WIAS
Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

WIAS Schülertag

Alexander Weiß

Irrfahrten in der Mathematik

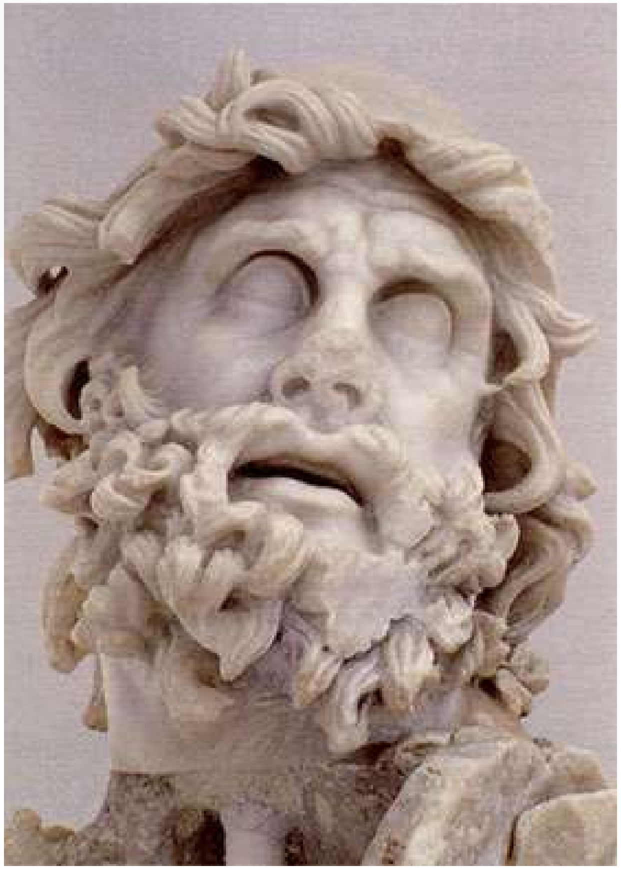
Leibniz Gemeinschaft

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

IRTG SMCP ZURICH BERLIN

Einleitung

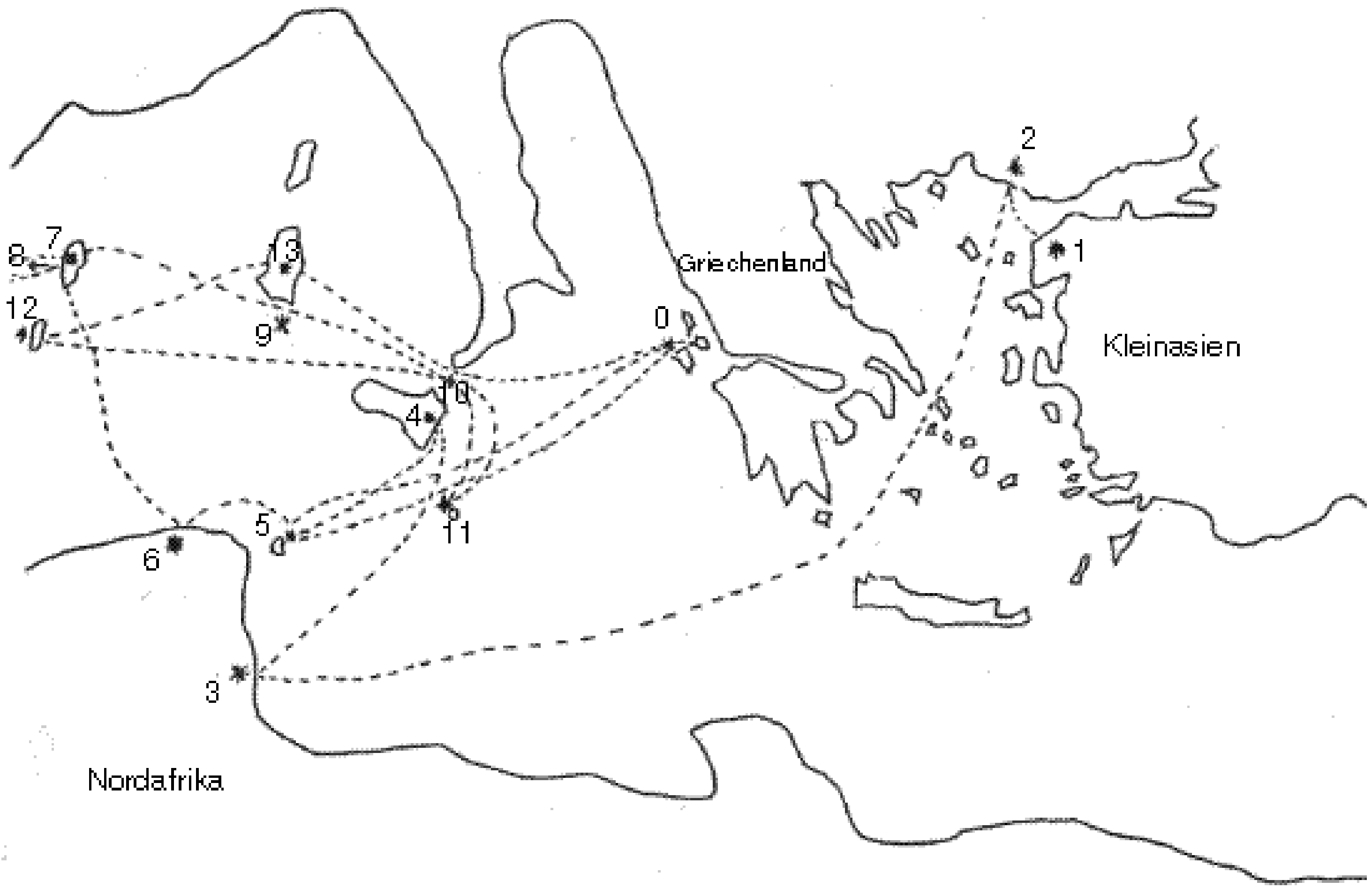
Ἄνδρα μοι ἔννεπε, Μοῦσα, πολύτροπον, ὅς μάλα πολλὰ
πλάγχθη, ἐπεὶ Τροίης ἱερὸν πτολίεθρον ἔπερσεν·
πολλῶν δ' ἀνθρώπων ἴδεν ἄστεα καὶ νόον ἔγνω,
πολλὰ δ' ὅ γ' ἐν πόντῳ πάθεν ἄλγεα ὃν κατὰ θυμόν,
ἀρνύμενος ἥν τε ψυχὴν καὶ νόστον ἑταίρων.



Sage mir, Muse, die Taten des vielgewanderten Mannes,
Welcher so weit geirrt, nach der heiligen Troja Zerstörung,
Vieler Menschen Städte gesehn, und Sitte gelernt hat,
Und auf dem Meere so viel' unnennbare Leiden erduldet,
Seine Seele zu retten, und seiner Freunde Zurückkunft.

Anfang der Odyssee von Homer
im Original und in der klassischen Übersetzung
von Johann Heinrich Voss

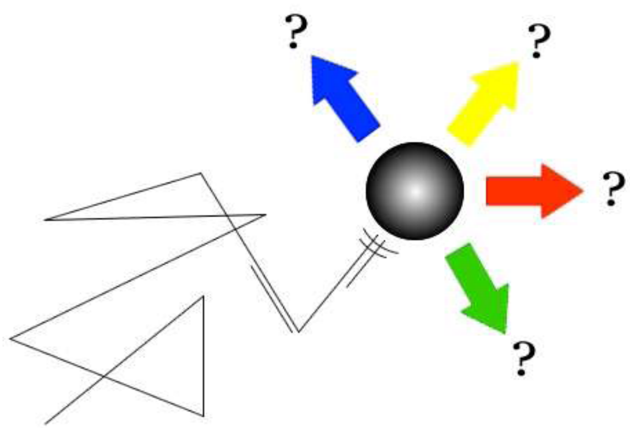
Einleitung



Die Abenteuer des Odysseus

1. Troja
2. Die Kikonen
3. Die Lotosesser
4. Die Kyklopen
5. Aiolos
6. Die Lästrygonen
7. Kirke
8. Die Unterwelt
9. Die Sirenen
10. Skylla und Charybdis
11. Helios
12. Kalypso
13. Die Phäaken
0. Ithaka

In der Mathematik. . .

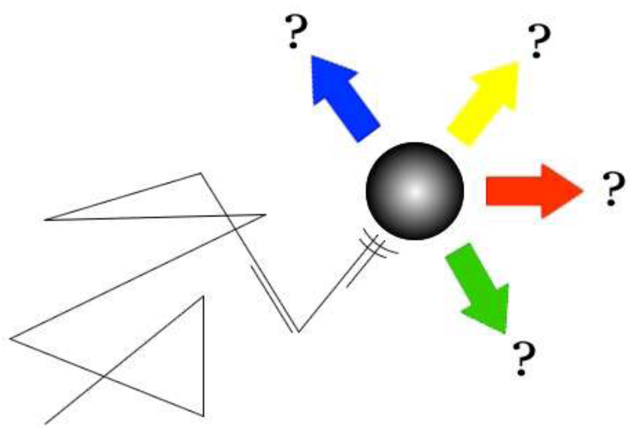


. . . bezeichnet eine **Irrfahrt** das (abstrakte) Modell eines *Teilchens*,

welches in einem *Gebiet*

einen Weg beschreibt, der vom Zufall bestimmt ist.

In der Mathematik. . .



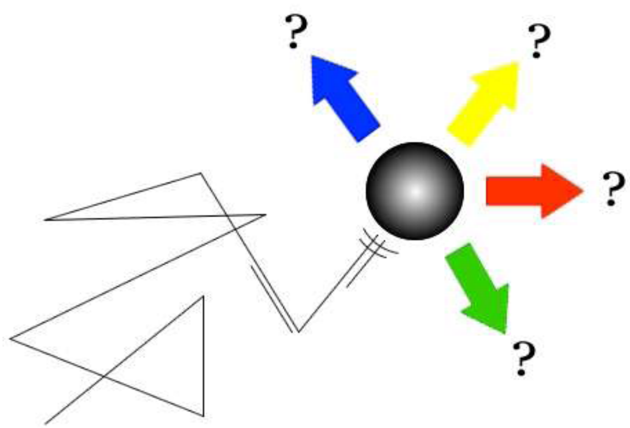
. . . bezeichnet eine **Irrfahrt** das (abstrakte) Modell eines *Teilchens*,

Atom, Ameise, Vogel, Mensch, Raumschiff

welches in einem *Gebiet*

einen Weg beschreibt, der vom Zufall bestimmt ist.

In der Mathematik…



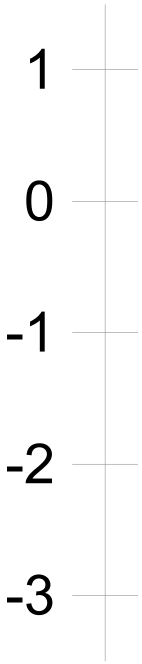
…bezeichnet eine **Irrfahrt** das (abstrakte) Modell eines *Teilchens*,

Atom, Ameise, Vogel, Mensch, Raumschiff

welches in einem *Gebiet*

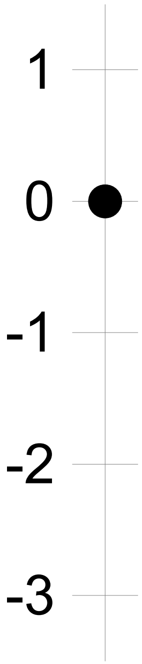
Schachbrett, Mittelmeer, Erdoberfläche, Weltall

einen Weg beschreibt, der vom Zufall bestimmt ist.



