G(x, y) = 0$ x, y *Variable* (**!**)
  G algebraische oder transzendente Gleichung
- Funktionskonzept hat noch einen geometrischen Hintergrund, es schreibt einem Kurvenpunkt C eine geometrische Größe wie die Tangente (TC), die Subnormale (BP) oder den Krümmungsradius zu. (In Fig. 144 bezeichnet C auch die Kurve.)
- Begriffe Abszisse AB, Ordinate BC (für Descartessche Applikate)

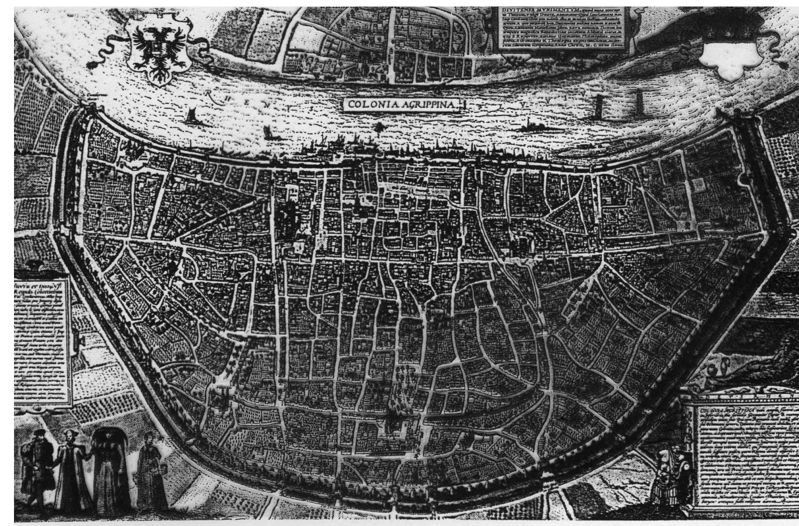
Johann Bernoulli
(1667-1748)
Von der Geometrie zur Algebra

In Briefen an G. W. Leibniz sprach auch Joh. Bernoulli von Funktionen; im Brief vom 2. 9. 1694 bezeichnet er die Summanden seiner „Taylor-entwicklung“ von $\int n\, dz$ als *Funktionen* von konstanten u. unbestimmten Größen; ebenso bei der Mitteilung des Brachis-tochronenproblems, Juni 1696.

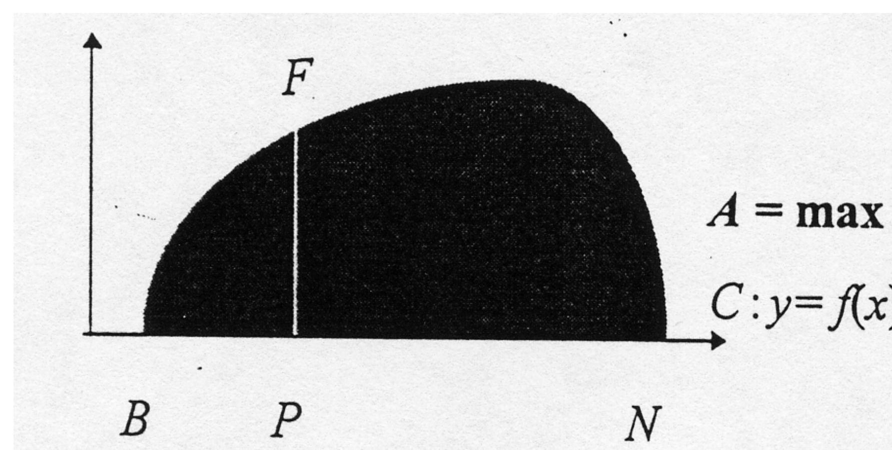

Cum nesciam an jam prodierit in actis, vel propediem proditurum sit, illud libenter hic repetam, cui per otium Te applicare, rogo, haud gravatim
Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare viam AMB, per quam mobile M a puncto A movere incipiens et propria gravitate descendens brevissimo tempore perveniat ad punctum B.

Jakob Bernoulli (1654-1705)
Der „analytische“ Funktionsbegriff
Die isoperimetrischen Probleme (1696), zunächst der einfache Fall des Problems der Dido

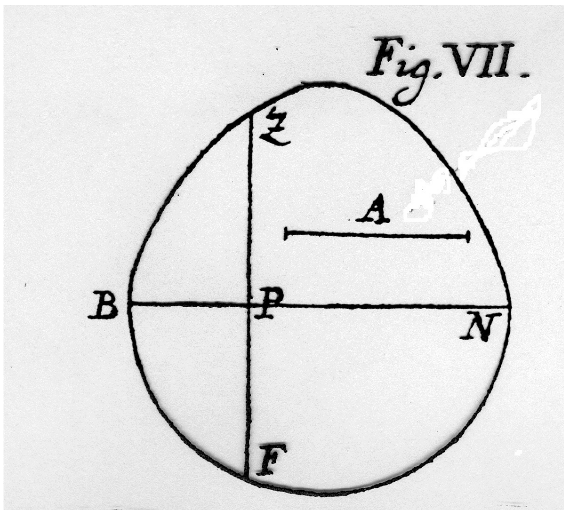




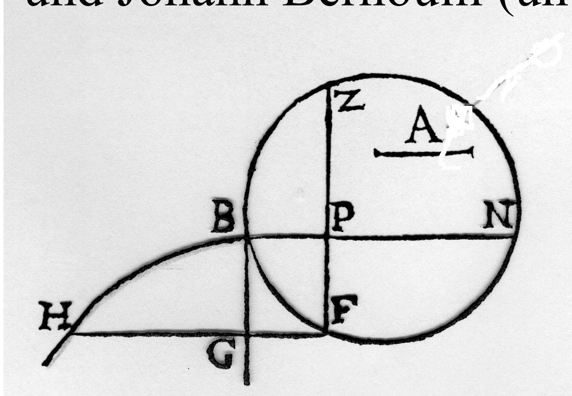
Mittelalterliche Stadtansicht von Köln



Isoperimetrische Probleme



Figur von Jakob Bernoulli (oben)
und Johann Bernoulli (unten)



Das allgemeine *isoperimetrische* Problem:

Der Umfang *BFNPB* ist von gegebener Länge. Maximiere die Fläche *BPNZB*, wobei *PZ* von *PF* abhängt (*PZ* ist eine *Funktion* von *PF, z.B.*

$$PZ = PF^n \text{ oder } = \sqrt[n]{PF}).$$

Die Kurve *BH ist beliebig:*

$$PZ = GH = f{:}(PF)\ .$$

B. Taylor in den Phil. Transactions:

I ſhew how the Method of Fluxions is to be applied to the Quadrature of all ſorts of Curves. In the following Propoſition I give a general Solution of the Problem of the *Iſoperimeter*, which has been treated of by the two famous Mathematical Brothers the *Bernoulli's*.

Joh. Bernoullis Definition einer Funktion (1696, gedr.1718)

REMARQUES

SUR CE QU'ON A DONNE' JUSQU'ICI DE SOLUTIONS DES PROBLEMES SUR LES ISOPERIMETRES;

Avec une nouvelle méthode courte & facile de les reſoudre ſans calcul, laquelle s'étend auſſi à d'autres Problêmes qui ont raport à ceux-là.

Par Mr. *Jean* BERNOULLI, Profeſſeur à *Bâle*.

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité compoſée de quelque maniére que ce ſoit de cette grandeur variable & de conſtantes.

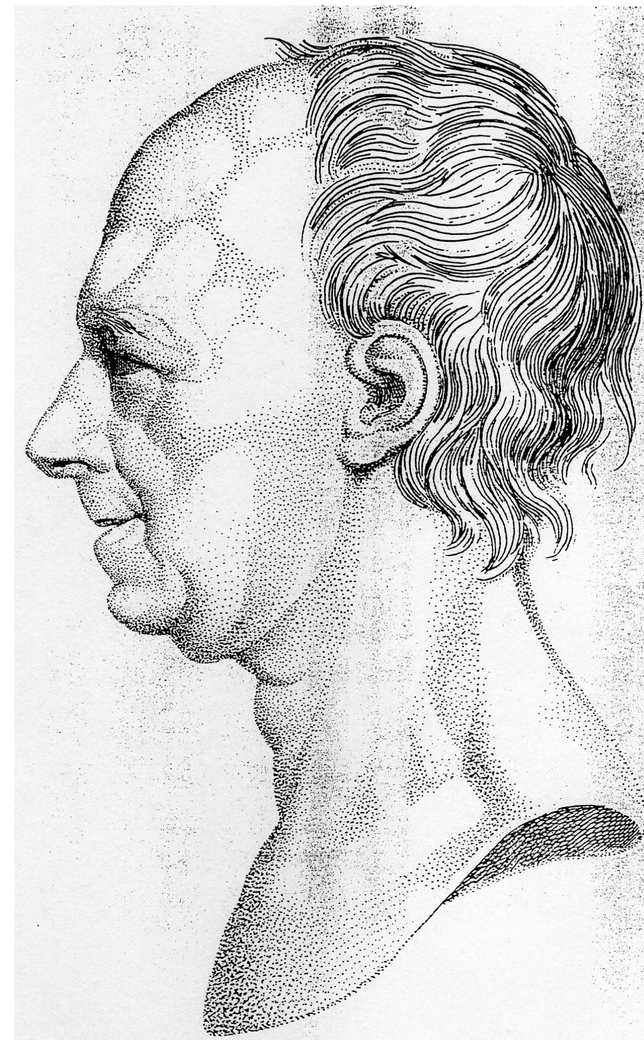
Man nennt hier eine zusammengesetzte Quantität, die sich in irgendeiner Weise aus einer variablen Größe und aus Konstanten ergibt, eine *Funktion* einer variablen Größe.

