Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Preprint ISSN 0946 – 8633

Sur les arches lipschitziennes

Jürgen Sprekels[1], Dan Tiba[1,2]

submitted: January 31 2000

[1] Weierstrass Institute
for Applied Analysis
and Stochastics
Mohrenstrasse 39
D–10117 Berlin
Germany
E-Mail: sprekels@wias-berlin.de

[2] Institute of Mathematics
Romanian Academy
P.O. Box 1–764
RO–70700 Bucharest
Romania
E-Mail: tiba@wias-berlin.de
dtiba@stoilow.imar.ro

Preprint No. 550
Berlin 2000

1991 Mathematics Subject Classification. 49J40, 34B10, 93C15, 34A05.

Key words and phrases. Kirchhoff-Love model, variational approach, explicit solution.

Edited by
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)
Mohrenstraße 39
D — 10117 Berlin
Germany

Fax: + 49 30 2044975
E-Mail (X.400): c=de;a=d400-gw;p=WIAS-BERLIN;s=preprint
E-Mail (Internet): preprint@wias-berlin.de
World Wide Web: http://www.wias-berlin.de/

Abstract. We study the Kirchhoff–Love model in the case when the middle curve of the arch has corners. Our approach does not use the Dirichlet principle or the Korn inequality. We propose a variational formulation based on optimal control theory and we obtain explicit formulas for the deformation.

Résumé. On étudie le modèle de Kirchhoff–Love dans le cas quand la courbe moyenne de l'arche a des coins. Notre approche n'utilise pas le principe de Dirichlet ou l'inégalité de Korn. La formulation variationnelle que nous proposons est basée sur la théorie du contrôle optimal et on obtient des formules explicites pour la déformation.

1. Introduction

Nous considérons une arche encastrée de longueur un, d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon}$ et avec la courbe médiane $\varphi : [0,1] \to R^2$ donnée par un arc lipschitzien de Jordan paramétrisé par rapport à sa longueur d'arc $s \in [0,1]$.

Le modèle de Kirchhoff–Love pour la déformation $(v_1, v_2) \in H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1)$, exprimé en coordonnées locales (tangentielles $\times$ normales), a la formulation variationnelle classique (Ciarlet [1978], Chenais et Paumier [1994]):

$$\tag{1} \begin{aligned} &\int_0^1 \left[\frac{1}{\varepsilon} (v_1' - c\, v_2)(u_1' - c\, u_2) + (v_2' + c\, v_1)' (u_2' + c\, u_1)' \right] ds \\ = &\int_0^1 (f_1\, u_1 + f_2\, u_2)\, ds\,, \quad \forall\ u_1 \in H_0^1(0,1)\,, \quad \forall\ u_2 \in H_0^2(0,1)\,, \end{aligned}$$

(les constantes mécaniques sont normalisées).

Ici, $(f_1, f_2) \in L^2(0,1)^2$ représente la force (intérieure et extérieure) qui agit sur l'arche et c est la courbure de l'arc φ. Dans les hypothèses très faibles que nous demandons pour φ, c n'existe pas comme fonction et (1) est écrite formellement. On va définir une nouvelle notion de solution faible qui redonne la solution usuelle dans le cas régulier et qui est limite de solutions classiques associées avec les régularisations de φ. En plus, même si φ peut avoir une infinité de coins, nous n'introduisons pas des conditions de transmission comme dans Geymonat et Sanchez–Palencia [1995] — elles sont contenues dans notre approche d'une manière implicite.

On considère, toujours formellement, le système d'équations différentielles ordinaires:

$$\tag{2} \begin{aligned} v_1' - c\, v_2 &= \tilde{u} && \text{dans }]0,1[\,, \\ v_2' + c\, v_1 &= \tilde{z} && \text{dans }]0,1[\,, \\ v_1(0) &= v_2(0) = 0\,, \end{aligned}$$

avec $\tilde{u} \in L^2(0,1)$, $\tilde{z} \in H_0^1(0,1)$ des fonctions données. Soit $\theta(t) = \int_0^t c(s)\, ds$. Alors, $\theta(t)$ est l'angle entre le vecteur tangent $\varphi(t)' = (\varphi_1', \varphi_2')(t)$ et l'axe horizontal, Ciarlet [1978, p. 432]. Une variante homogène du système (2) a été considéré par Ciarlet [1978, p. 434] comme un moyen auxiliaire dans l'etude de (1). La matrice fondamentale de (1) est donnée par:

$$W(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Si $\varphi \in W^{1,\infty}(0,1)^2$, alors $\theta \in L^\infty(0,1)$ et on a la solution « mild » de (2) donnée en $L^\infty(0,1)^2$ par:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) \;=\; \int_0^t W(t)\,W^{-1}(s)\begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{z}(s) \end{pmatrix} ds\,, \quad \text{p.p. en } [0,1]\,.$$

C'est dans ce sens (provenant de la théorie des sémigroupes, Bénilan [1972], Barbu [1993]) que le système (2) est résolu. Il faut aussi noter que la représentation cartésienne globale de la solution est $W(t)^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) \in W^{1,2}(0,1)$. Donc, le manque de régularité est dû au système local de coordonnées.