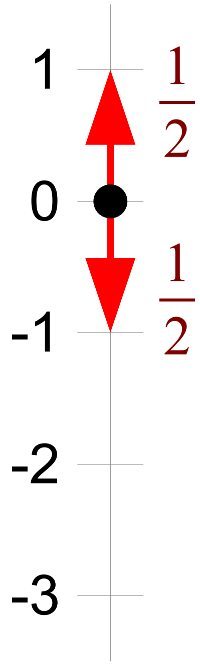
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



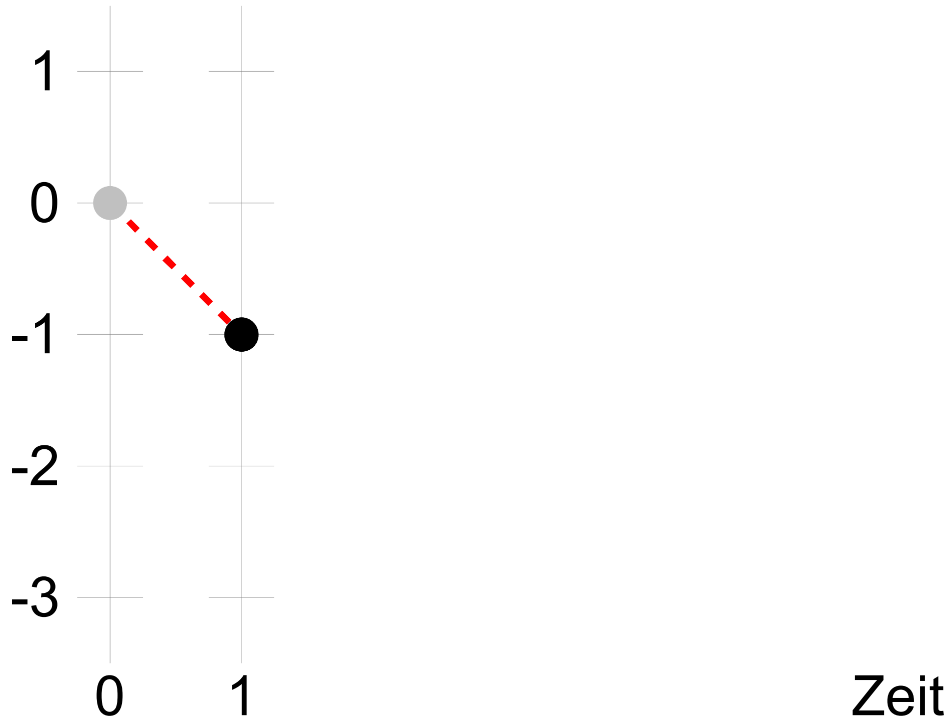
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



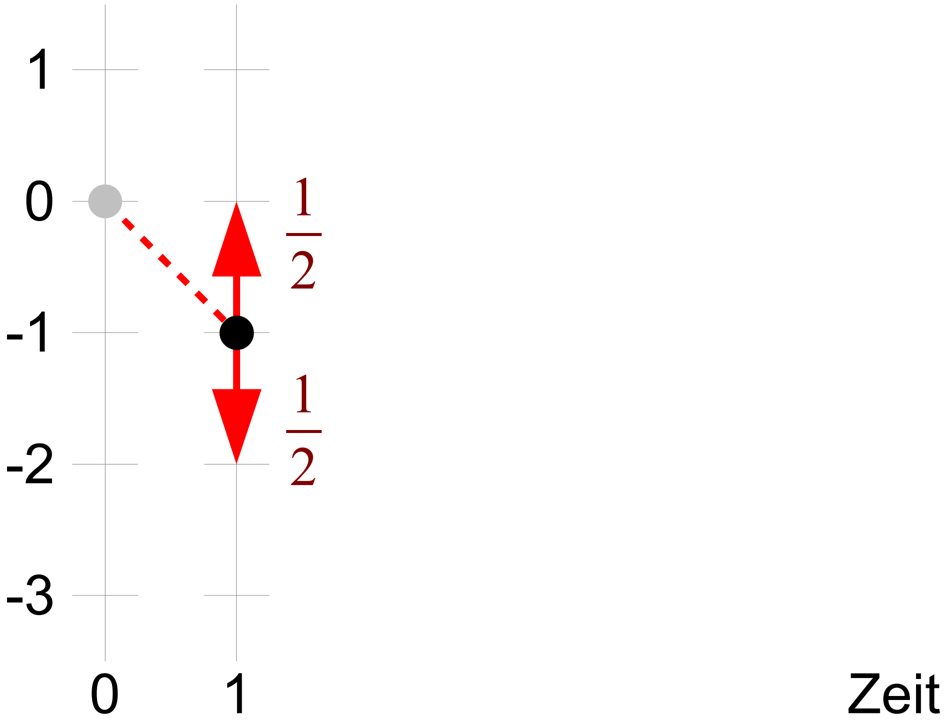
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



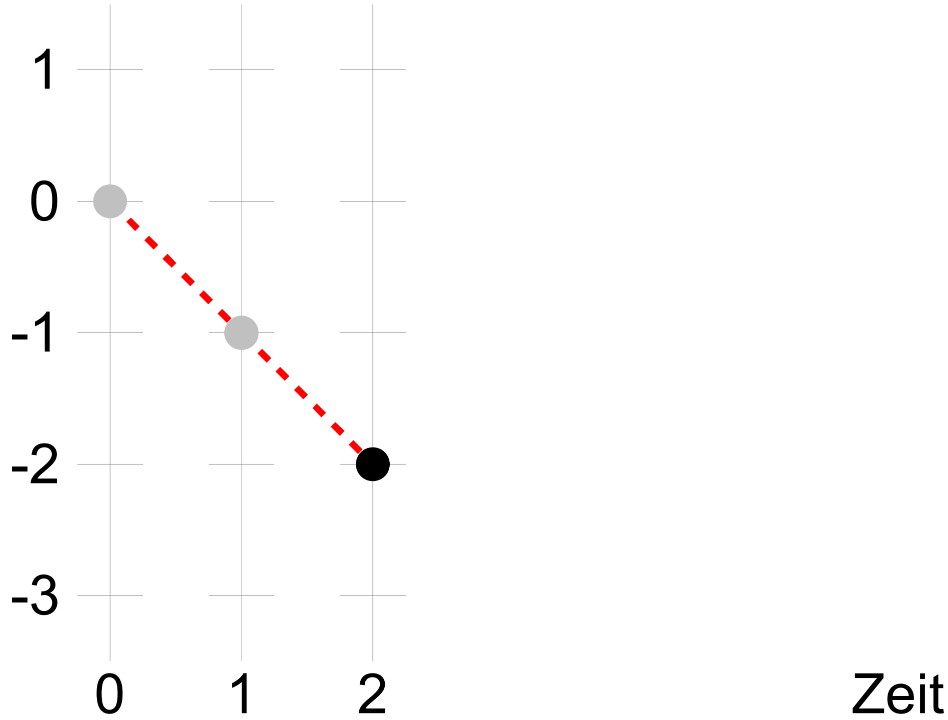
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



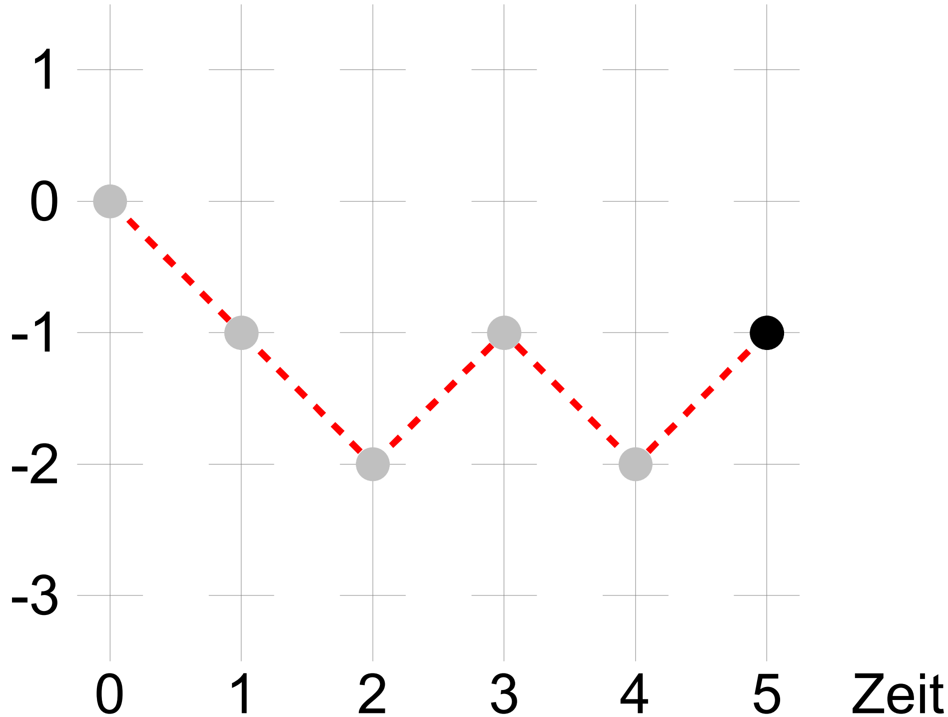
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



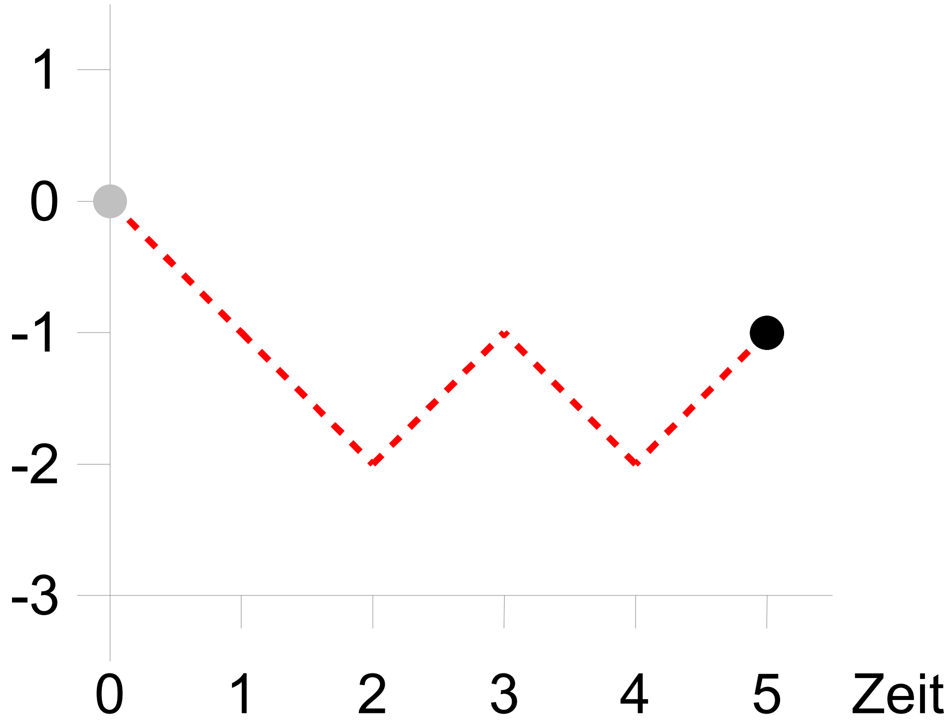
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