Leonhard Euler
(1707-1783)
Algebraische Analysis

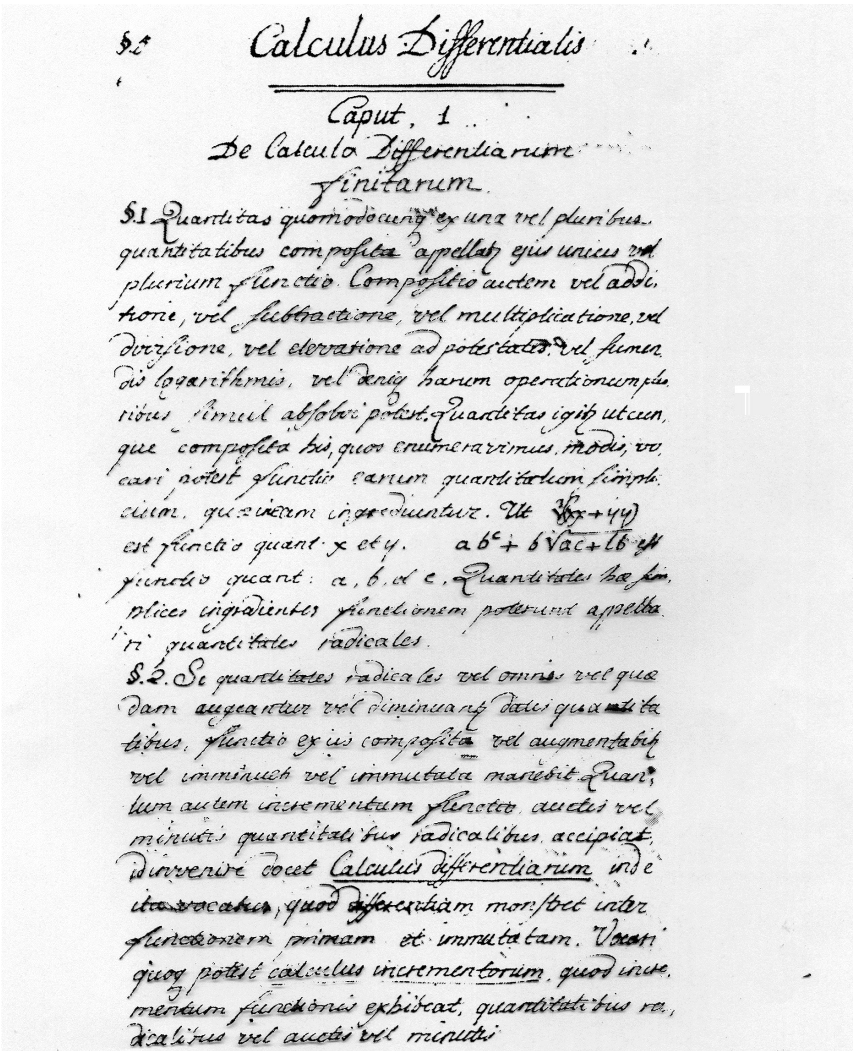
Leonhard Euler ist einer der bedeutendsten Mathematiker schlechthin; er beeinflusste die Analysis des 18. Jahrhunderts maßgeblich und galt bereits seinen Zeitgenossen als die

personifizierte Analysis,

die *analysis incarnate*. Euler ist Vertreter der algebraischen Analysis, aber auch ein sehr pragmatischer Mathematiker.



Der analytische Funktionsbegriff



Calculus Differentialis

Caput. 1

De Calculo Differentiarum finitarum

§.1 Quantitas quomodocunque ex una vel pluribus quantitatibus composita appellatur ejus unius vel plurium functio. Compositio autem vel additione, vel subtractione, vel multiplicatione, vel divisione, vel elevatione ad potestates, vel sumendis logarithmis, vel denique harum operationum pluribus simul absolvi potest. Quantitas igitur utcunque composita his, quos enumeravimus, modis, vocari potest functio earum quantitatum simplicium, quae ibi ingrediuntur. Ut $\sqrt{xx+yy}$ est functio quant. x et y. $ab^c + b\sqrt{ac+bb}$ est functio quant: a, b, et c. Quantitates hae simplices ingredientes functionem poterunt appellari quantitates radicales.

§.2. Si quantitates radicales vel omnes vel quaedam augeantur vel diminuantur datis quantitatibus, functio ex iis composita vel augmentabitur vel imminuetur vel immutata manebit. Quantum autem incrementum functio auctis vel minutis quantitatibus radicalibus accipiat, invenire docet Calculus differentiarum inde ita vocatus, quod differentiam monstret inter functionem primam et immutatam. Vocari quoque potest calculus incrementorum, quod incrementum functionis exhibeat, quantitatibus radicalibus vel auctis vel minutis

Konzept Leonhard Eulers für eine Vorlesung über *Differentialrechnung* in St. Petersburg, etwa 1727/30. Euler, Anfang 20, folgt hier (§ 1) grundsätzlich seinem Lehrer Johann Bernoulli, aber im Rechenausdruck *erweitert* er bereits die zulässigen Operationen, z.B. durch den Logarithmus (im zweiten Beispiel) und führt mehrere Variable ein.

Algebraische Analysis (I)
Leonhard Euler

§. 7. Fit autem $dx - \frac{xda}{a}$ integrabile ſi multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a} + c$, deſignante c quantitatem conſtantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, ſi $f(\frac{x}{a} + c)$ denotet functionem quamcunque

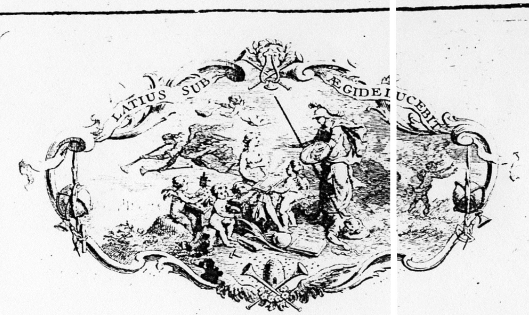
Einführung des Zeichens f(x) in den St. Petersburger Commentarii 1740.

4. *Functio quantitatis variabilis, eſt expreſſio analytica quomodocunque compoſita ex illa quantitate variabili, & numeris ſeu quantitatibus conſtantibus.*

Eine Funktion einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck (expressio analytica)*, der auf irgendeine Weise* (quomodocumque) *aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus konstanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist.* („*Introductio*“, 1748; Kap. 1, § 4)

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Profeſſore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.

TOMUS PRIMUS.



LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1748 (geschr. Vor 1745 in Berlin)

Algebraische Analysis (II)

Leonhard Euler

INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

1748

PER SERIES INFINITAS.

; num vero per hujuſmodi terminorum ſe- CAP. IV.
riem infinitam exhiberi poſſit, ſi quis dubitet, hoc dubium
per ipſam evolutionem cujuſque Functionis tolletur.

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$$

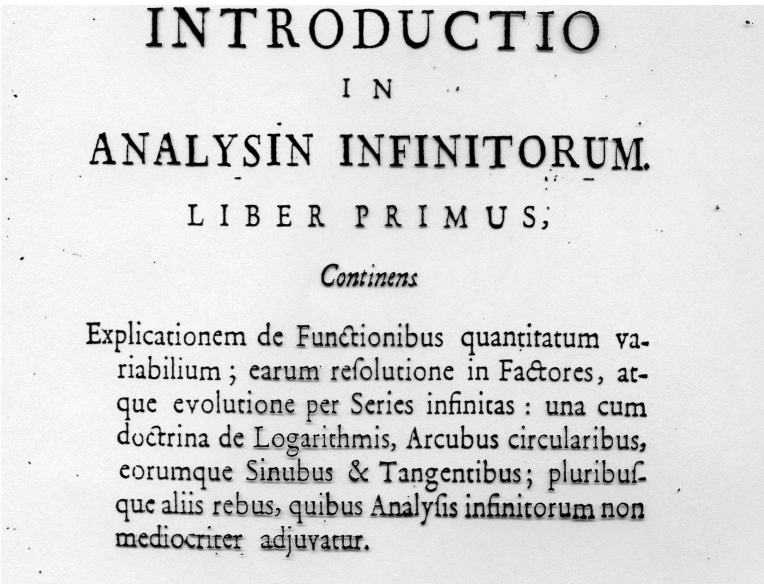
$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \&c.$$

Kapitel 4, Von der Darstellung der Funktionen durch unendliche Reihen

Alsdann dürfte es zweifellos sein, dass sich jede Funktion von z in einen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma$ ...verwandeln läßt, in welchem die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots$ irgendwelche Zahlen bedeuten [also auch Puiseux- und Laurentreihen].