La formulation variationnelle faible pour (1) est obtenue comme un problème de contrôle optimal gouverné par (2) et avec les paramètres de minimisation agissant dans les membres droits (voir § 2, $(\mathbf{P}_\varepsilon)$, (4)–(7)). Parce que seulement des restrictions affines, de dimension finie, sont demandées pour l'état (v_1, v_2), on peut obtenir une solution complète du problème de contrôle. Par conséquence, ça va fournir la solution explicite de (1), pour $\varphi \in W^{1,\infty}(0,1)^2$.

Finalement, nous remarquons que, si $\tilde{\varphi} : [a,b] \to R^2$ est un arc de Jordan absolument continu tel que $\tilde{\varphi}' \neq 0$ p.p. dans $[0,1]$, alors la reparamétrisation usuelle par la fonction de longueur de l'arc $s : [a,b] \to [0,1]$, $s(0) = 0$, $s'(t) = |\tilde{\varphi}'(t)|_{R^2}$, donne que $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(s^{-1}(t))$ satisfait $|\varphi'(t)|_{R^2} = 1$ p.p. dans $[0,1]$, c'est-à-dire φ est lipschitzienne et nos résultats peuvent être appliqués.

2. Le Problème de Contrôle

On définit le problème de minimisation suivant:

$$(\mathbf{P}_\varepsilon) \qquad \operatorname{Min}\left\{ \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 u^2\,ds \;+\; \frac{1}{2}\int_0^1 (z')^2\,ds \right\}$$

pour $u \in L^2(0,1)$, $z \in H_0^1(0,1)$ tels que les fonctions $(v_1, v_2) \in L^\infty(0,1)^2$,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) \;=\; \int_0^t W(t)\,W^{-1}(s)\begin{pmatrix} u(s) \;+\; g_1(s) \\ z(s) \;+\; g_2(s) \end{pmatrix} ds \tag{4}$$

satisfont $v_1(1) = v_2(1) = 0$ dans le sens

$$\int_0^1 W^{-1}(s)\begin{pmatrix} u(s) \;+\; g_1(s) \\ z(s) \;+\; g_2(s) \end{pmatrix} ds \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ici, W est défini par (3) et $g_1 \in L^2(0,1)$, $g_2 \in H_0^1(0,1)$ sont données par:

$$g_1 \;=\; \varepsilon\, l\,, \quad -g_2'' \;=\; h\,, \quad g_2(0) \;=\; g_2(1) \;=\; 0\,, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}(t) \;=\; -\int_0^t W(t)\,W^{-1}(s)\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds \tag{7}$$

et représentent l'influence de la force $(f_1, f_2) \in L^2(0,1)^2$ dans $\mathbf{(P}_\varepsilon\mathbf{)}$. La contrainte (5) est une contrainte sur l'état (v_1, v_2), mais elle est exprimée directement sur le contrôle $[u, z]$ parce que le système d'équations différentielles ordinaires pour (v_1, v_2) est résolu par la relation (4) et $W(t)$ est nonsingulaire.

Evidemment, $u = -g_1$, $z = -g_2$ sont des contrôles admissibles pour $\mathbf{(P}_\varepsilon\mathbf{)}$. La fonctionnelle de coût est coercive et strictement convexe. On obtient l'existence d'un point unique de minimisation $[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \in L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$.

Soit $S \subset L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$ le sous-espace fermé des variations admissibles pour $\mathbf{(P}_\varepsilon\mathbf{)}$ et $(\mu, \zeta) \in S$ si et seulement si:

$$\int_0^1 W^{-1}(s) \begin{pmatrix} \mu(s) \\ \zeta(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

S ne dépend pas de l'épaisseur $\varepsilon > 0$ et a la codimension 2 dans $L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$.

L'équation d'Euler associée à $[u_\varepsilon, z_\varepsilon]$ est:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 u_\varepsilon \, \mu \, ds + \int_0^1 z_\varepsilon' \, \zeta' \, ds = 0, \quad \forall \; [\mu, \zeta] \in S. \tag{9}$$

Soient $(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in L^\infty(0,1)^2$ la solution optimale, obtenue de $[u_\varepsilon, z_\varepsilon]$ par (4).