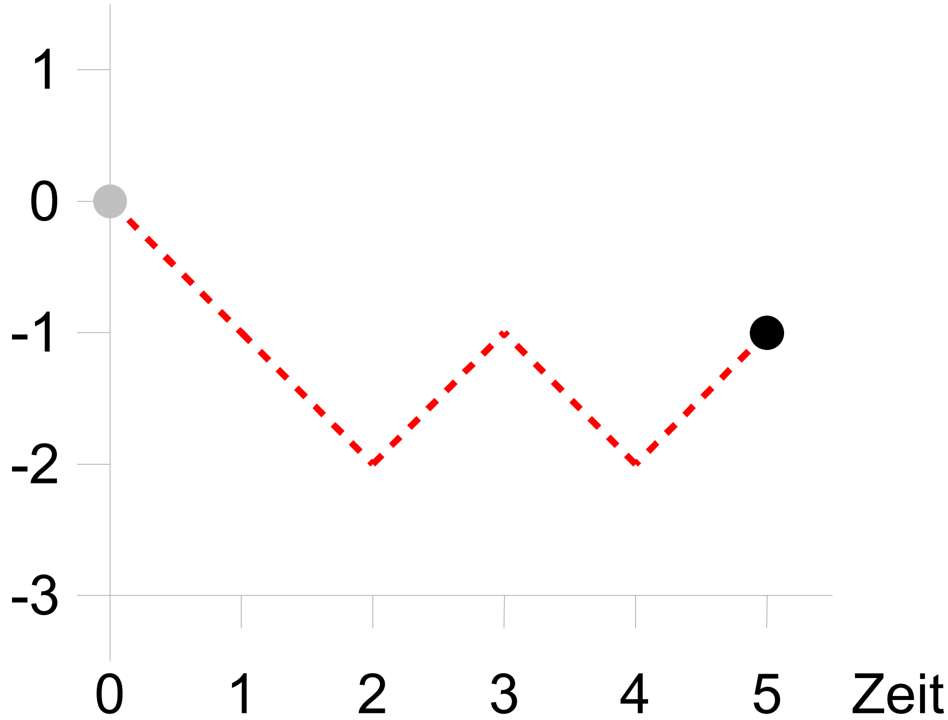
1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter

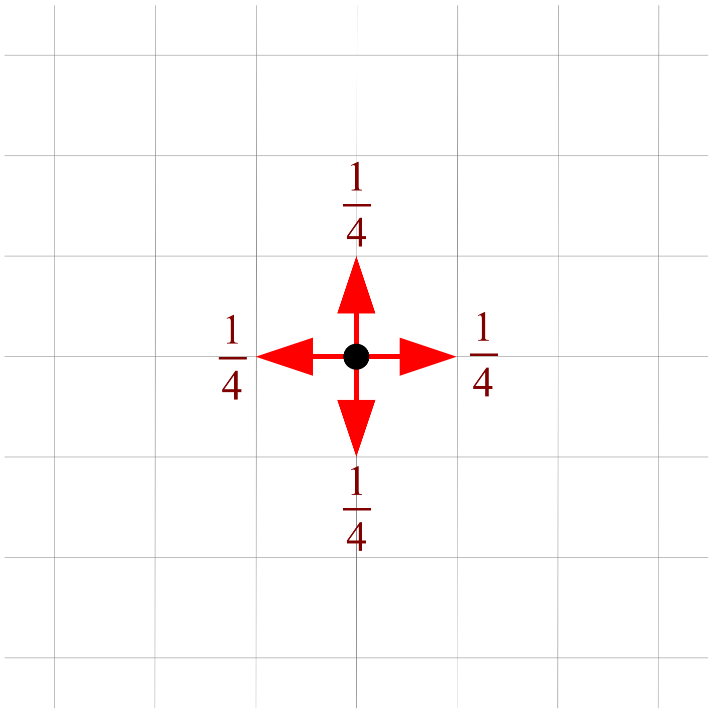


1-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter

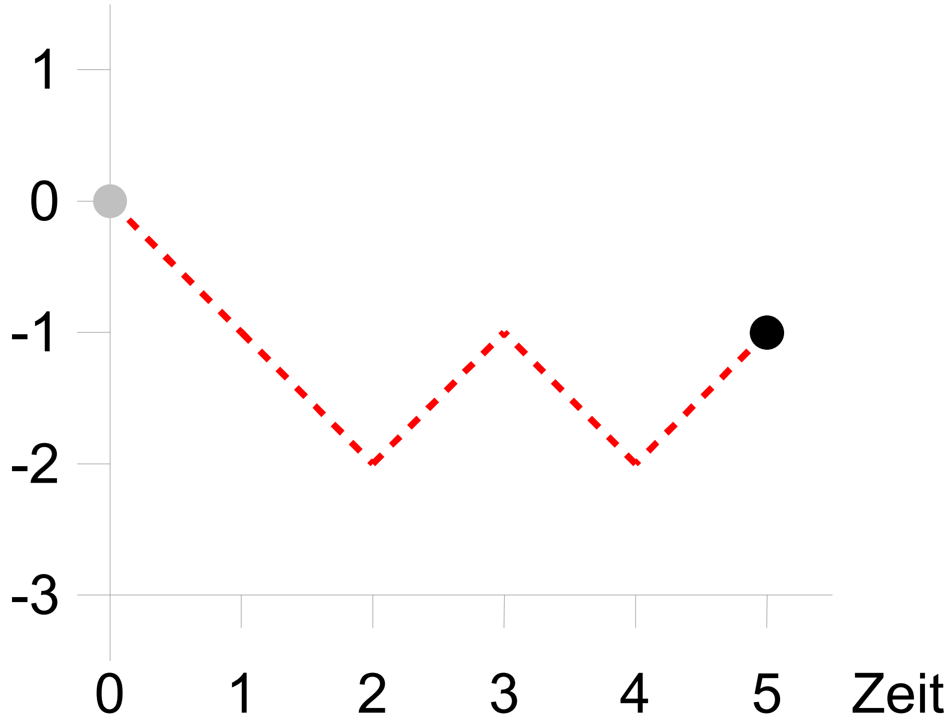


1-dimensionaler Fall

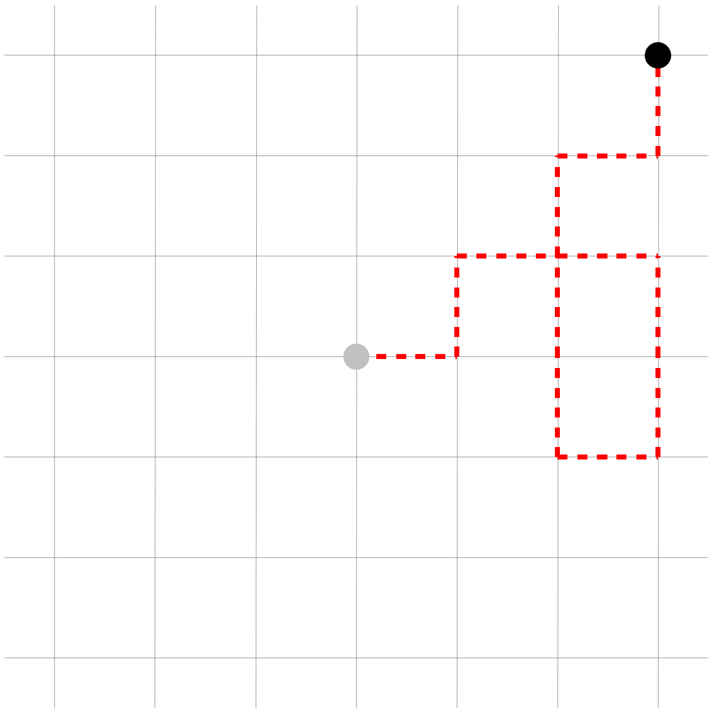


2-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter

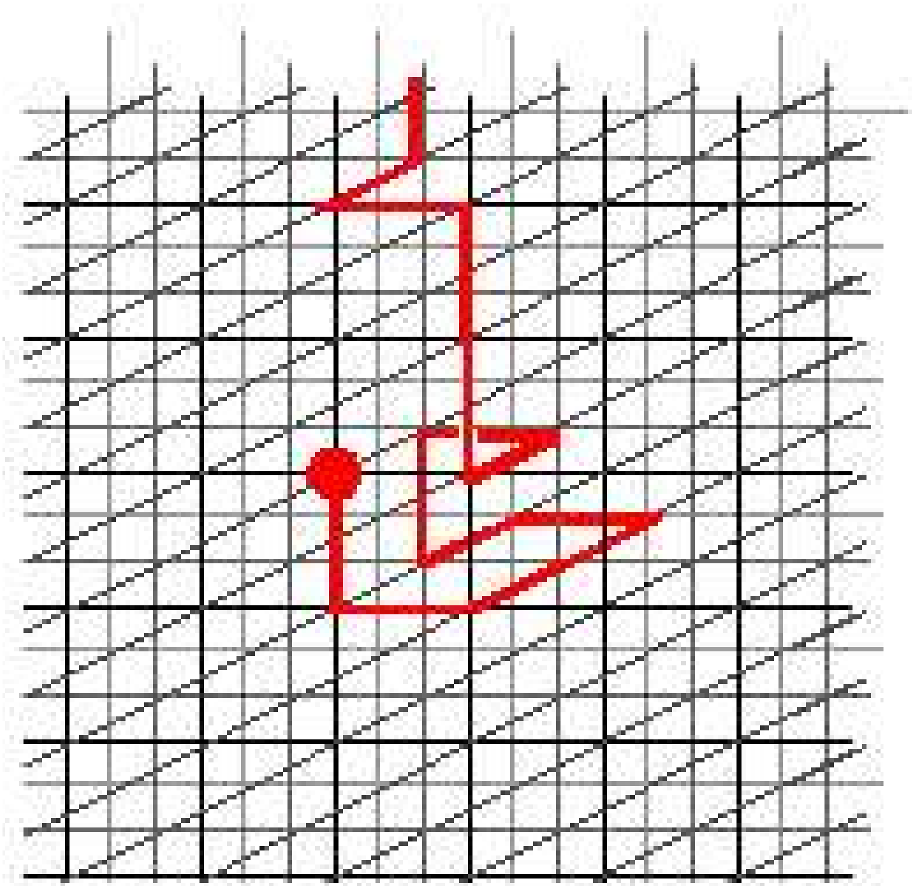


1-dimensionaler Fall



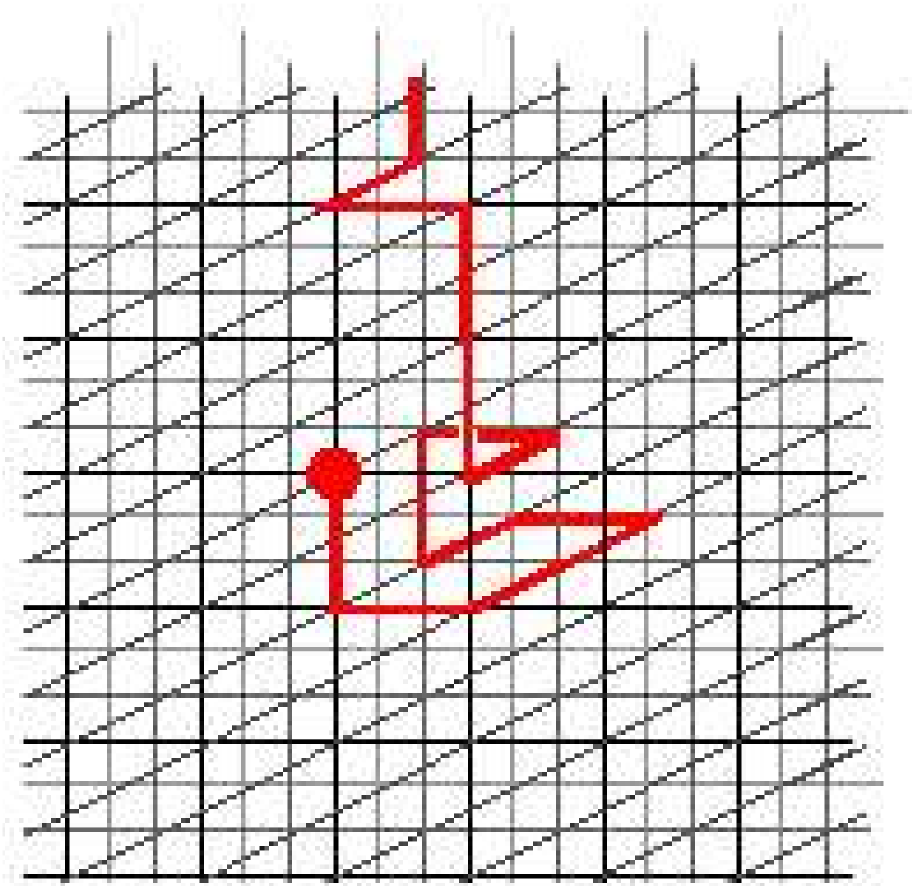
2-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