Algebraische Analysis (III)
Leonhard Euler

Themen der „Introductio“, Bd. 1,1748



INTRODUCTIO
IN
ANALYSIN INFINITORUM.
LIBER PRIMUS,
Continens
Explicationem de Functionibus quantitatum variabilium; earum resolutione in Factores, atque evolutione per Series infinitas: una cum doctrina de Logarithmis, Arcubus circularibus, eorumque Sinubus & Tangentibus; pluribusque aliis rebus, quibus Analysis infinitorum non mediocriter adjuvatur.

Funktionen dominieren; endliche algebraische Ausdrücke werden ins Unendliche erweitert, z.B.

Polynom → unendl. Reihe
Produkt→ unendl. Produkt
Bruch→unendl. Kettenbruch

Algebraische Analysis (III)
Leonhard Euler

Themen der „Introductio“, Bd. 1,1748

INTRODUCTIO
IN
ANALYSIN INFINITORUM.
LIBER PRIMUS,
Continens

Explicationem de Functionibus quantitatum variabilium; earum resolutione in Factores, atque evolutione per Series infinitas: una cum doctrina de Logarithmis, Arcubus circularibus, eorumque Sinubus & Tangentibus; pluribusque aliis rebus, quibus Analysis infinitorum non mediocriter adjuvatur.

Funktionen dominieren; endliche algebraische Ausdrücke werden ins Unendliche erweitert, z.B.
Polynom → unendl. Reihe
Produkt→ unendl. Produkt
Bruch→unendl. Kettenbruch

Funktionsdefinition in den „Institutiones“, 1755

INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
1755

PRAEFATIO.

Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant; eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur;

Sind nun Größen voneinander so abhängig, daß keine eine Veränderung erfahren kann, ohne eine Veränderung der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man betrachtet, eine *Funktion* der anderen.

Der Wechsel von variablen Größen zur Funktion in einem halben Jahrhundert

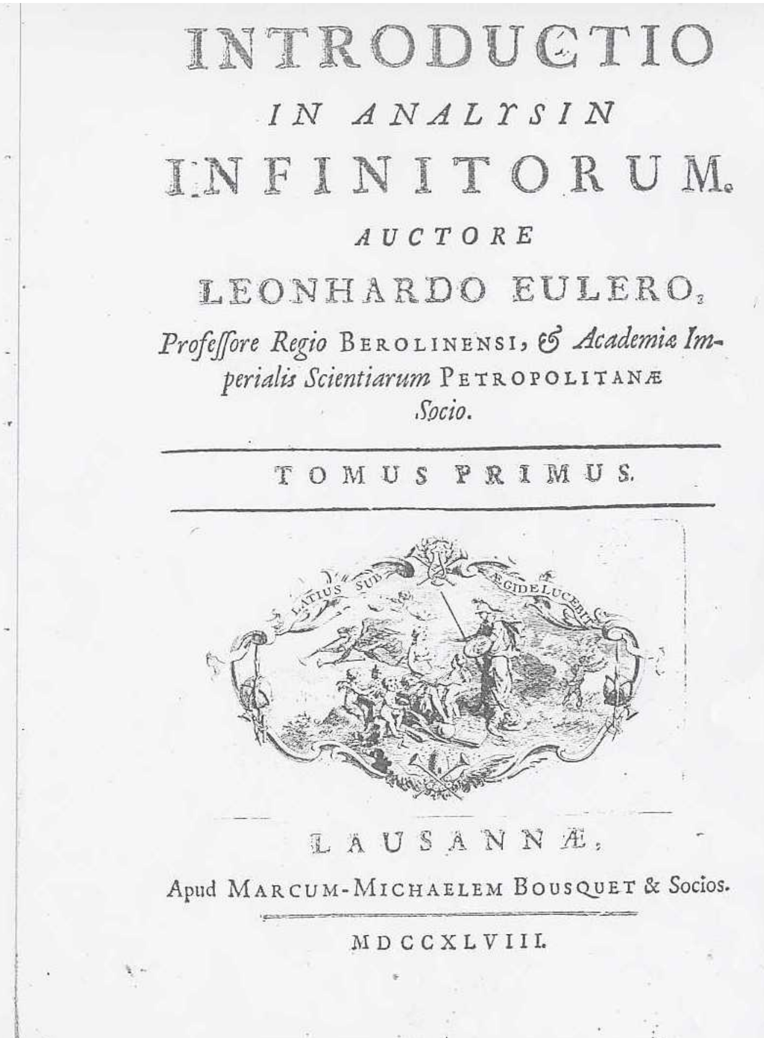
Inhaltsverzeichnisse von G. l'Hospitals „Analyse des infiniment petits“ (1696), L. Euler „Introductio in analysin infinitorum“ (1748);

TABLE.

INDEX CAPITUM

TOMI PRIMI.

Algebraische Analysis (IV)
Die Tragweite der Potenzreihen



INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

Das Frontispiz zeigt allegorische Figuren (Musen), die rechnen. Die Ansicht öffnet sich nach hinten durch ein Portal, das die Überschrift „Analyse des infiniment-petits“ trägt und eine idyllische Landschaft zeigt: das durch die Analysis verheißene *promised land*.

Schwingungsgleichung

Spezialfall: schwingende Saite

Lineare pDgl. 2. Ordnung vom hyperbolischen Typ

- *u(t, x)* Auslenkung
  am Ort x zur Zeit *t*, *Saitenlänge L*

Jean d'Alembert (1717-1783)

$$u_{tt}(t, x) = c^2\, u_{xx}(t, x)$$

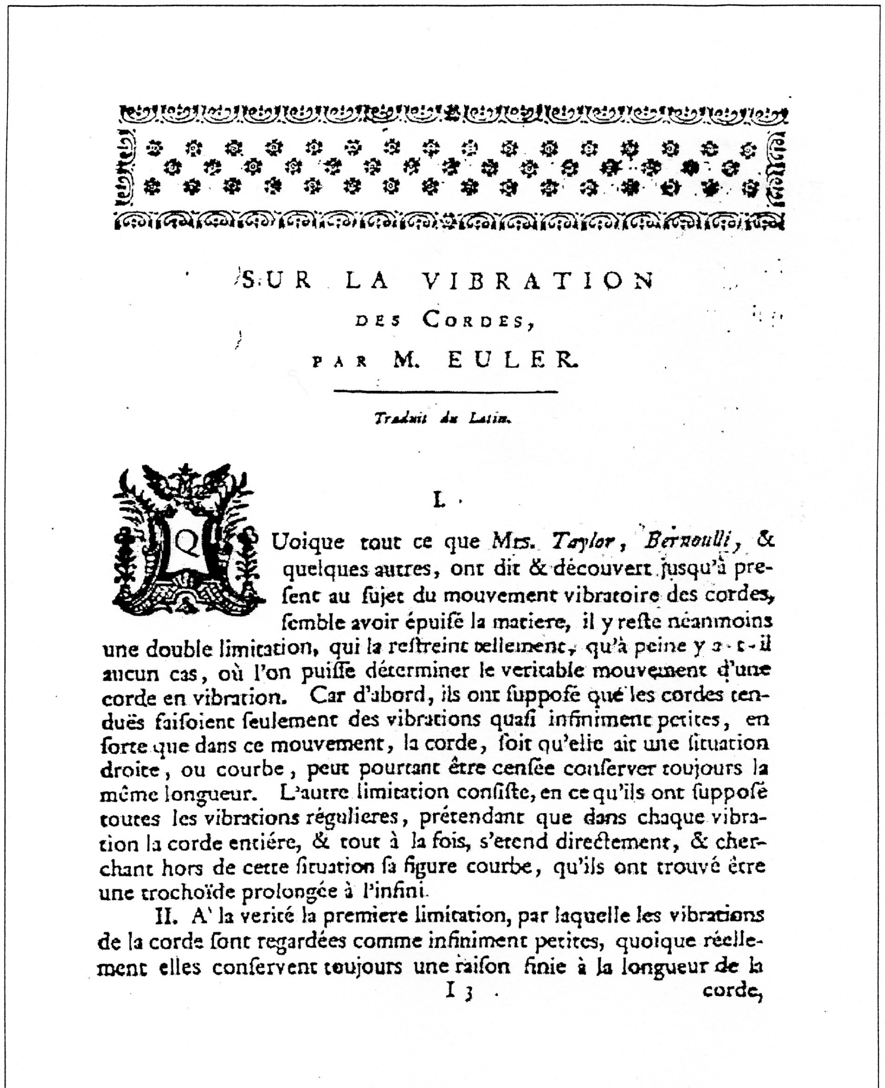
Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, L) = 0$

Anfangsauslenkung $u(0, x) = f(x)$ (periodisch)

- $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$ F, G bel. aus C^2,c=const
  Lösung von d'Alembert, 1747; ähnlich Euler, 1748; spezielle Lösungen aus trigonometrischen Funktionen.