Théorème 1. *Si* $c \in W^{1,\infty}(0,1)$, *alors* v_1^ε, v_2^ε *donnent la solution de* (1).

Démonstration La relation intégrale (4) peut être écrite dans la forme

$$\begin{aligned} v_1^{\varepsilon'} - c\, v_2^\varepsilon &= u_\varepsilon + g_1 \qquad \text{p.p. } [0,1], \\ v_2^{\varepsilon'} + c\, v_1^\varepsilon &= z_\varepsilon + g_2 \qquad \text{p.p. } [0,1]. \end{aligned} \tag{10}$$

Pour chaque $u_1 \in H_0^1(0,1)$, $u_2 \in H_0^2(0,1)$ on introduit:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= u_1' - c\, u_2 \in L^2(0,1), \\ \tilde{\zeta} &= u_2' + c\, u_1 \in H_0^1(0,1) \end{aligned} \tag{11}$$

et alors,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t) = \int_0^t W(t)\, W^{-1}(s) \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix}(s)\, ds.$$

Parce que u_1, u_2 sont nulles dans 0 et 1, on voit que $[\tilde{\mu}, \tilde{\zeta}] \in S$. En tenant compte de (9) et (10), on obtient

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left(v_1^{\varepsilon'} - c\, v_2^\varepsilon - g_1\right)(u_1' - c\, u_2)\; ds + \int_0^1 \left(v_2^{\varepsilon'} + c\, v_1^\varepsilon - g_2\right)' (u_2' + c\, u_1)'\, ds \\
&=\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left(v_1^{\varepsilon'} - c\, v_2^\varepsilon\right)(u_1' - c\, u_2)\; ds + \int_0^1 \left(v_2^{\varepsilon'} + c\, v_1^\varepsilon\right)' (u_2' + c\, u_1)'\; ds \\
&\quad - \int_0^1 l\,(u_1' - c\, u_2)\; ds - \int_0^1 h\,(u_2' + c\, u_1)\; ds \\
&=\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left(v_1^{\varepsilon'} - c\, v_2^\varepsilon\right)(u_1' - c\, u_2)\; ds + \int_0^1 \left(v_2^{\varepsilon'} + c\, v_1^\varepsilon\right)' (u_2' + c\, u_1)'\; ds \\
&\quad + \int_0^1 u_1\,(l' - c\, h)\; ds + \int_0^1 u_2\,(h' + c\, l)\; .
\end{aligned}$$

Alors, (1) est une conséquence directe de (7) et de la régularité de c.

Remarque 1. Notre méthode est variationnelle et constructive et n'utilise pas l'inégalité de Korn ou le principe de Dirichlet. En tenant compte du contre-exemple de Geymonat et Gilardi [1998], cette approche peut fournir des solutions dans les cas où les données ne sont pas régulières.

Remarque 2. La relation (9) montre aussi que $[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \in S_\varepsilon^\perp$, l'espace orthogonal à S dans $L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$, muni avec le produit scalaire

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 u\, \mu\, ds + \int_0^1 z'\, \zeta'\, ds\,. \tag{12}$$

La dimension de $S_\varepsilon^\perp$ est deux et on a aussi $[u_\varepsilon + g_1\,,\ z_\varepsilon + g_2] \in S$ par (5) et (8). Alors,

$$[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \;=\; -\,\mathrm{proj}_{S_\varepsilon^\perp}[g_1, g_2] \tag{13}$$

où l'opérateur de projection utilise la norme construite à partir de (12).

Dans le cas $\theta \in L^\infty(0,1)$, on a la généralisation suivante du Théorème 1:

Théorème 2: *Pour chaque $[\mu, \zeta] \in S$, nous avons*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (u_\varepsilon + g_1)\, \mu\, ds + \int_0^1 (z_\varepsilon + g_2)' \zeta'\, ds \;=\; \int_0^1 (f_1\, u_1 + f_2\, u_2)\, ds \tag{14}$$

ou on prend:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(s) \;=\; -\int_s^1 W(s)\, W^{-1}(t) \begin{pmatrix} \mu(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} dt\,, \quad \text{p.p. } s \in [0,1]\,. \tag{15}$$

Démonstration Par $[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \in S_\varepsilon^\perp$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (u_\varepsilon + g_1)\mu\, ds + \int_0^1 (z_\varepsilon + g_2)'\zeta'\, ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 g_1\,\mu - \int_0^1 \zeta\, g_2''$$

$$= \int_0^1 (\mu,\zeta)\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 (\mu,\zeta)(t)\int_0^t W(t)\,W^{-1}(s)\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds\, dt$$

$$= -\int_0^1\int_0^t (f_1(s), f_2(s))W(s)\,W^{-1}(t)\begin{pmatrix} \mu(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} ds\, dt$$

par l'orthogonalité de la matrice $W(\,\cdot\,)$ et par (7) et (15).