3-dimensionaler Fall

Die symmetrische Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter



3-dimensionaler Fall

Ein Teilchen im Punkt

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix} \quad \text{springt nach} \quad \begin{pmatrix} n_1 \pm 1 \\ n_2 \pm 1 \\ n_3 \pm 1 \\ n_4 \pm 1 \\ n_5 \pm 1 \end{pmatrix}$$

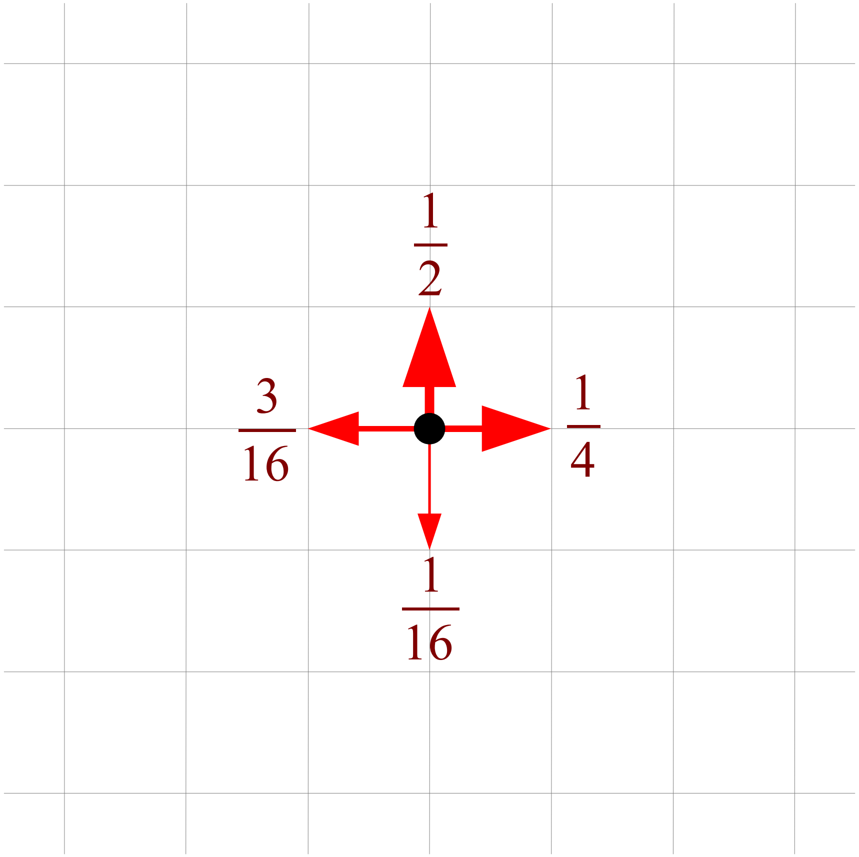
jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2 \cdot 5}$
(*Laplace-Wahrscheinlichkeit*)

$\Rightarrow$ in d Dimensionen: $\frac{1}{2 \cdot d}$

5-dimensionaler Fall

Warum symmetrisch? Warum auf dem Gitter?

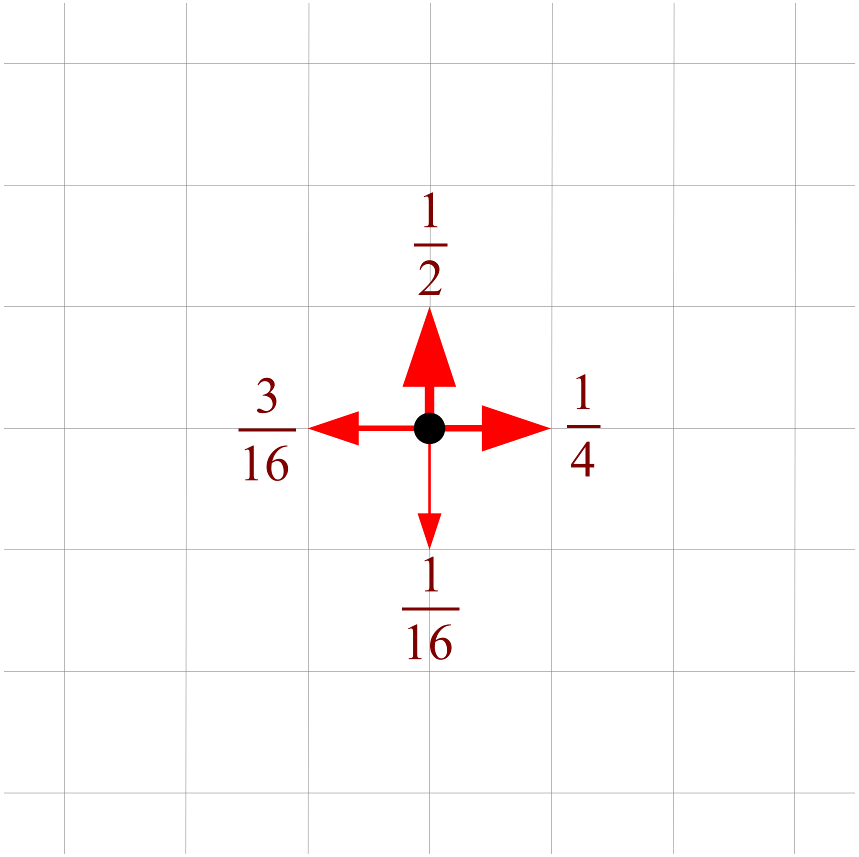
Unsymmetrisches Beispiel



2-dimensionale Irrfahrt mit Drift

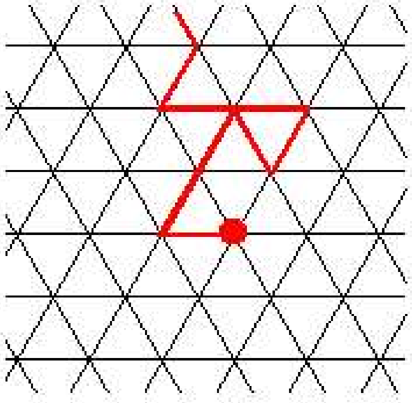
Warum symmetrisch? Warum auf dem Gitter?

Unsymmetrisches Beispiel

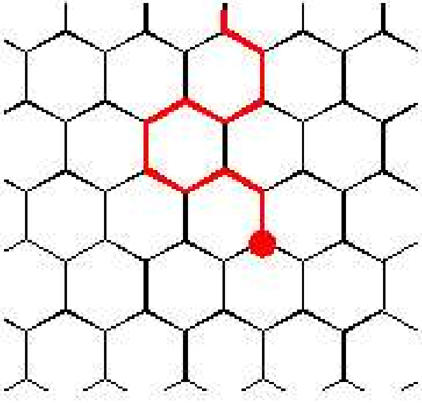


2-dimensionale Irrfahrt mit Drift

Beispiele anderer Geometrien



Irrfahrt auf Dreiecken



Irrfahrt auf Waben

Interpretationsmöglichkeiten

Dimension $\neq$ Richtung

Interpretationsmöglichkeit einer d-dimensionalen Irrfahrt

- ▷ Für die Produktion einer Ware werden d Rohstoffe gebraucht.
- ▷ Die vorhandene Menge der Rohstoffe fluktuiert.
- ▷ Zur Produktion wird von jedem Rohstoff eine Mindestmenge benötigt.

Dimension $\neq$ Richtung

Interpretationsmöglichkeit einer d-dimensionalen Irrfahrt

- ▷ Für die Produktion einer Ware werden d Rohstoffe gebraucht.
- ▷ Die vorhandene Menge der Rohstoffe fluktuiert.
- ▷ Zur Produktion wird von jedem Rohstoff eine Mindestmenge benötigt.

- ▷ Vorhandene Menge des Rohstoffes i: n_i
- ▷ Benötigte Mindestmenge des Rohstoffes i: m_i
- ▷ Annahme: Die Fluktuationen können durch eine Irrfahrt beschrieben werden.

Interpretationsmöglichkeiten

Dimension $\neq$ Richtung

Interpretationsmöglichkeit einer d-dimensionalen Irrfahrt

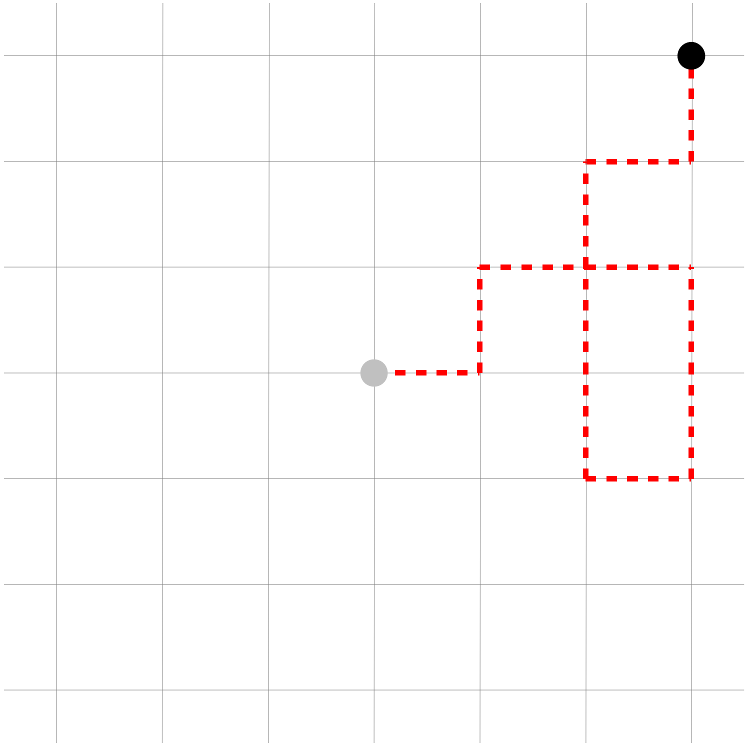
- ▷ Für die Produktion einer Ware werden d Rohstoffe gebraucht.
- ▷ Die vorhandene Menge der Rohstoffe fluktuiert.
- ▷ Zur Produktion wird von jedem Rohstoff eine Mindestmenge benötigt.

- ▷ Vorhandene Menge des Rohstoffes i: n_i
- ▷ Benötigte Mindestmenge des Rohstoffes i: m_i
- ▷ Annahme: Die Fluktuationen können durch eine Irrfahrt beschrieben werden.

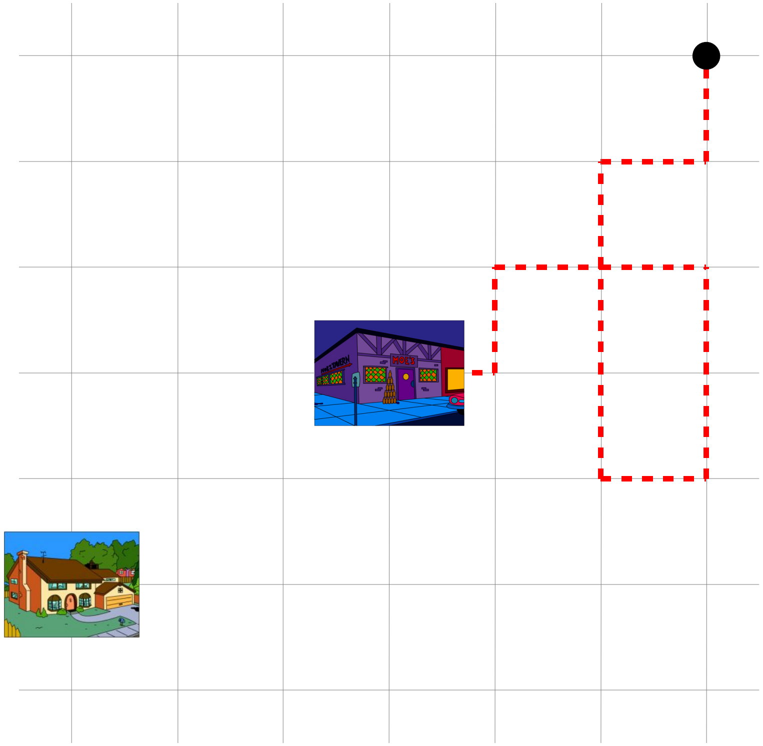
Wenn anfangs $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix}$ Rohstoffe vorhanden sind, mit $n_i \geq m_i$ für alle i, wie lange (wieviele Schritte) wird es dauern, bis ein Rohstoff nicht mehr ausreichend vorhanden ist, also $n_i < m_i$ für einen Rohstoff i?