Trigonometrische Reihen (I)

Das Problem der schwingenden Saite (1747 f.)



SUR LA VIBRATION
DES CORDES,
PAR M. EULER.

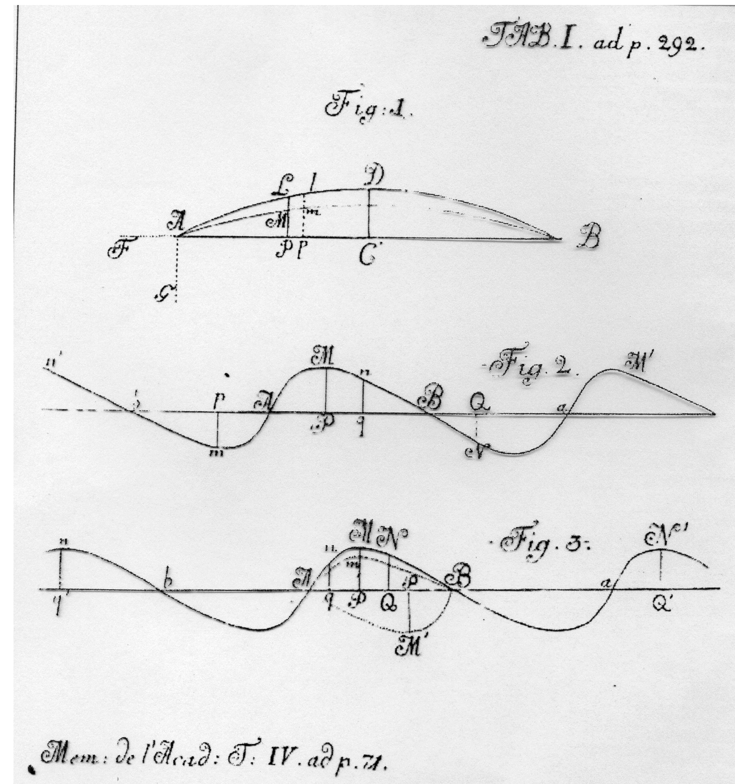
Traduit du Latin.

I.

Quoique tout ce que Mrs. *Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à present au sujet du mouvement vibratoire des cordes, semble avoir épuisé la matiere, il y reste néanmoins une double limitation, qui la restreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puisse déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont supposé que les cordes tenduës faisoient seulement des vibrations quasi infiniment petites, en sorte que dans ce mouvement, la corde, soit qu'elle ait une situation droite, ou courbe, peut pourtant être censée conserver toujours la même longueur. L'autre limitation consiste, en ce qu'ils ont supposé toutes les vibrations régulieres, prétendant que dans chaque vibration la corde entiére, & tout à la fois, s'etend directement, & cherchant hors de cette situation sa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la

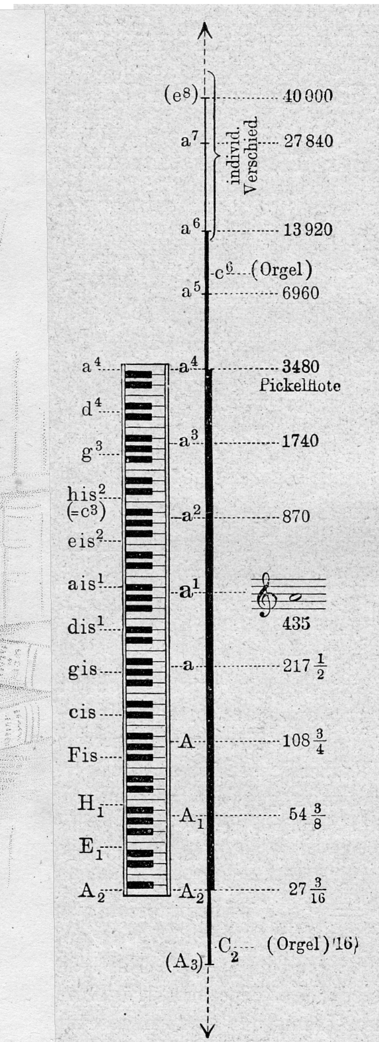
I 3 corde,

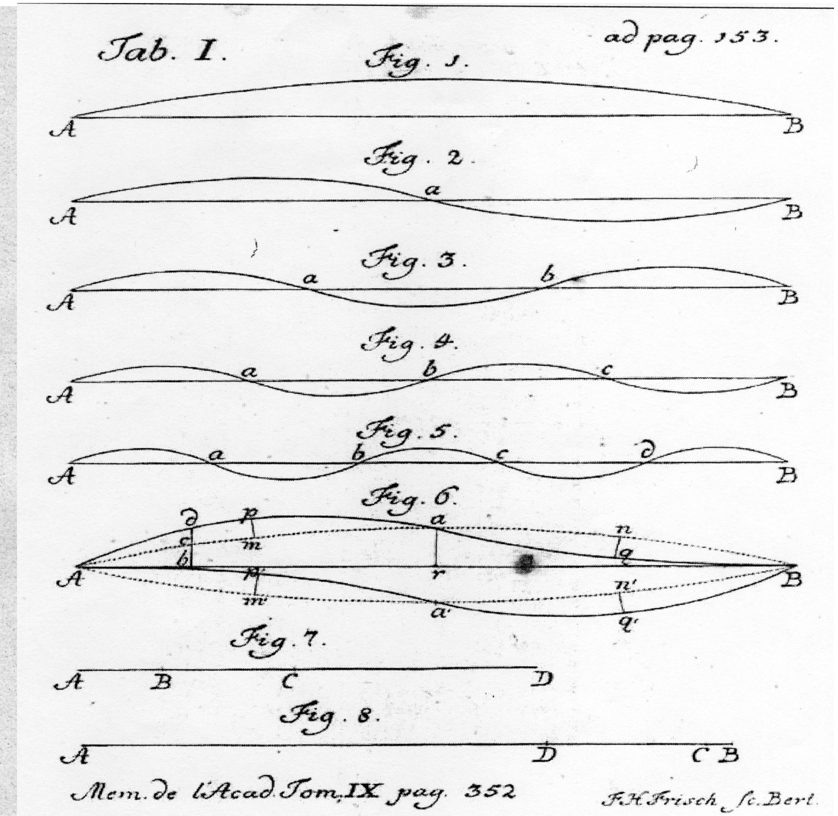


Das Problem wurde insbesondere von J. d'Alembert (als Mathematiker) und D. Bernoulli (als Physiker) behandelt; der pragmatische L. Euler kann dabei als ein mathematischer Physiker (neue Disziplin!) angesehen werden.

Trigonometrische Reihen (II)

Daniel Bernoulli (1700-1782)

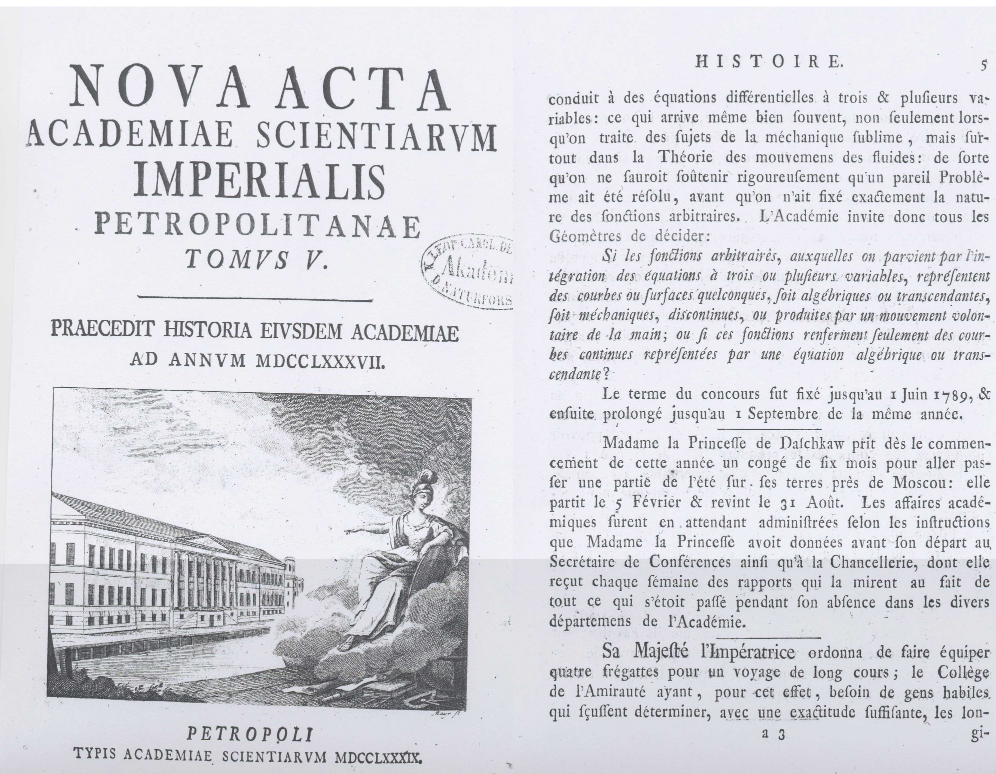




D. Bernoulli setzte eine beliebige Schwingung aus Eigenschwingungen („Obertönen") zusammen (*Superpositionen*), Berliner Mémoires 1753.