Le théorème de Fubini et (15) donnent le résultat.

Remarque 3. On peut déduire le **Théorème 1** directement du **Théorème 2**. Si θ_δ est une régularisation (par convolution avec un noyau de Friedrichs) de $\theta \in L^\infty(0,1)$ et si $(v_1^\varepsilon\,,\, v_2^\varepsilon)_\delta$ est la solution de (1) associée à $c_\delta = \theta'_\delta$, alors on peut prouver que $(v_1^\varepsilon\,,\, v_2^\varepsilon)_\delta \to (v_1^\varepsilon\,,\, v_2^\varepsilon)$ pour $\delta \to 0$, dans $L^r(0,1)^2$, $\forall\ r \geq 1$.

Remarque 4. Le problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ donne une nouvelle définition de solution faible pour l'équation (1) et les résultats de cette section montrent que c'est une extension naturelle de la définition variationnelle classique, pour le cas des arches lipschitziennes.

3. La Solution Explicite

Le point de départ sont les relations (13) et (8). On réécrit (8) comme deux relations d'orthogonalité dans le produit scalaire (12):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \varepsilon\cos\theta(s)\,\mu(s)\,ds + \int_0^1 w_1'(s)\,\zeta'(s)\,ds = 0\,, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \varepsilon\sin\theta(s)\,\mu(s)\,ds + \int_0^1 w_2'(s)\,\zeta'(s)\,ds = 0\,, \tag{17}$$

où $w_1, w_2 \in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ sont obtenues par:

$$w_1''(s) = \sin\theta(s)\,, \qquad \text{p.p. } s \in [0,1]\,, \tag{18}$$

$$w_2''(s) = -\cos\theta(s)\,, \qquad \text{p.p. } s \in [0,1]\,. \tag{19}$$

Alors, les vecteurs (indépendants!) $(\varepsilon\cos\theta(\,\cdot\,)\,,\, w_1(\,\cdot\,))$ et $(\varepsilon\sin\theta(\,\cdot\,)\,,\, w_2(\,\cdot\,))$ donnent une base dans $S_\varepsilon^\perp$ et, par (13), il y a $\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon \in R$ tels que

$$[u_\varepsilon, z_\varepsilon] = \lambda_1^\varepsilon(\varepsilon\cos\theta, w_1) + \lambda_2^\varepsilon(\varepsilon\sin\theta, w_2)\,. \tag{20}$$

Encore par (13), on voit que $(\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon)$ peut être obtenue comme la paire optimale unique du problème d'optimisation sans contraintes:

$$(\mathbf{D}_\varepsilon) \qquad \operatorname*{Min}_{\lambda_1,\lambda_2 \in R} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 (\lambda_1 \varepsilon \cos\theta(s) + \lambda_2 \varepsilon \sin\theta(s) + \varepsilon\, l(s))^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left| \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + g_2 \right|^2_{H_0^1} \right\}$$

où $|\rho|^2_{H_0^1} = \displaystyle\int_0^1 (\rho')^2 ds$.

On calcule λ_1^ε, λ_2^ε effectivement en résolvant le système algébrique linéaire donné par les conditions d'optimalité du premier ordre qu'on obtient facilement. Le déterminant du système est strictement positif par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la définition de la base en $S_\varepsilon^\perp$. On a démontré le:

Théorème 3. *La solution de l'équation* (1) *(ou l'état optimal de* $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ *pour* $\theta \in L^\infty(0,1)$ *) est donnée par les formules* (20) *et* (4) *avec* $(\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon)$ *solution unique de* $(\mathbf{D}_\varepsilon)$ *et* w_1, w_2, g_1, g_2 *calculées par* (18), (19), (6), (7).

Remarque 5. Dans la théorie de l'optimisation, le problème $(\mathbf{D}_\varepsilon)$ est le problème dual de $(\mathbf{P}_\varepsilon)$. Sa solution complète est possible parce que les restrictions dans $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ sont affines et dans un espace de dimension finie. Il faut noter que la solution proposée par le **Théorème 3** implique le calcul des intégrales des fonctions w_1, w_2, f_1, f_2, g_1, g_2, etc. Donc, dans les applications, il faut utiliser une approximation numérique des intégrales qui apparaissent. Dans des situations simples (par exemple: forces constantes) on peut même écrire des formules explicites pour v_1^ε, v_2^ε. En particulier, on obtient une solution complète du « locking » problème, Chenais et Paumier [1994] dans le cas des arches.