WIAS

Rekurrenz in 2 Dimensionen

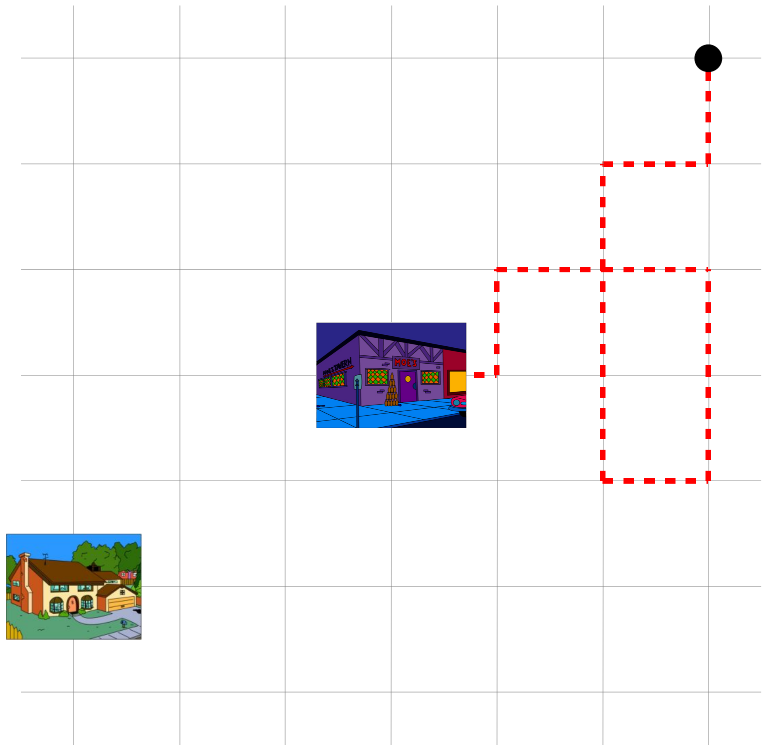


Rekurrenz in 2 Dimensionen



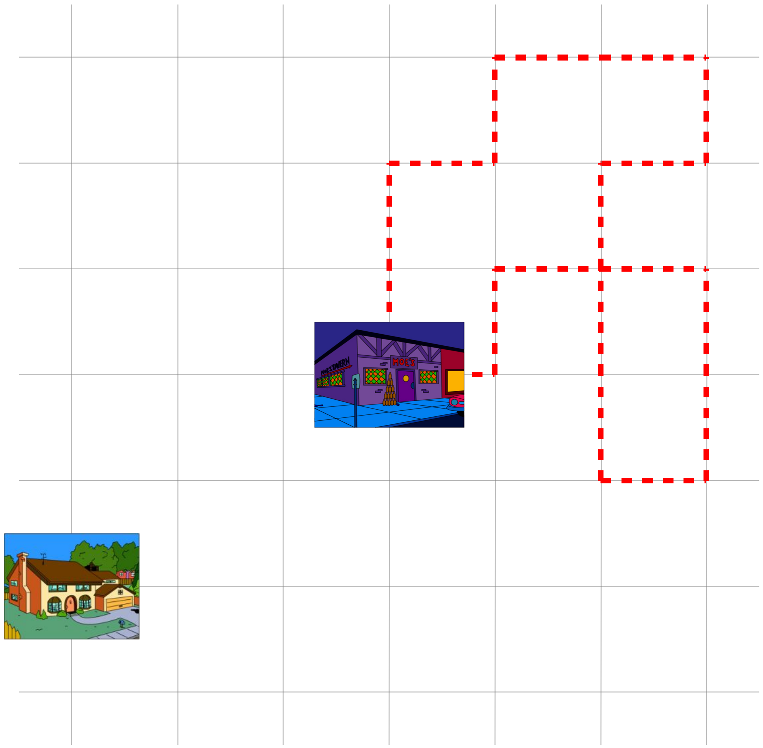
Findet der betrunkene
Mathematiker nach Hause?

Rekurrenz in 2 Dimensionen



Findet der betrunkene
Mathematiker nach Hause?

Theorem 1 *Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mathematiker irgendwann zu Hause ankommt, ist* 1 *(=*100%*).*

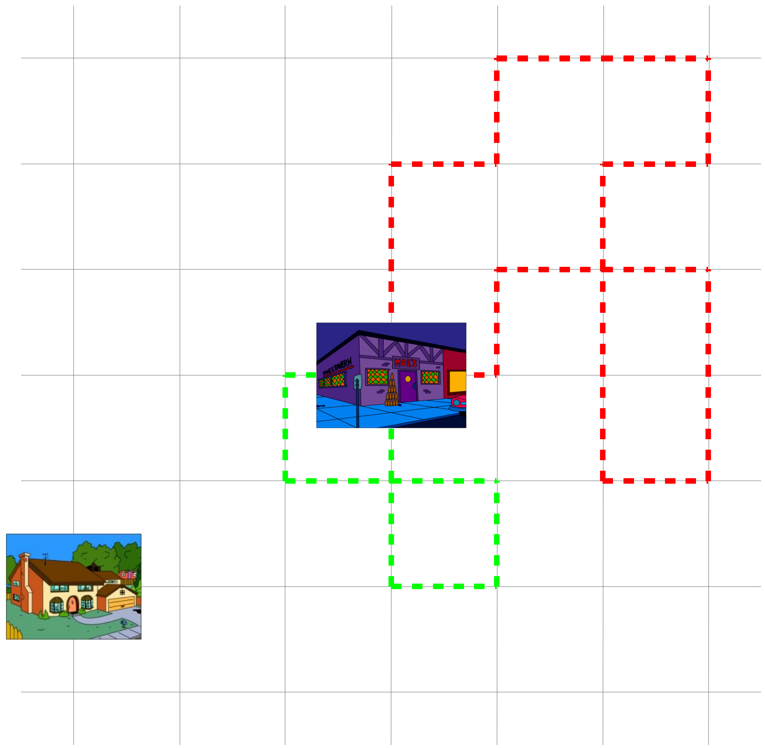


Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.

Rekurrenz in 2 Dimensionen

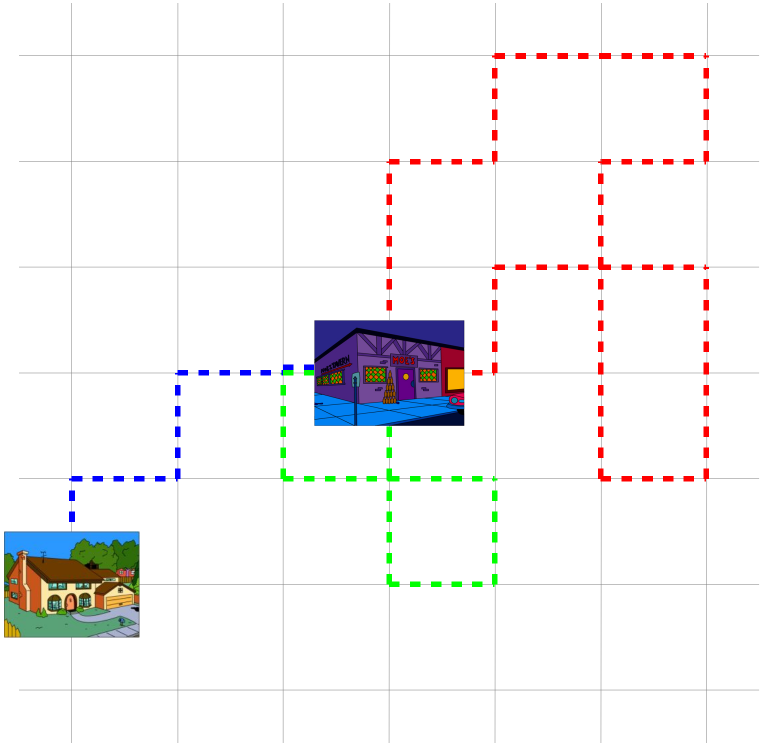


Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.

Rekurrenz in 2 Dimensionen

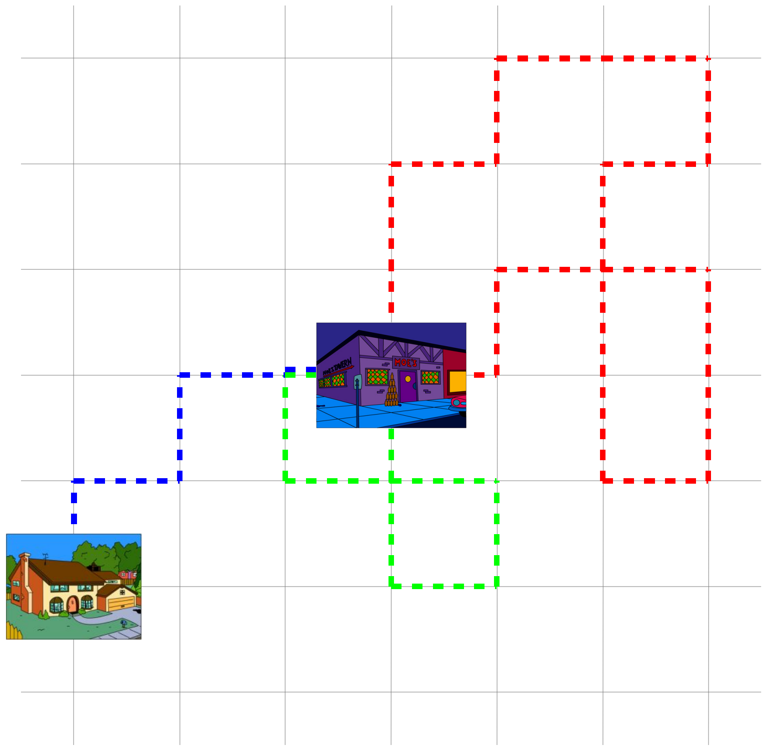


Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.

Rekurrenz in 2 Dimensionen

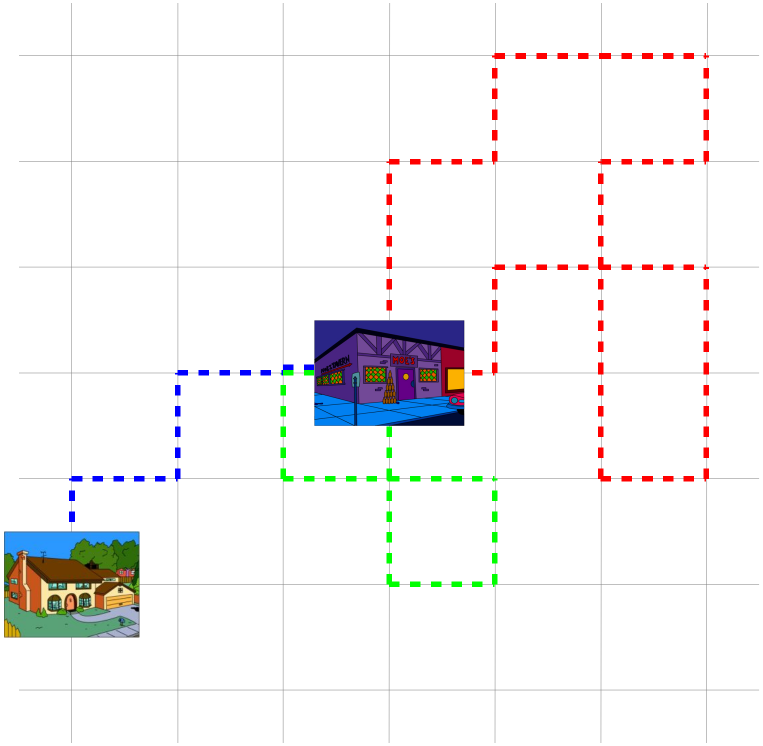


Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.
2. Um zu einem Punkt zurüzukommen, muss man in jeder Dimensionen dieselbe Anzahl von Schritten in beide Richtungen getan haben.

Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Rekurrenz in 2 Dimensionen

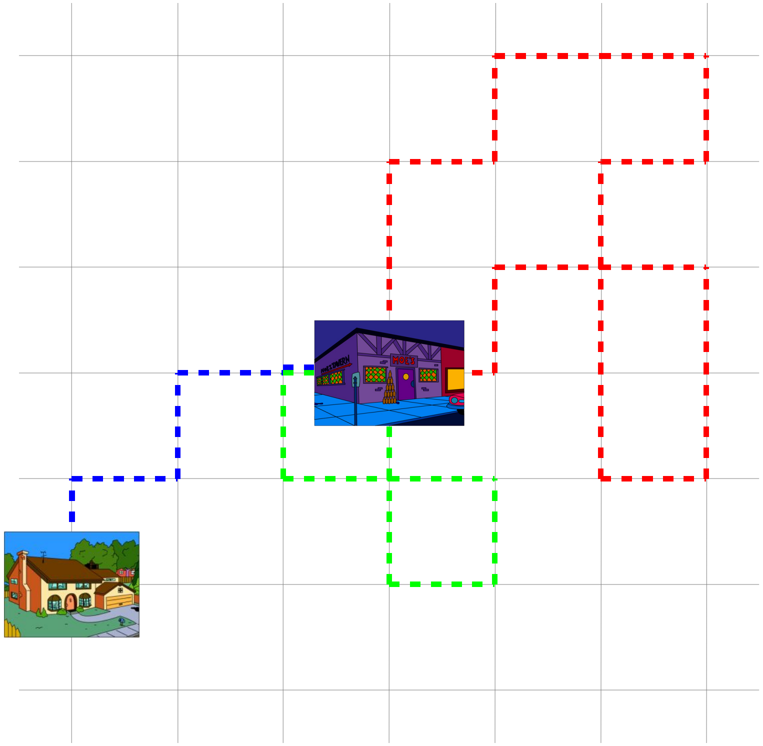


Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.
2. Um zu einem Punkt zurüzukommen, muss man in jeder Dimensionen dieselbe Anzahl von Schritten in beide Richtungen getan haben.
3. Daher kommt man nur mit einer geraden Zahl von Schritten zurück, also $2, 4, \dots, 2n$ (n ist natürliche Zahl).

Rekurrenz in 2 Dimensionen

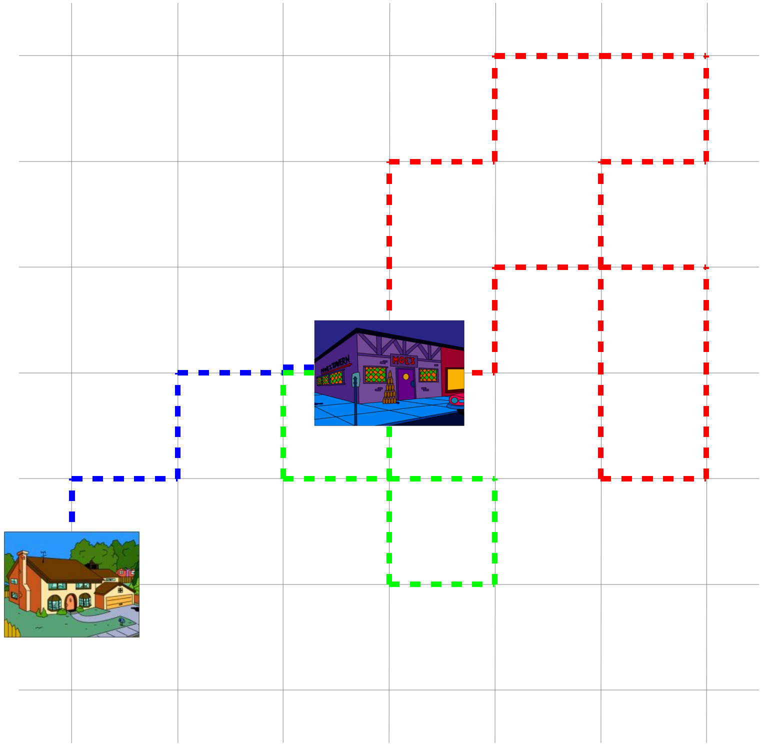


Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

1. Es reicht aus zu zeigen, dass der Mathematiker mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zur Kneipe zurückfindet.
2. Um zu einem Punkt zurüzukommen, muss man in jeder Dimensionen dieselbe Anzahl von Schritten in beide Richtungen getan haben.
3. Daher kommt man nur mit einer geraden Zahl von Schritten zurück, also $2, 4, \ldots, 2n$ (n ist natürliche Zahl).
4. Insgesamt gibt es 4^{2n} Wege der Länge $2n$.

Rekurrenz in 2 Dimensionen



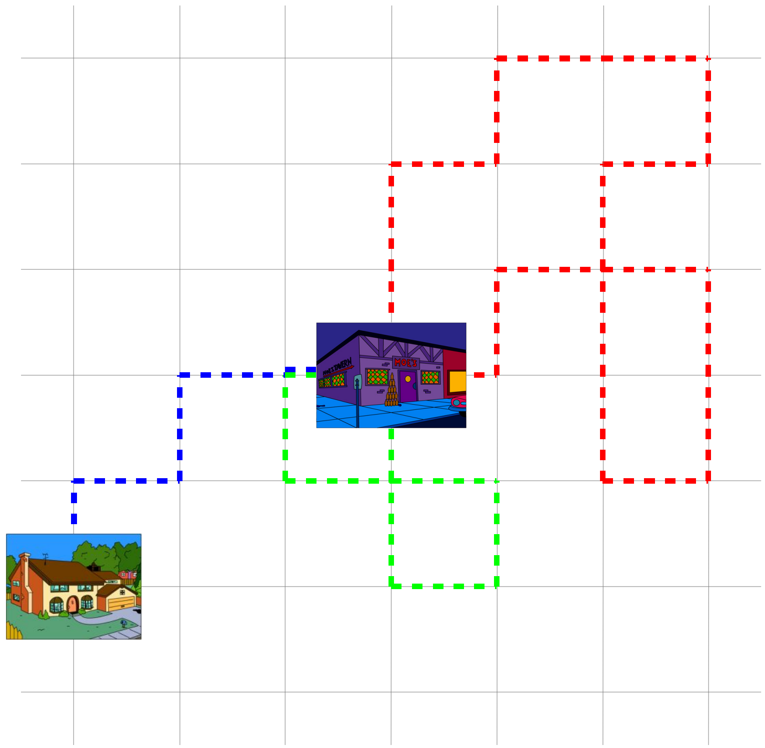
Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

Hilfsaussage
Der Mathematiker kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 zurück, falls die Wahrscheinlichkeiten, dass er es in genau $2, 4, \ldots$ Schritten schafft, zusammengezählt gegen unendlich streben.

Anders gesagt: Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten müssen groß genug sein, damit man sicher zurückkehrt.

Diese Aussage folgt aus dem *Borel-Cantelli-Lemma*.



Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

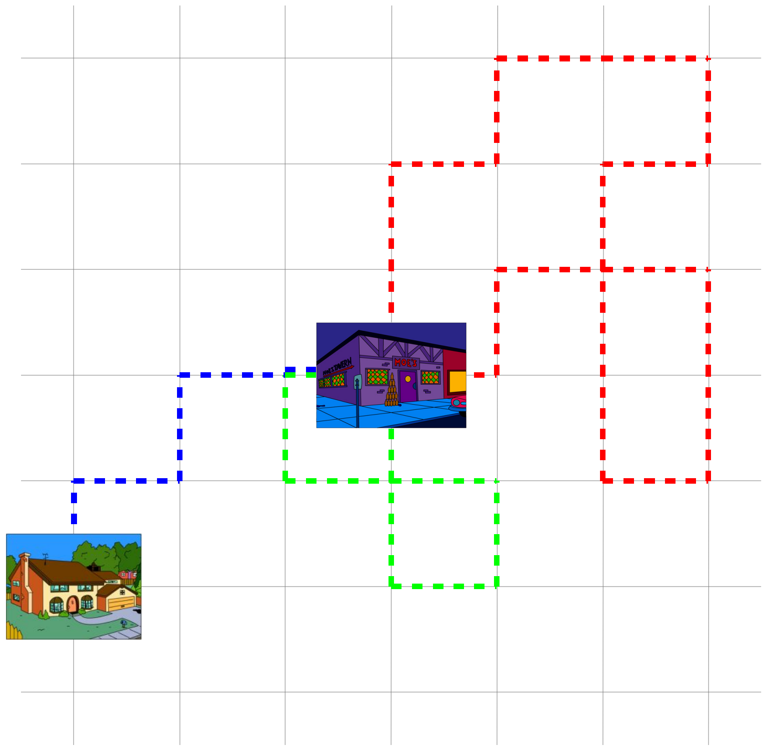
Wieviele der 4^{2n} Pfade der Länge $2n$ enden im Startpunkt?

- ▷ Wenn man k Schritte nach links gegangen ist, muss man auch k Schritte nach rechts gehen.
- ▷ Es bleiben $n-k$ Schritte, um nach oben zu gehen, und genauso viele, um zurück nach unten zu gehen.
- ▷ Für k gilt $0 \leq k \leq n$.
- ▷ Etwas Kombinatorik ergibt, dass

$$\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2$$

der 4^{2n} Wege im Startpunkt enden.