Was ist eine beliebige Funktion?

Preisschrift von Antoine Arbogast (1759-1803), „Mémoire über die Natur willkürlicher Funktionen, die sich als Lösungen von partiellen Dgln. ergeben“



NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS V.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXIX.

HISTOIRE. 5

conduit à des équations différentielles à trois & plusieurs variables: ce qui arrive même bien souvent, non seulement lorsqu'on traite des sujets de la méchanique sublime, mais surtout dans la Théorie des mouvemens des fluides: de sorte qu'on ne sauroit soûtenir rigoureusement qu'un pareil Problème ait été résolu, avant qu'on n'ait fixé exactement la nature des fonctions arbitraires. L'Académie invite donc tous les Géomètres de décider:

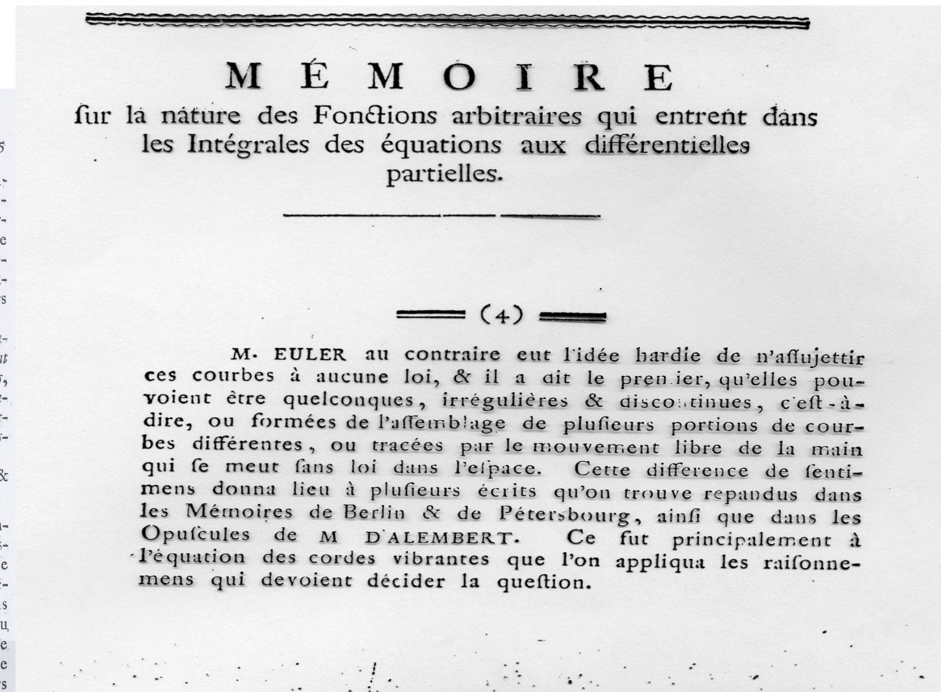
Si les fonctions arbitraires, auxquelles on parvient par l'intégration des équations à trois ou plusieurs variables, représentent des courbes ou surfaces quelconques, soit algébriques ou transcendantes, soit méchaniques, discontinues, ou produites par un mouvement volontaire de la main; ou si ces fonctions renferment seulement des courbes continues représentées par une équation algébrique ou transcendante?

Le terme du concours fut fixé jusqu'au 1 Juin 1789, & ensuite prolongé jusqu'au 1 Septembre de la même année.

Madame la Princesse de Daschkaw prit dès le commencement de cette année un congé de six mois pour aller passer une partie de l'été sur ses terres près de Moscou: elle partit le 5 Février & revint le 31 Août. Les affaires académiques furent en attendant administrées selon les instructions que Madame la Princesse avoit données avant son départ au Secrétaire de Conférences ainsi qu'à la Chancellerie, dont elle reçut chaque semaine des rapports qui la mirent au fait de tout ce qui s'étoit passé pendant son absence dans les divers départemens de l'Académie.

Sa Majesté l'Impératrice ordonna de faire équiper quatre frégattes pour un voyage de long cours; le Collège de l'Amirauté ayant, pour cet effet, besoin de gens habiles qui sçussent déterminer, avec une exactitude suffisante, les longi-

a 3

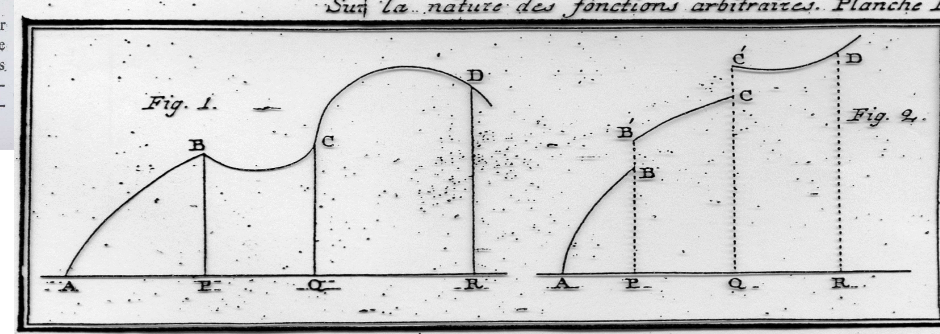


MÉMOIRE
sur la nature des Fonctions arbitraires qui entrent dans les Intégrales des équations aux différentielles partielles.

(4)

M. EULER au contraire eut l'idée hardie de n'assujettir ces courbes à aucune loi, & il a dit le premier, qu'elles pouvoient être quelconques, irrégulières & discontinues, c'est-à-dire, ou formées de l'assemblage de plusieurs portions de courbes différentes, ou tracées par le mouvement libre de la main qui se meut sans loi dans l'espace. Cette difference de sentimens donna lieu à plusieurs écrits qu'on trouve repandus dans les Mémoires de Berlin & de Pétersbourg, ainsi que dans les Opuscules de M D'ALEMBERT. Ce fut principalement à l'équation des cordes vibrantes que l'on appliqua les raisonnemens qui devoient décider la question.

Sur la nature des fonctions arbitraires. Planche I.



Preisaufgabe der St. Petersburger Akademie über willkürlicher Funktionen, 1787

Wärmeleitungsgleichung

Spezialfall: wärmeleitender Stab der Länge L

Lineare pDgl. 2. Ordnung vom parabolischen Typ
$u(t, x)$ Temperaturverteilung am Ort x zur Zeit t

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$$

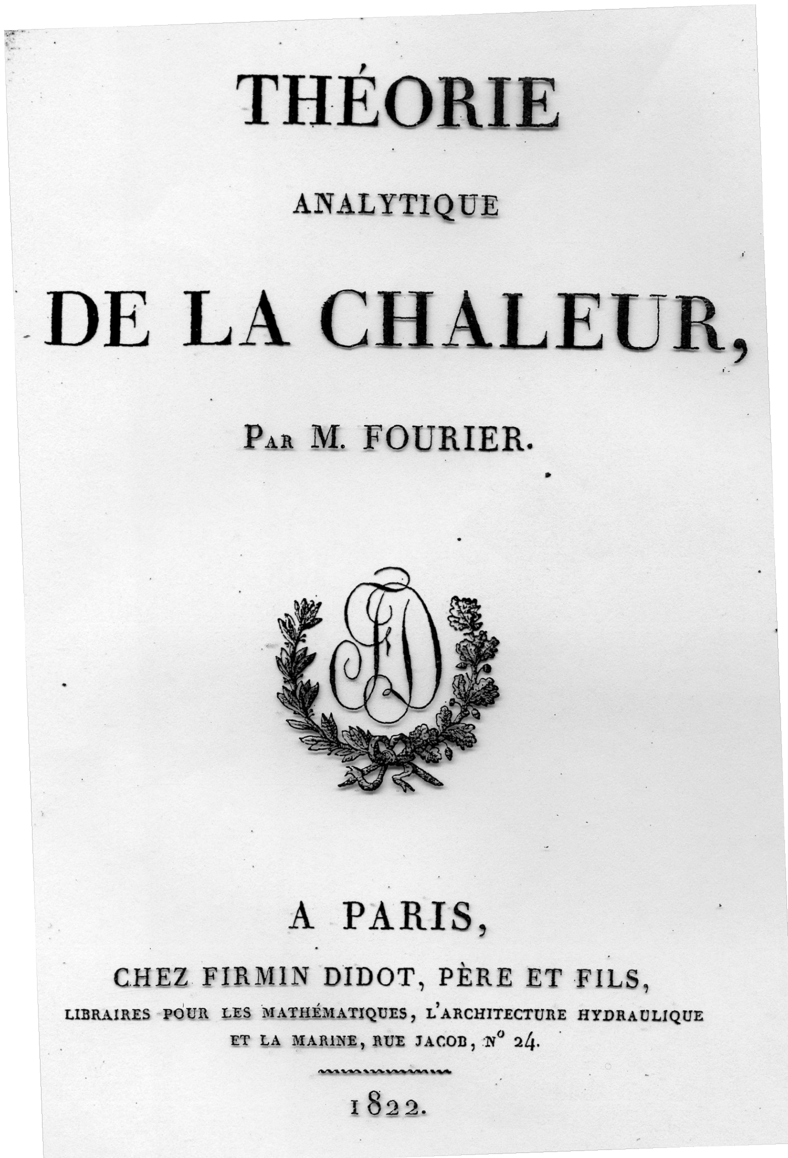
- Randtemperatur $u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t \geq 0,$
- Anfangstemperatur $u(0, x) = f(x)$.