Remarque 6. Si $c \in W^{1,\infty}(0,1)$, on peut passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (1) et on obtient un modèle « en flexion » de l'arche:

$$\int_0^1 (v_2' + c\, v_1)'(u_2' + c\, u_1)'\, ds = \int_0^1 (f_1 u_1 + f_2 u_2)$$
$$\forall\ (u_1, u_2) \in V_F = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \in H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1)\, ;\, \mu_1' - c\, \mu_2 = 0 \right\}.$$

Une présentation détaillée du comportement asymptotique des coques est donnée dans Ciarlet [1998]. Il faut souligner que cette propriété reste vraie pour le problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$. Le passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, peut être étudié par le principe de Pontryaguine et le problème obtenu a la même structure que $(\mathbf{P}_\varepsilon)$, avec $u \equiv 0$ et $g_1 \equiv 0$ (ce qui concorde avec la définition de V_F).

4. Appendix

Les Figures 1–6 montrent les déformations des poutres ou des arches romaines et gothiques avec différentes épaisseurs et forces. Nous soulignons que, pour l'arche gothique, $\theta \in L^\infty(0,1)$ n'est pas continu. Les expériences numériques ont été effectuées par Dr. A. Ignat de l'Université de Iaşi, Roumanie. La Figure 5 est un exemple d'arche « en flexion », avec le modèle de la Remarque 6. La constante E est la constante de Young du matériel. Les différences entre la Figure 6 et la Figure 3 (complétée avec sa symmetrique par rapport à l'axe verticale) sont déterminées seulement par les points différents de fixation.

5. Références bibliographiques

[1] V. Barbu, *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems*, Academic Press, Boston (1993).

[2] Ph. Bénilan, *Solutions intégrales d'équations d'évolution dans un espace de Banach*, CRAS Paris **274** (1972), p. 47–50.

[3] D. Chenais et J.-C. Paumier, *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*, Numer. Math. **67** (1994), p. 427–440.

[4] Ph. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[5] Ph. Ciarlet, *Introduction to linear shell theory*, Gauthier–Villars, Paris (1998).

[6] G. Geymonat et G. Gilardi, *Contre-exemples à l'inégalité de Korn et au lemme de Lions dans des domaines irréguliers*, in « Equations aux dérivées partielles et applications. Articles dédiés à Jacques-Louis Lions », Gauthier–Villars, Paris (1998), p. 541–548.

[7] G. Geymonat et E. Sanchez-Palencia, *On the rigidity of certain surfaces with folds and applications to shell theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), p. 11–45.

$\theta(t) = t,\ \ f_1(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \cos(t) / E,\ \ \ f_2(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \sin(t) / E\ ,\ \ \ \ t \in [0,\pi],\ \ E = 100$