Rekurrenz in 2 Dimensionen



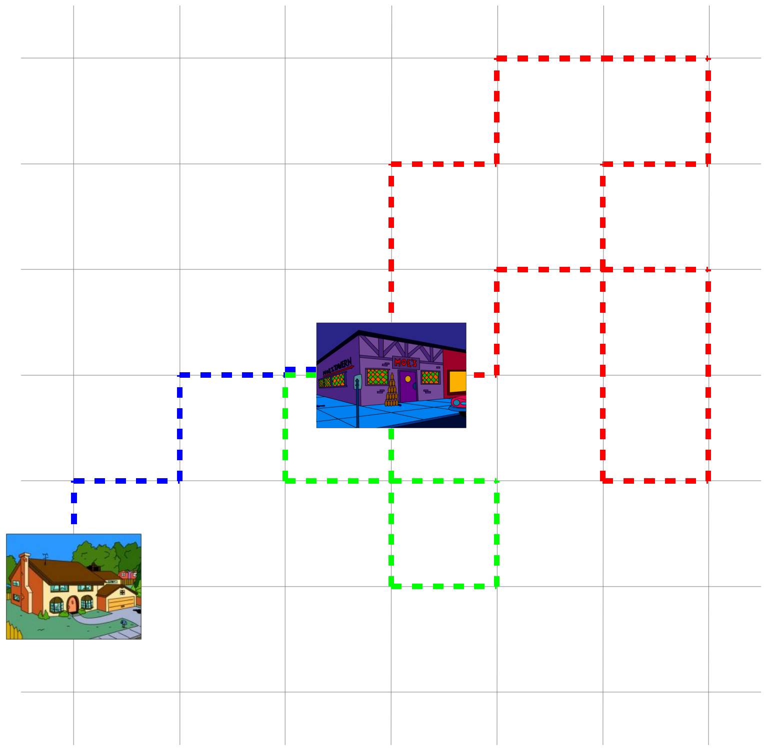
Theorem Der Mathematiker
kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

Die Wahrscheinlichkeit, einen *günstigen* Pfad zu erwischen ist daher

$$\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2}{4^{2n}}$$

Rekurrenz in 2 Dimensionen



Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

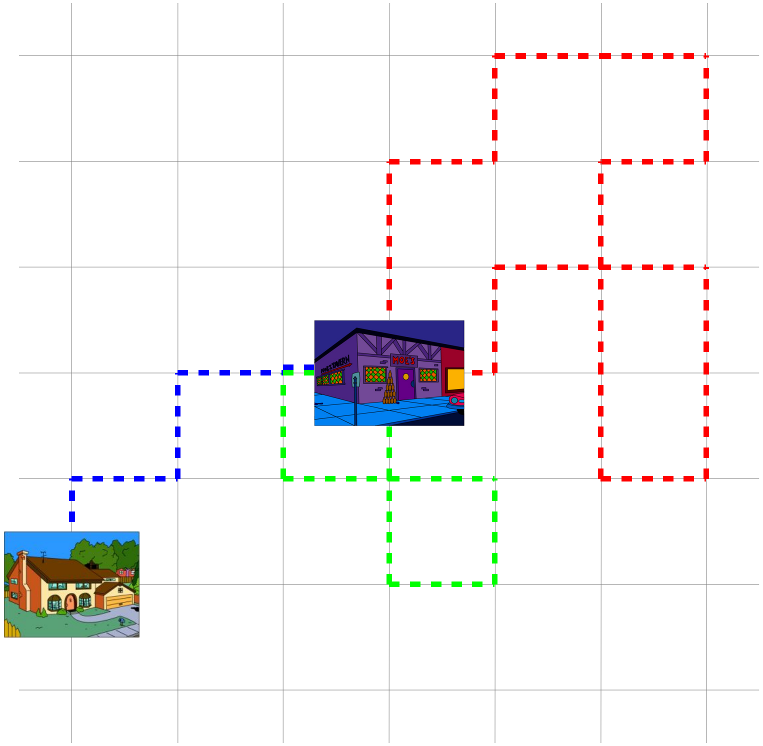
Die Wahrscheinlichkeit, einen *günstigen* Pfad zu erwischen ist daher

$$\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2}{4^{2n}}$$

Für große n gilt

$$\frac{\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2}{4^{2n}} \approx \frac{1}{\pi n}.$$

Dies folgt aus der *Stirling-Formel*.



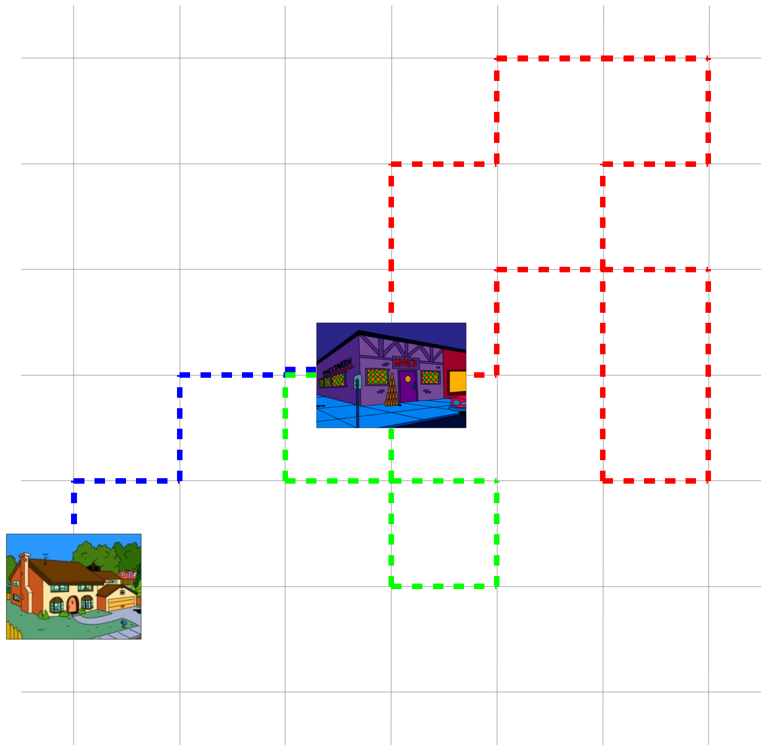
Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Beweisskizze

Die unendliche Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Weglängen verhält sich also wie

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} + \ldots = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \right)$$

Rekurrenz in 2 Dimensionen



Beweisskizze

Die unendliche Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Weglängen verhält sich also wie

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$$

Die Summe in der rechten Klammer ist die *harmonische Reihe*. Man kann beweisen, dass sie gegen unendlich strebt.

Theorem Der Mathematiker kommt mit W'keit 1 zu Hause an.

Q.E.D.

Bemerkungen zu Rekurrenz und Transienz

- Die Eigenschaft, mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zu einem Punkt zurückzukehren, heißt **Rekurrenz.**
- Das Gegenteil heißt **Transienz.** In diesem Fall gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit, nie wieder zurückzukehren.

- Die symmetrische Irrfahrt auf dem Gitter in Dimension 1 und 2 ist rekurrent.
- Für Dimensionen ≥ 3 ist sie transient.

  In 3 Dimensionen beträgt die Wahrscheinlichkeit zurückzukehren beispielsweise nur noch ungefähr 0.34.

Bemerkungen zu Rekurrenz und Transienz

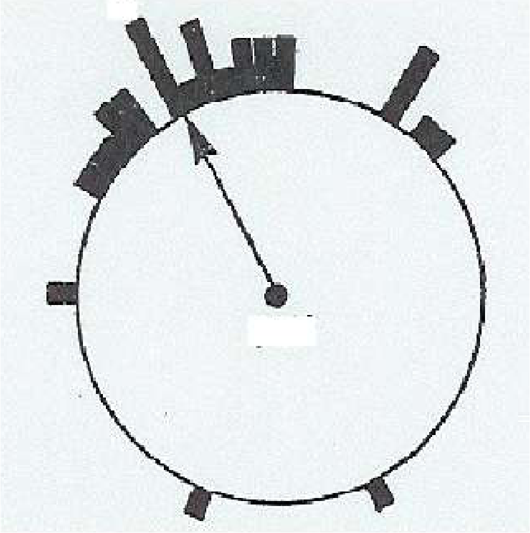
In Dimension 1 sind etwa

- $8,5\%$ aller Pfade länger als 100 Schritte
- $4,0\%$ aller Pfade länger als 400 Schritte
- $2,0\%$ aller Pfade länger als $1,600$ Schritte

In Dimension 2 sind etwa

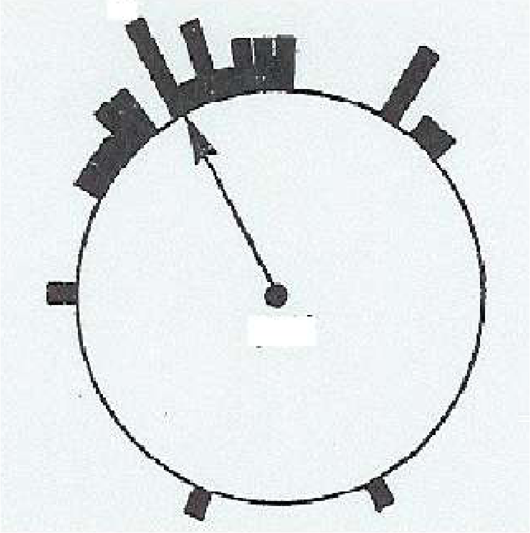
- 43% aller Pfade länger als 100 Schritte
- 32% aller Pfade länger als $1,000$ Schritte
- 27% aller Pfade länger als $10,000$ Schritte
- 10% aller Pfade länger als $100,000,000$ Schritte

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug



Verschieden Experimente deuten darauf hin, dass der Richtungssinn von vielen Vogelarten relativ schecht ist.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug



Verschieden Experimente deuten darauf hin, dass der Richtungssinn von vielen Vogelarten relativ schecht ist.

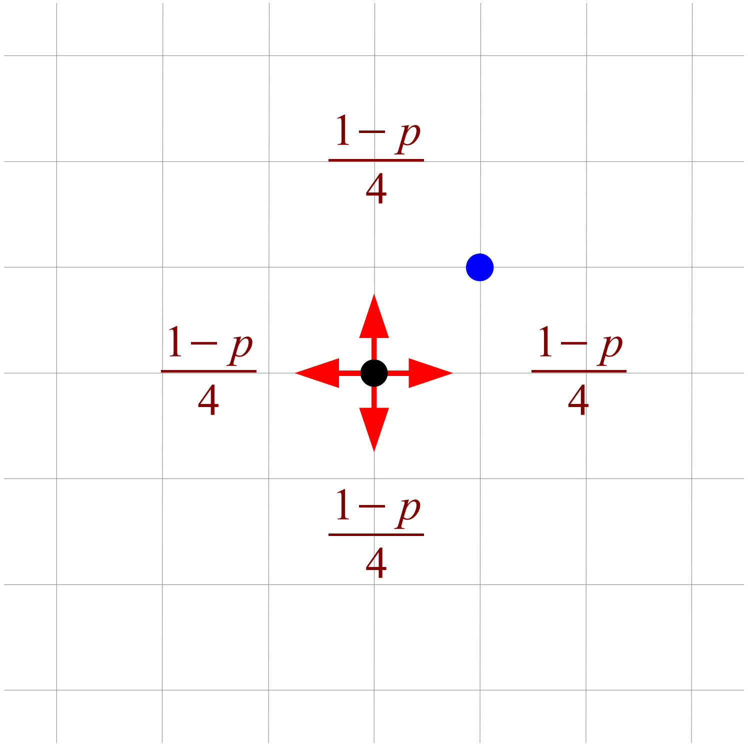
Andererseits gelang es einem Vogel der Art *Manx Shearwater Nr. AX6587*, in 13 Tagen den Heimweg von Massachusetts bis nach Skokholm, einer walisischen Insel, zurückzulegen. Das sind $4,800$ km!

Foto: Dick Newell

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

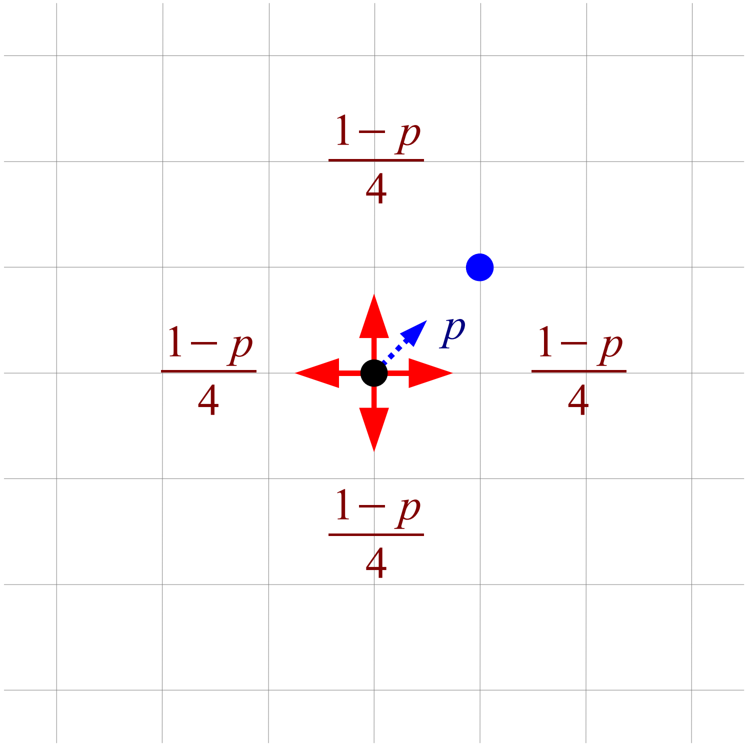


Ein Ansatz mit Drift

- Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.