Periodische Lösungen:

- $u(t, x) = \sum^{\infty} b_k \, e^{-kkt} \sin(kx)$ mit $f(x) = u(0, x) = \sum^{\infty} b_k \sin(kx)$
- Gegenüber der Wellengleichung, bei der die „Vorgänge“ (Schwingungen) geometrisch sichtbar sind, ist die („algebraische“) Wärmeleitung abstrakter, da deren genaue Wahrnehmung auf Messungen beruht. Kurzzeitige Temperaturänderungen können im Modell als Sprünge idealisiert werden.

Fourieranalysis (I)

$$f(x) = a_0/2 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \ldots + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x)$$
$$+ b_4 \cos(4x) + \ldots$$



THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Jean Baptist Fourier (1768- 1830)

Unten: Kap. III, Sektion VI Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine trigonometrische Reihe

SECTION VI.

Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques.

ART. 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214.

210. On obtient ce développement en déterminant les valeurs des coëfficients inconnus dans les équations suivantes dont le nombre est infini,

$$\begin{aligned} A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + \text{etc.} \\ B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + \text{etc.} \\ C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + \text{etc.} \\ D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Théorie de la chaleur (1822)

Definition einer allgemeinen Funktion

552 THÉORIE DE LA CHALEUR.

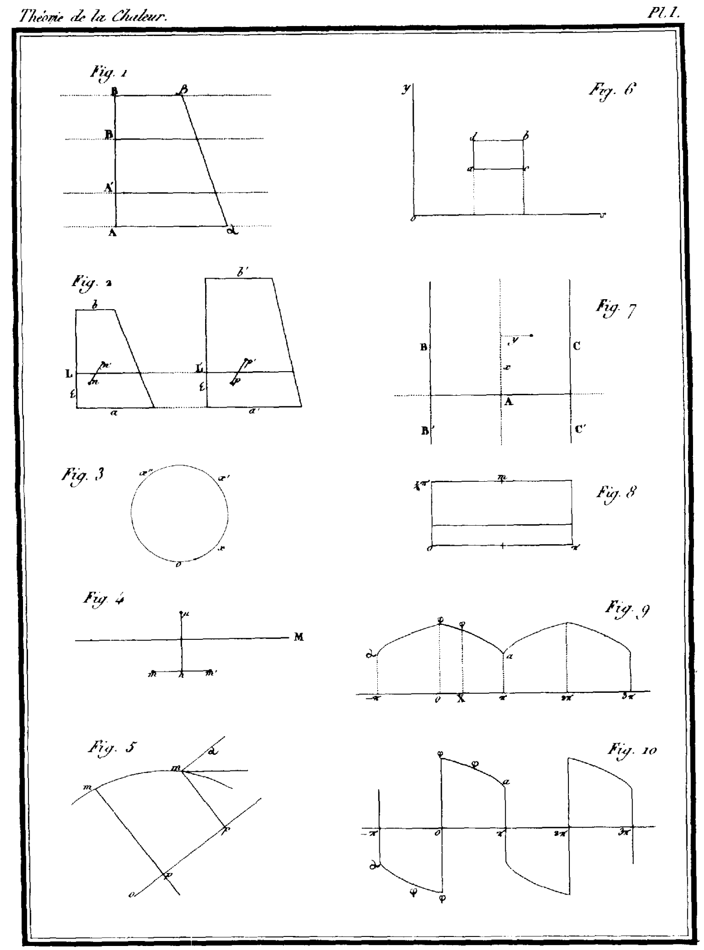
autres ordonnées seraient supposées nulles, en sorte que la courbe n'aurait de forme tracée qu'au-dessus de l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, et se confondrait avec l'axe des α dans toutes les autres parties de son cours.

La même démonstration fait connaître que l'on ne considère point ici des valeurs *infinies* de x, mais des valeurs *actuelles* et déterminées.

On pourrait aussi examiner d'après les mêmes principes les cas où la fonction fx deviendrait infinie, pour des valeurs singulières de x comprises entre des limites données; mais cela ne se rapporte point à l'objet principal que nous avons en vue, qui est d'introduire dans les intégrales les fonctions arbitraires; il est impossible qu'aucune question naturelle conduise à supposer que la fonction fx devient infinie, lorsqu'on donne à x une valeur singulière comprise entre des limites données.

En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques *actuelles*, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité.

Il peut résulter de la nature même de la question, et de l'analyse qui s'y applique, que le passage d'une ordonnée à la suivante doive s'opérer d'une manière continue. Mais il s'agit alors de conditions spéciales, et l'équation générale (B), considérée en elle-même, est indépendante de ces conditions. Elle s'applique rigoureusement aux fonctions discontinues.



„Im allgemeinen stellt die Funktion *fx* [= *f*(*x*)] eine Folge von Werten oder Ordinaten dar, wobei jeder bzw. jede von ihnen *willkürlich* ist.“ (S. 552)

Fourieranalysis (II)

114

DISQVISITIO VLTERIOR

SVPER SERIEBVS

SECVNDVM MVLTIPLA CVIVSDAM ANGVLI PROGREDIENTIBVS.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 26 Maii 1777.

§. 1.

Contemplabor hic denuo eiusmodi functiones cuiuspiam anguli Φ, quas in ſeries, quarum termini coſinus angulorum multiplorum ipſius Φ continent, evolvere liceat. Scilicet ſi Φ denotet talem functionem anguli ϕ, quae per evolutionem huiusmodi ſeriei oriatur:

$$\Phi = A + B \,\text{coſ.}\, \phi + C \,\text{coſ.}\, 2\phi + D \,\text{coſ.}\, \phi + E \,\text{coſ.}\, 4\phi + \text{etc.}$$

manifeſtum eſt talem reſolutionem ſemper ſuccedere, quando eadem functio Φ per ſolutionem communem in talem ſeriem converti poteſt:

$$\Phi = \alpha + \beta \,\text{coſ.}\, \phi + \gamma \,\text{coſ.}\, \phi^2 + \delta \,\text{coſ.}\, \phi^3 + \varepsilon \,\text{coſ.}\, \phi^4 + \text{etc.}$$

propterea quod omnes poteſtates coſinuum in coſinus multiplorum eiusdem anguli reſolvi poſſunt, id quod in poteſtatibus ſinuum non ſuccedit, quoniam tantum poteſtates pares in coſinus multiplorum reſolvuntur, poteſtates vero impares ad ſinus multiplorum perducuntur. Quia vero omnes ſinus

116

$$\Phi = A + B \,\text{coſ.}\, \phi + C \,\text{coſ.}\, 2\phi + D \,\text{coſ.}\, 3\phi + E \,\text{coſ.}\, 4\phi + \text{etc.}$$

tum ſingulae quantitates A, B, C, D, E, etc. per ſequentes formulas integrales determinantur, ſiquidem in ſingulis integratio a termino $\phi = 0$, usque ad terminum $\phi = \pi$ extendatur, denotante π ſemiperipheriam circuli cuius radius $= 1$.

1. $A = \frac{1}{\pi} \int \Phi \,\partial \phi.$
2. $B = \frac{2}{\pi} \int \Phi \,\partial \phi \,\text{coſ.}\, \phi.$
3. $C = \frac{2}{\pi} \int \Phi \,\partial \phi \,\text{coſ.}\, 2\phi.$
4. $D = \frac{2}{\pi} \int \Phi \,\partial \phi \,\text{coſ.}\, 3\phi.$
5. $E = \frac{2}{\pi} \int \Phi \,\partial \phi \,\text{coſ.}\, 4\phi.$

etc. etc.