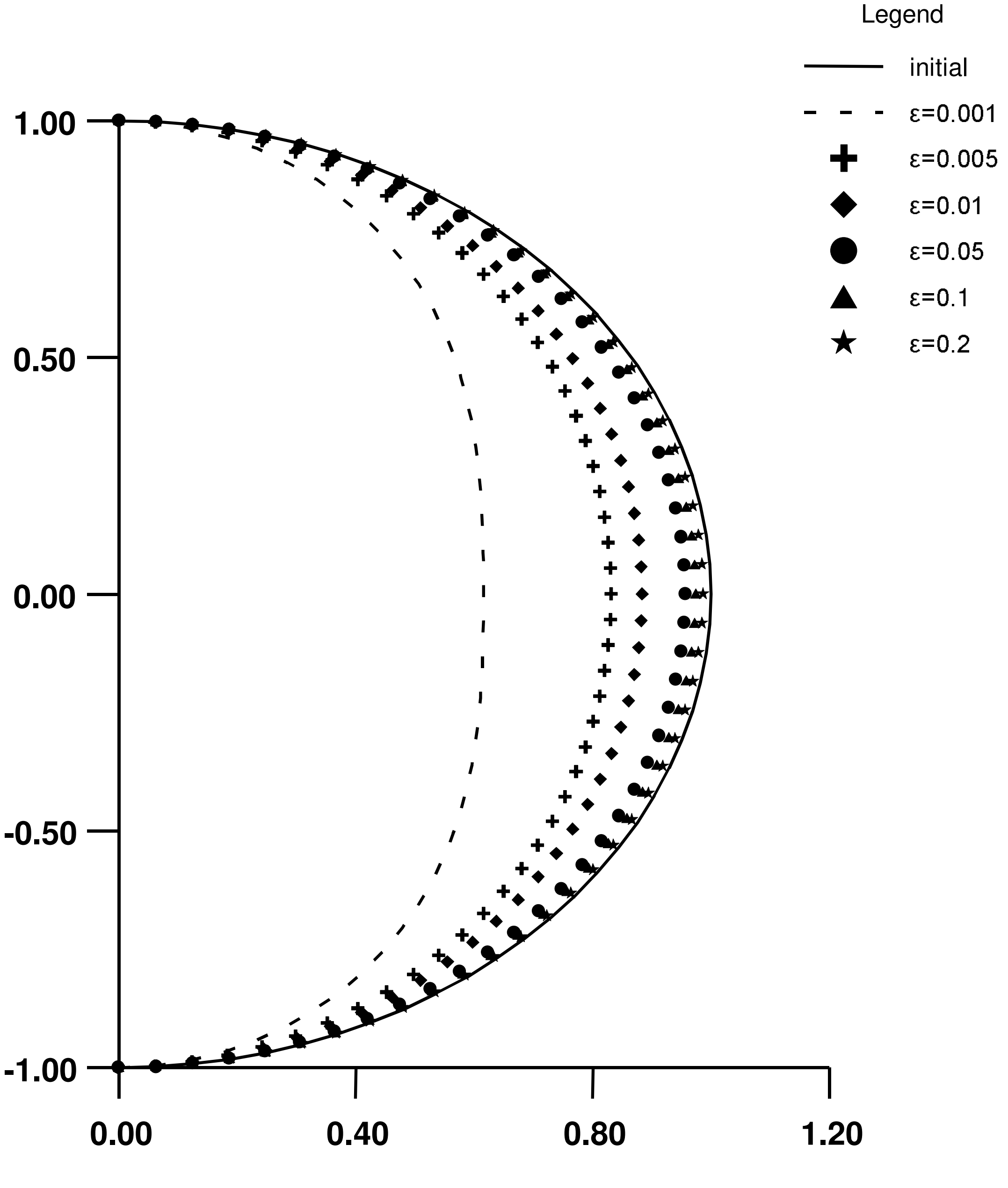

Figure 1

$$\theta(t) = t, \quad t \in [0,\pi/3], \; \theta(t) = t+\pi/3, \quad t \in [\pi/3, 2\pi/3],$$

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = \varepsilon^{(-3/2)} / E, \; E = 10$$