Ein Ansatz mit Drift

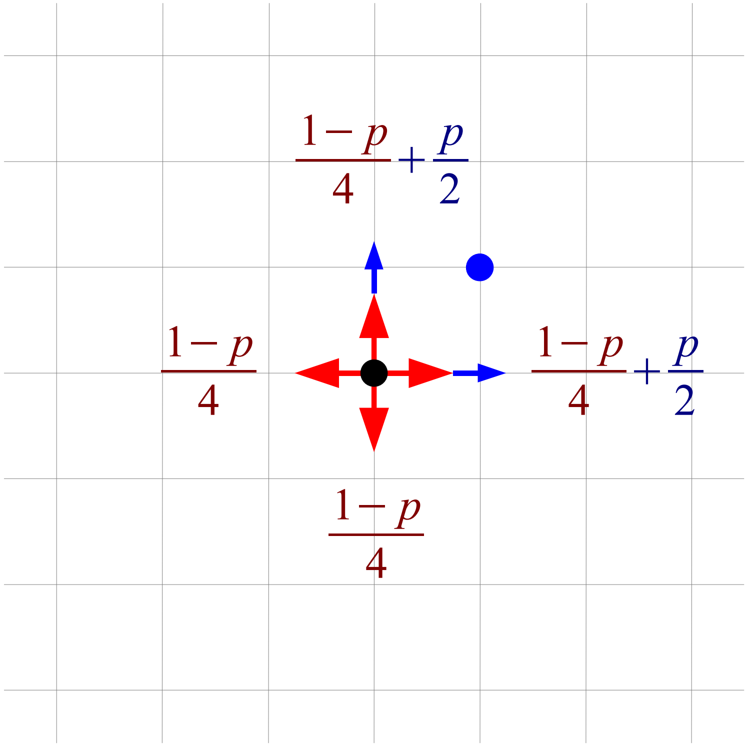
▷ Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.

▷ In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.

▷ Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

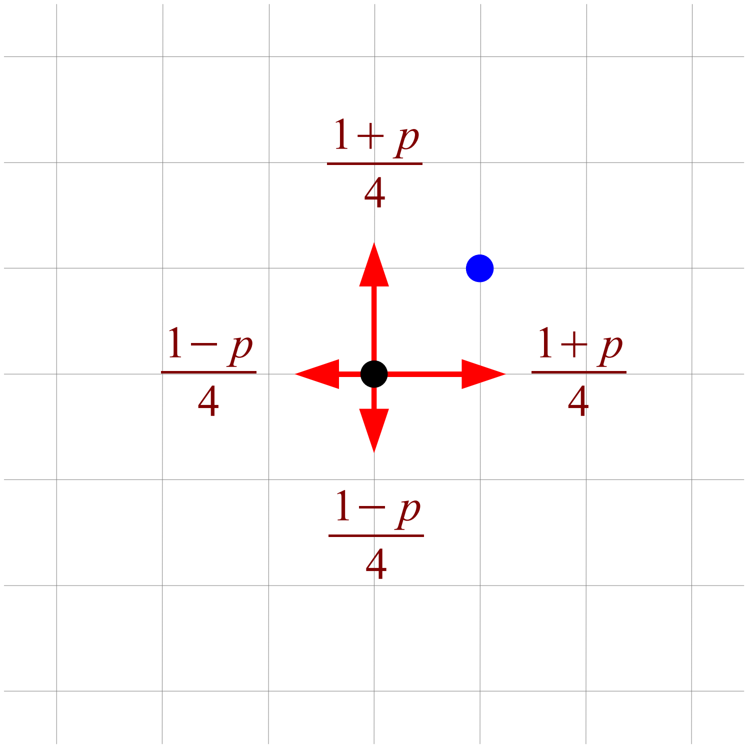


Ein Ansatz mit Drift

- ▷ Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- ▷ In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.
- ▷ Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

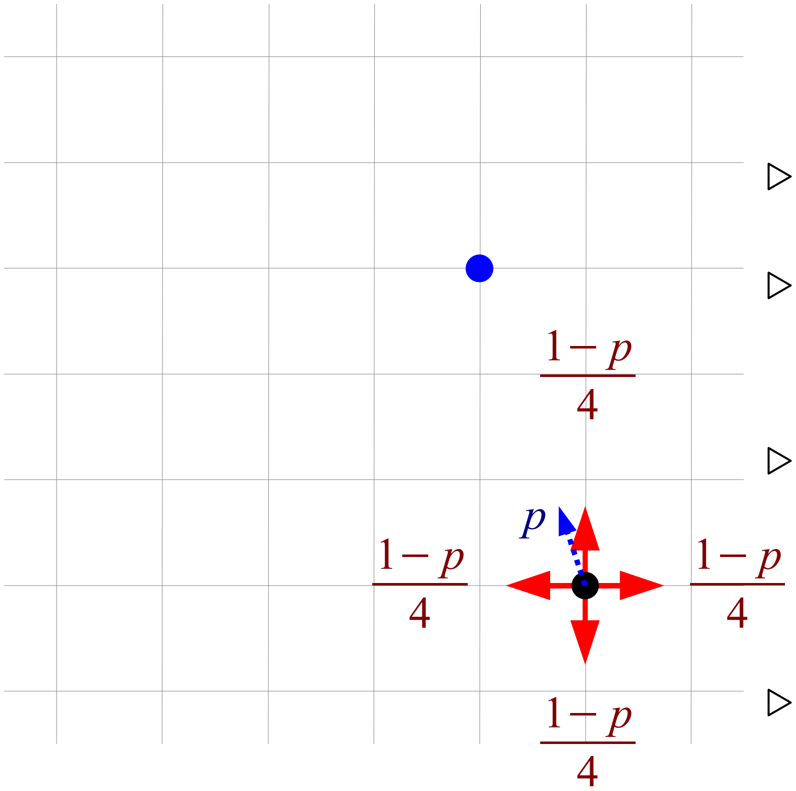


Ein Ansatz mit Drift

- Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.
- Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.
- Alle n Schritte wird der Drift neu justiert.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

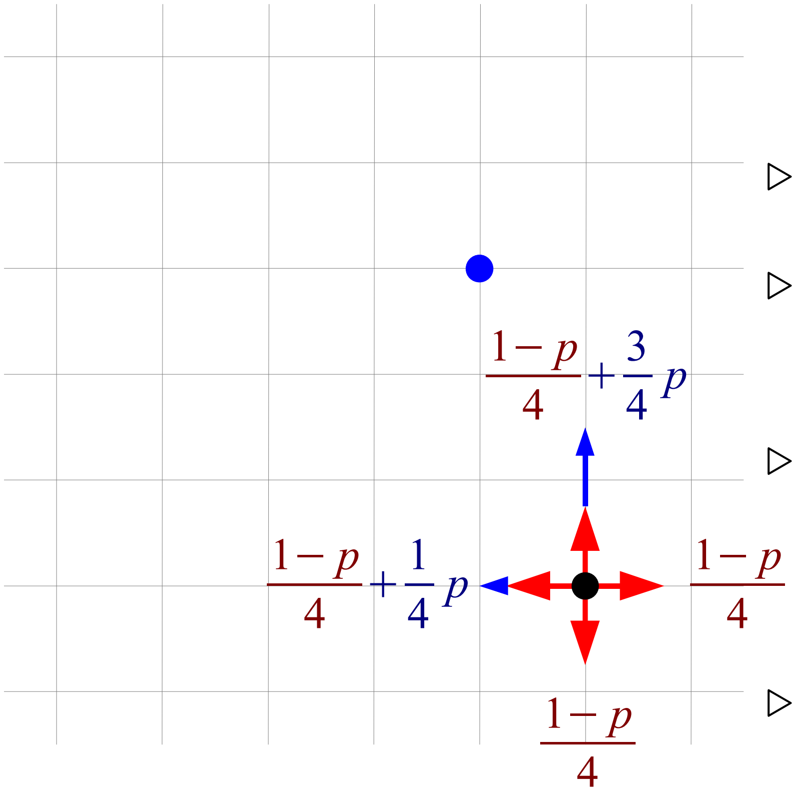


Ein Ansatz mit Drift

- ▷ Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- ▷ In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.
- ▷ Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.
- ▷ Alle n Schritte wird der Drift neu justiert.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.

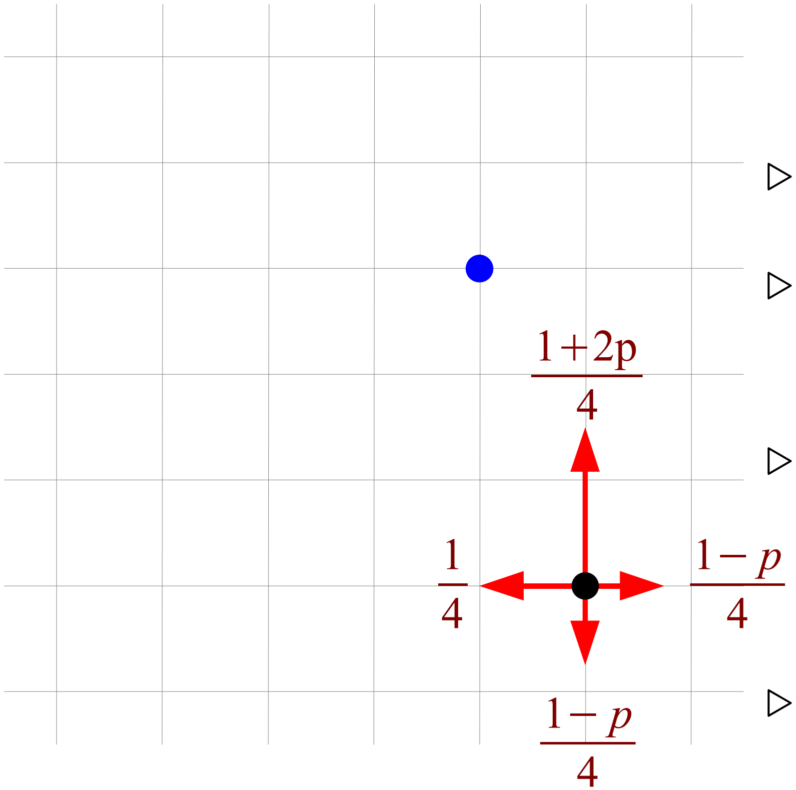


Ein Ansatz mit Drift

- ▷ Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- ▷ In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.
- ▷ Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.
- ▷ Alle n Schritte wird der Drift neu justiert.

Irrfahrten mit Drift: der Vogelflug

Würde man für die Flugroute des Vogels eine symmetrische Irrfahrt annehmen, wäre er mit hoher Wahrscheinlichkeit vor seiner Ankunft gestorben.



Ein Ansatz mit Drift

- ▷ Sei $p \in [0,1]$ der Drift des Vogels.
- ▷ In jede Richtung fliegt der Vogel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{4}$.
- ▷ Zusätzlich erhält er noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit p, in Richtung Ziel zu fliegen.
- ▷ Alle n Schritte wird der Drift neu justiert.

Dies ist ein Erklärungsansatz, warum der Richtungssinn des Vogels nicht besser ist. Die Evolution braucht nicht mehr zu investieren: Die Resultate sind schon gut genug!

Foto: Mike Danzenbaker

Zum Schluss

Dieser Vortrag beruht auf *Die Irrfahrt - Eine Entdeckungsreise in die Welt des Zufalls*, einer Präsentation des Instituts für Mathematik an der Universität Zürich, zu finden auf

www.math.unizh.ch/˜baps/files_for_download/irrfahrten.pdf

Zum Schluss

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!