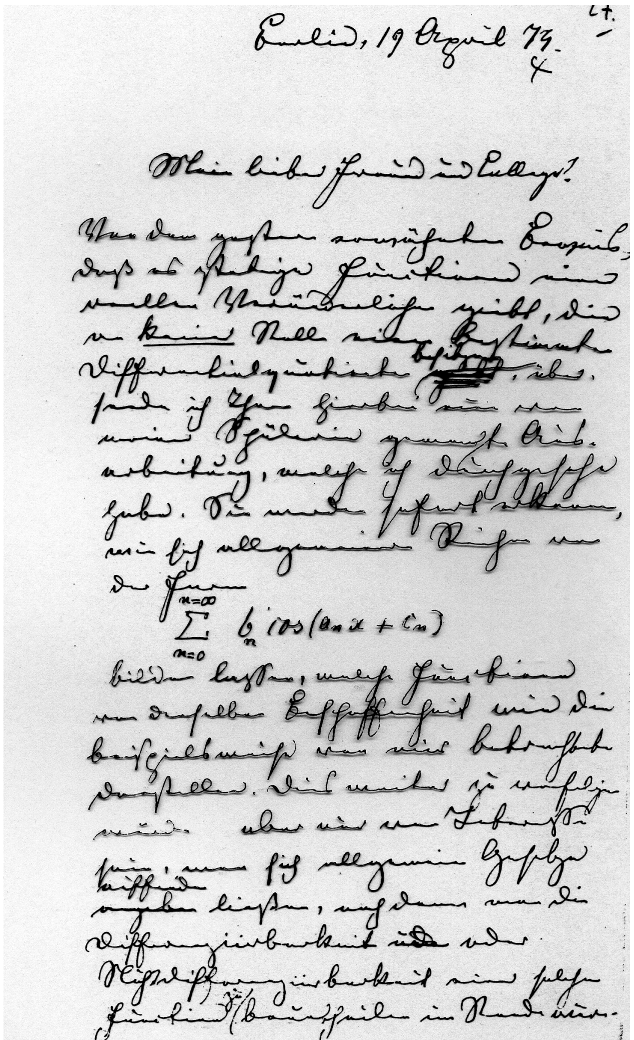
ubi notetur primum coëfficientem eſſe $\frac{1}{\pi}$ dum ſequentes omnes ſunt $\frac{2}{\pi}$.

Beim Aufstellen einer Fourierreihe für eine Funktion gibt es 3 Probleme:

i) Finden der Koeffizienten,
ii) die Konvergenzfrage,
iii) die Darstellungsfrage.

Euler löste bereits Problem i) mittels der Orthogonalität trigonometrischer Funktionen.

Über die Natur stetiger Funktionen


Berlin, 19 April 79.

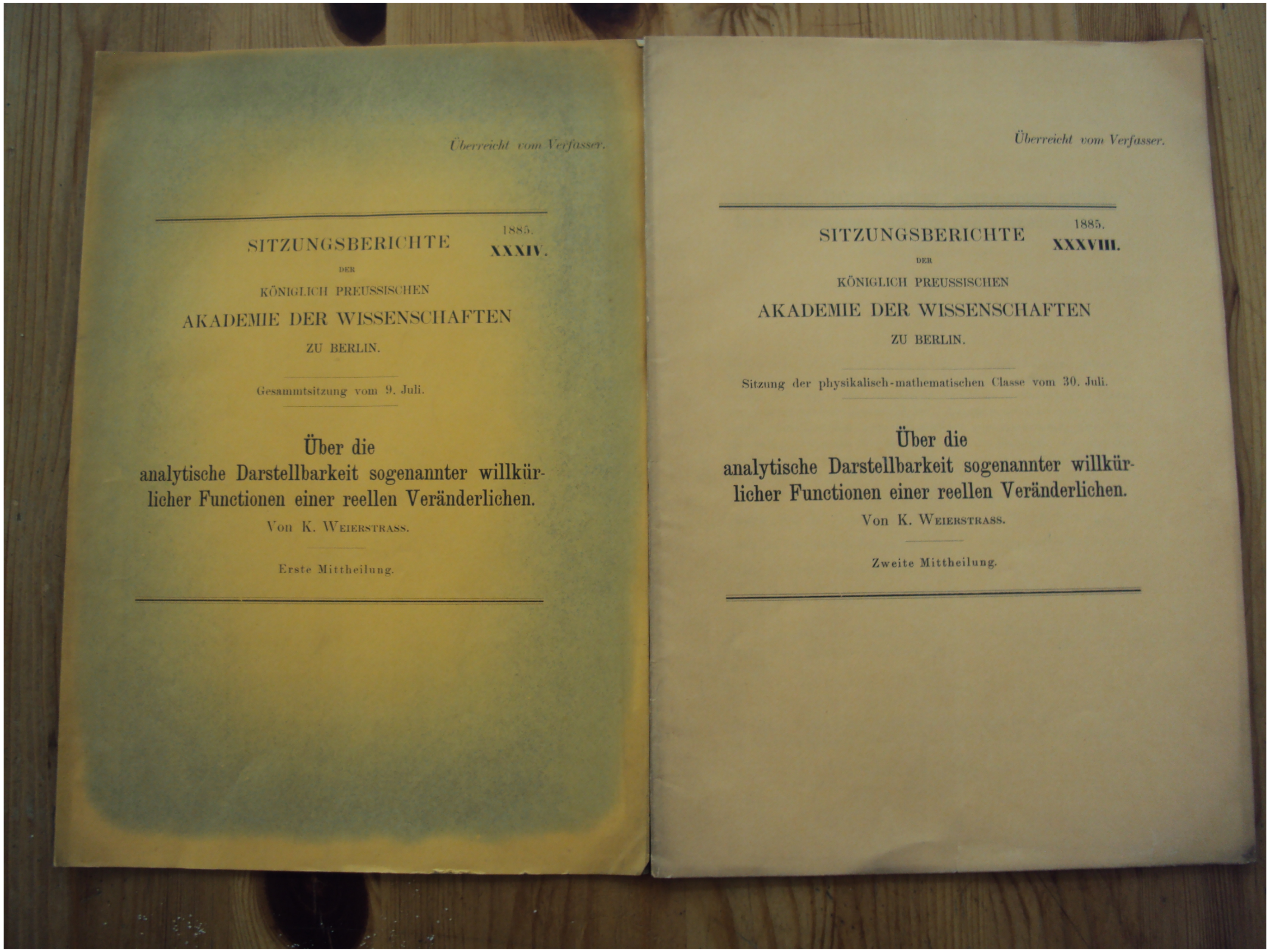
$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \cos(a_n x + c_n)$$

Karl Weierstraß
(1815-1897)

Brief von Karl Weierstraß an Hermann Amandus Schwarz (19. 4. 1879) über die Entdeckung einer stetigen Funktion (Fourierreihe!), die nirgends differenzierbar ist.

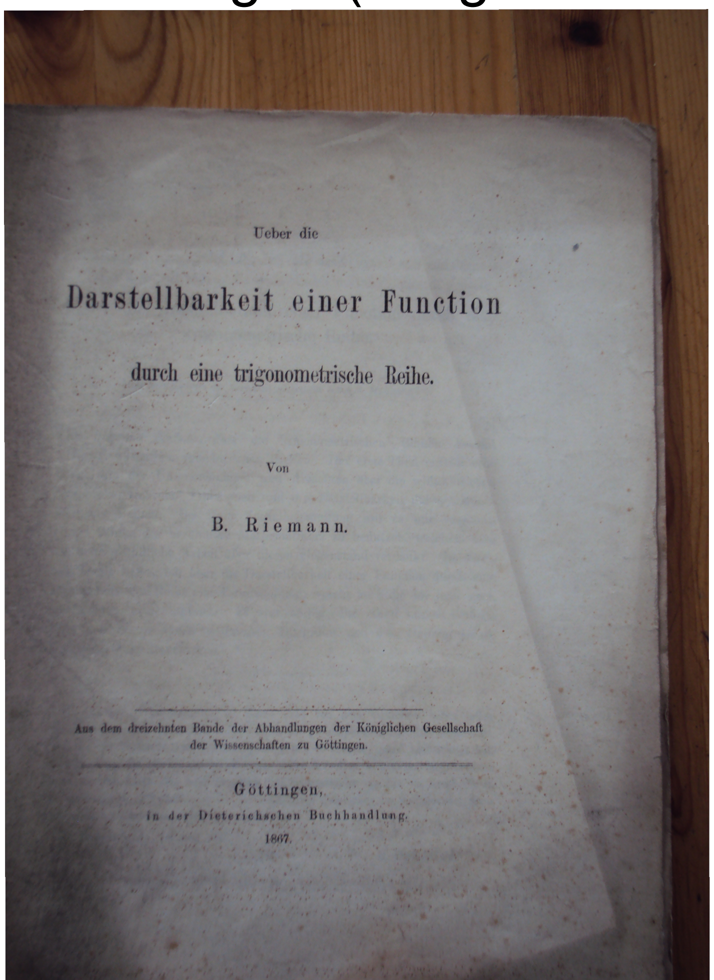
Darstellung willkürlicher Funktionen

Zwei Beiträge von Karl Weierstraß, 1885, verfaßt allerdings erst nach seinem *Approximationssatz* von 1885! Davor hatte er auch die Definitionen einer Funktion von Bernoulli-Euler als verfehlt angesehen, so noch in der Vorlesung über analytische Funktionen 1878 (Mitschrift Hurwitz).



Trigonometrische Reihen

Die berühmte Arbeit „Über die Darstellbarkeit einer Function“ (Habilschrift 1854, gedruckt 1867) von Bernhard Riemann (1826-1866). Rechts unten die Formel für die Fourierkoeffizienten und Bemerkungen über Fouriers allgemeines Funktionskonzept. In dieser Arbeit wird das Riemannsche Integral (nötig für Koeffizientenberechnung!) eingeführt!