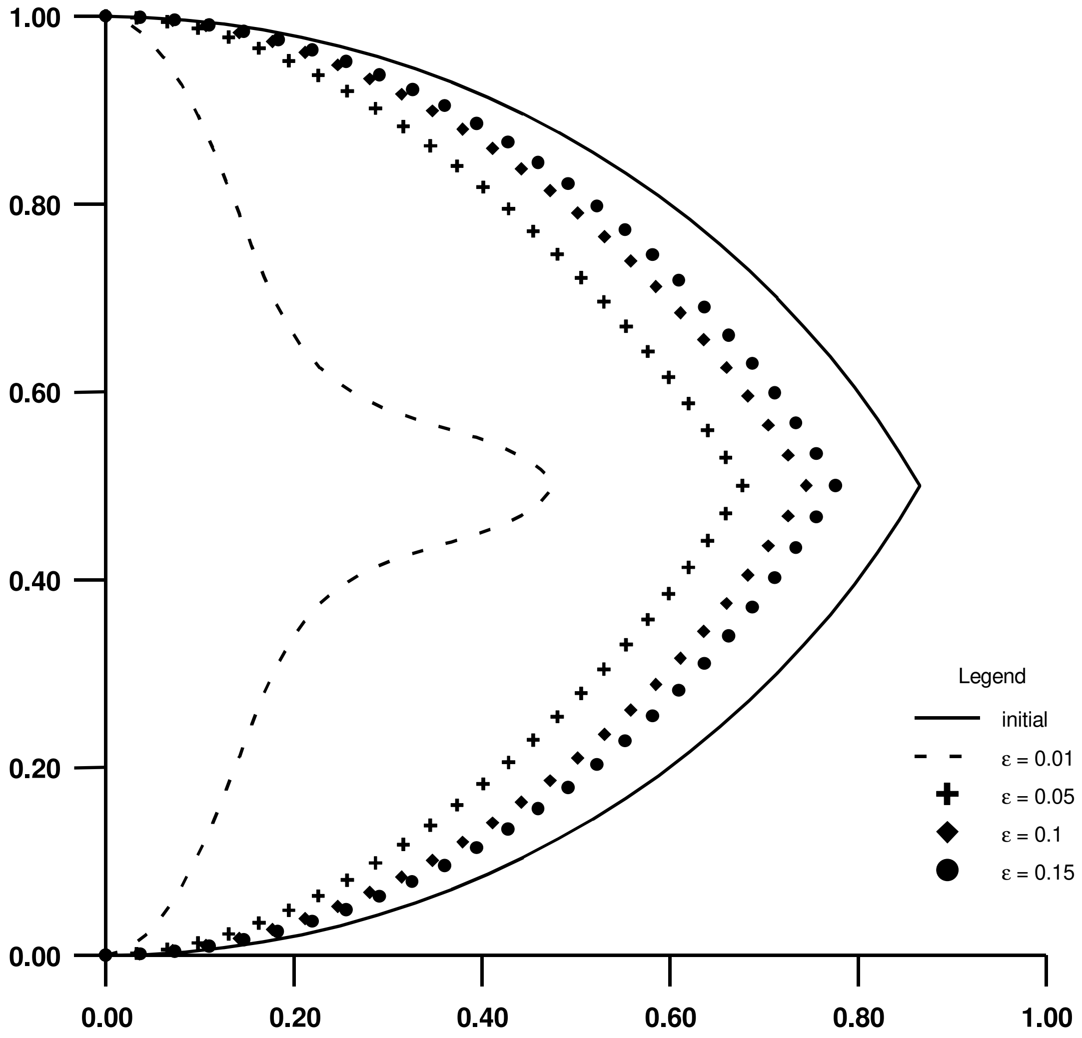

Figure 2

$\theta(t) = t$, $f_1(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \sin(t) / E$, $f_2(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \cos(t) / E$, $t \in [0,\pi]$, E=10

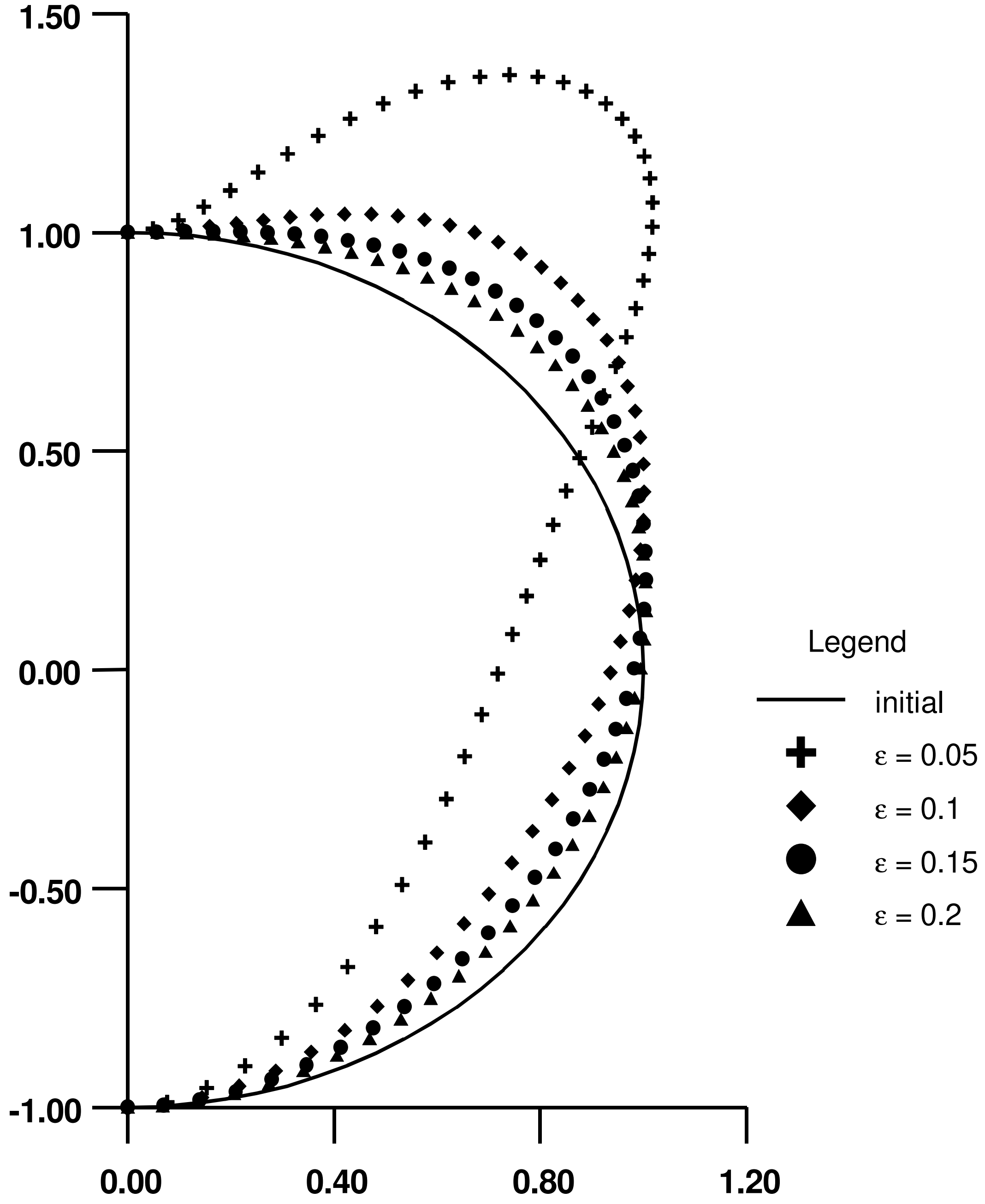

Figure 3

$\theta(t) = 0,\ \ f_1(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \sin(t) / E,\ \ \ f_2(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \cos(t) / E\ ,\ \ \ \ t \in [0,\pi],\ \ E = 10$