Ueber die

Darstellbarkeit einer Function

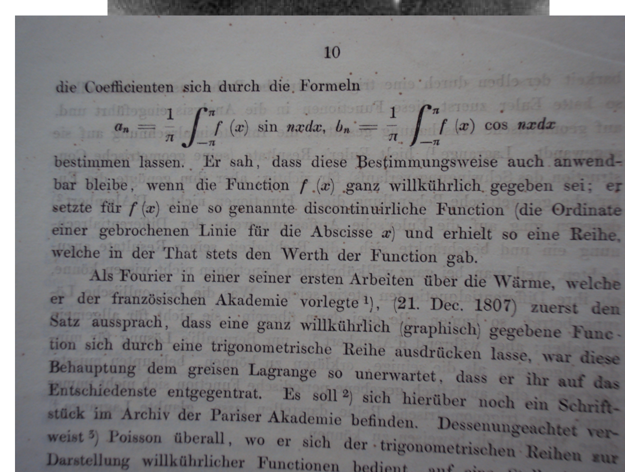
durch eine trigonometrische Reihe.

Von

B. Riemann.

Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1867.



10

die Coefficienten sich durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

bestimmen lassen. Er sah, dass diese Bestimmungsweise auch anwendbar bleibe, wenn die Function $f(x)$ ganz willkührlich gegeben sei; er setzte für $f(x)$ eine so genannte discontinuirliche Function (die Ordinate einer gebrochenen Linie für die Abscisse x) und erhielt so eine Reihe, welche in der That stets den Werth der Function gab.

Als Fourier in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegte [1]), (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, dass eine ganz willkührlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken lasse, war diese Behauptung dem greisen Lagrange so unerwartet, dass er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es soll [2]) sich hierüber noch ein Schriftstück im Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist [3]) Poisson überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkührlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in La-

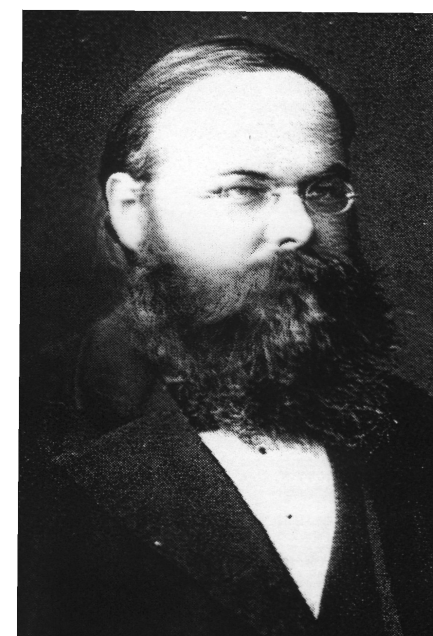
Vertreter der Analysis im 19. Jh.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) (links)

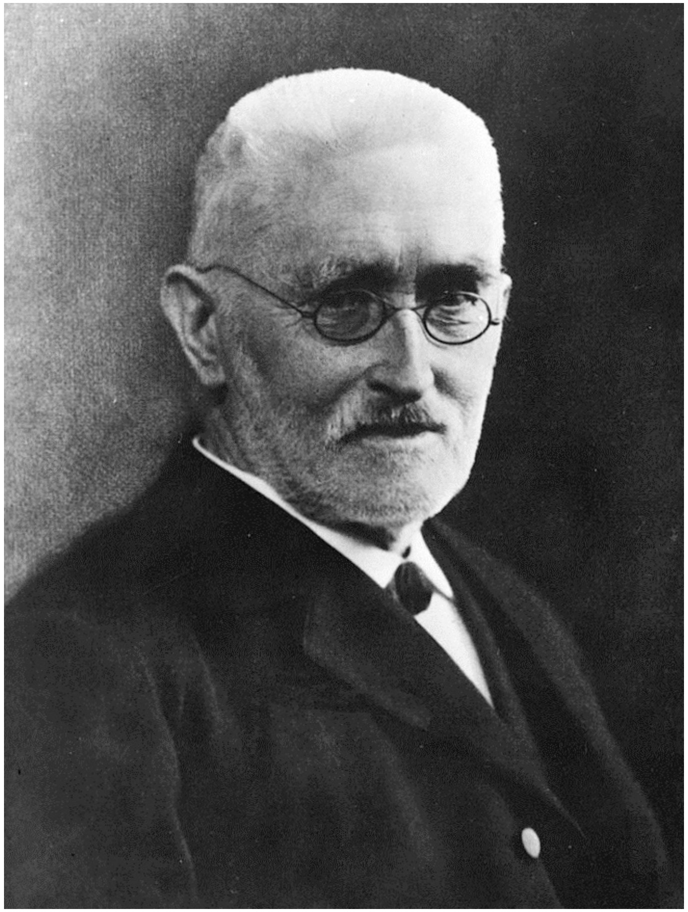
Augustin Louis Cauchy (1789-1857) (rechts)

Paul du Bois-Reymond (1831-1889) (links)

Hermann Amandus Schwarz (1823-1921) (rechts)



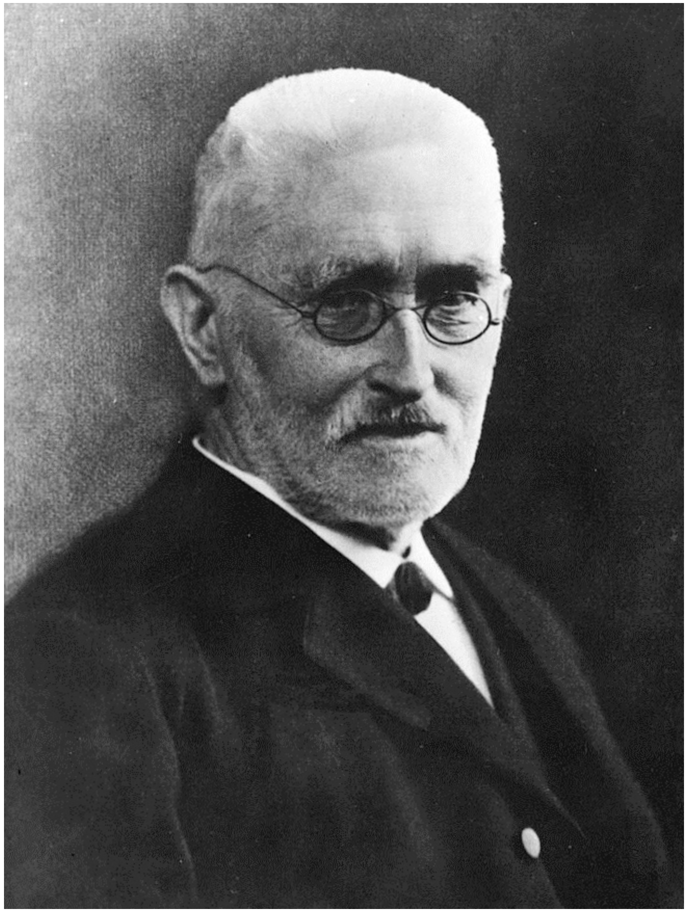
Zwei Marksteine



Richard Dedekind, 1831-1916

Anstelle von Zahlen Abbildung von Mengen auf Mengen (Systeme oder Ensembles bei Dedekind) 1888 in: „Was sind und was sollen die Zahlen?“, Problem einer geeigneten Topologie

Zwei Marksteine



Richard Dedekind, 1831-1916

Anstelle von Zahlen Abbildung von Mengen auf Mengen (Systeme oder Ensembles bei Dedekind) 1888 in: „Was sind und was sollen die Zahlen?“, Problem einer geeigneten Topologie

Lennart Carleson, geb. 1928

Satz von Carleson (vorgetragen auf dem ICM 1966 in Moskau): Wenn $f(x)$ aus L^2 ist, dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ f.ü. punktweise.

Angelus Silesius (1624-1677)
„Cherubinischer Wandersmann oder Geist-Reiche Sinn- und Schlußß-Reime“ (^{2}1675)

263. **Beschluß.**

Freund es ist auch genug. Jm fall du mehr wilt lesen/
So geh und werde selbst die Schrifft und selbst das
Wesen.

E N D E.

Rück- und Ausblick

- Thema des Vortrags genauer: Funktionen von *reellen Variablen*, im allg. von *einer* reellen Variablen
- Was wäre zu ergänzen?

  Mehrdimensionale und komplexe Funktionen,
  zahlentheoretische Funktionen,
  Maßfunktionen,
  stochastische Funktionen,
  funktionalanalytische Versionen (schwache Lösungen, Distributionen, Diracsche δ-Funktionen)
  und vieles andere mehr.

  Zahlbereiche

- Einschlägigen Arbeiten vieler Mathematiker wurden nicht erwähnt, z.B. James Gregory (1637-1675).

Gauß über Funktionen

(im Hinblick darauf, daß das Wesen einer Funktion ihr Bestimmtsein ist; in einem Brief an Bessel vom 21. 11. 1811)

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Man sollte überhaupt nie vergessen, dass die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen [Konstruktionen], nur unsere eigenen Geschöpfe sind, und dass, wo die Definition von der man ausging aufhört einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll was ist? sondern was convenirt [passend ist]? anzunehmen, damit ich immer consequent bleiben kann.


The
End