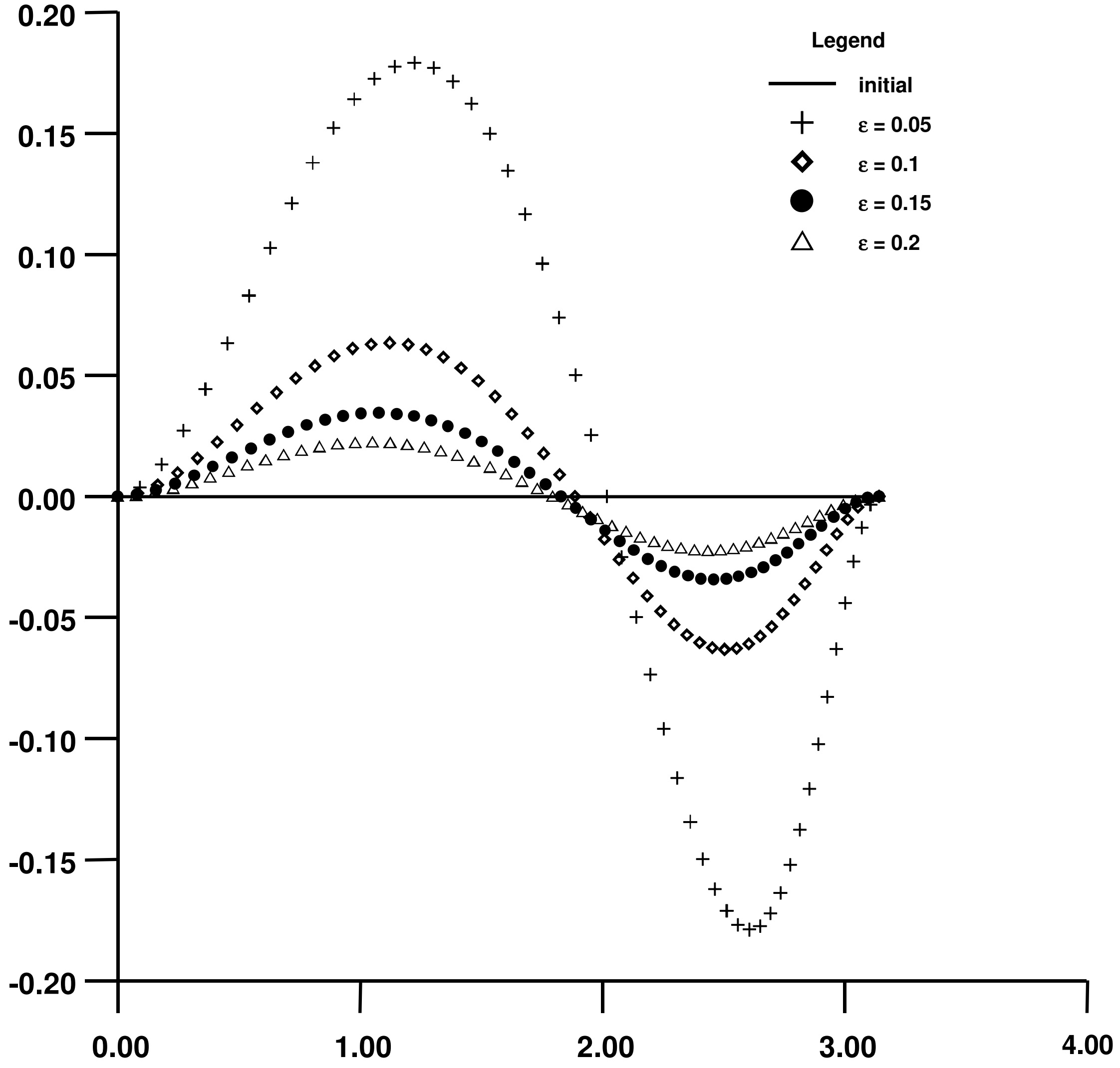

Figure 4

$\theta(t) = t$, $f_1(t) = \sin(t)$, $f_2(t) = 2\cos(t)$, $t \in [0,\pi]$

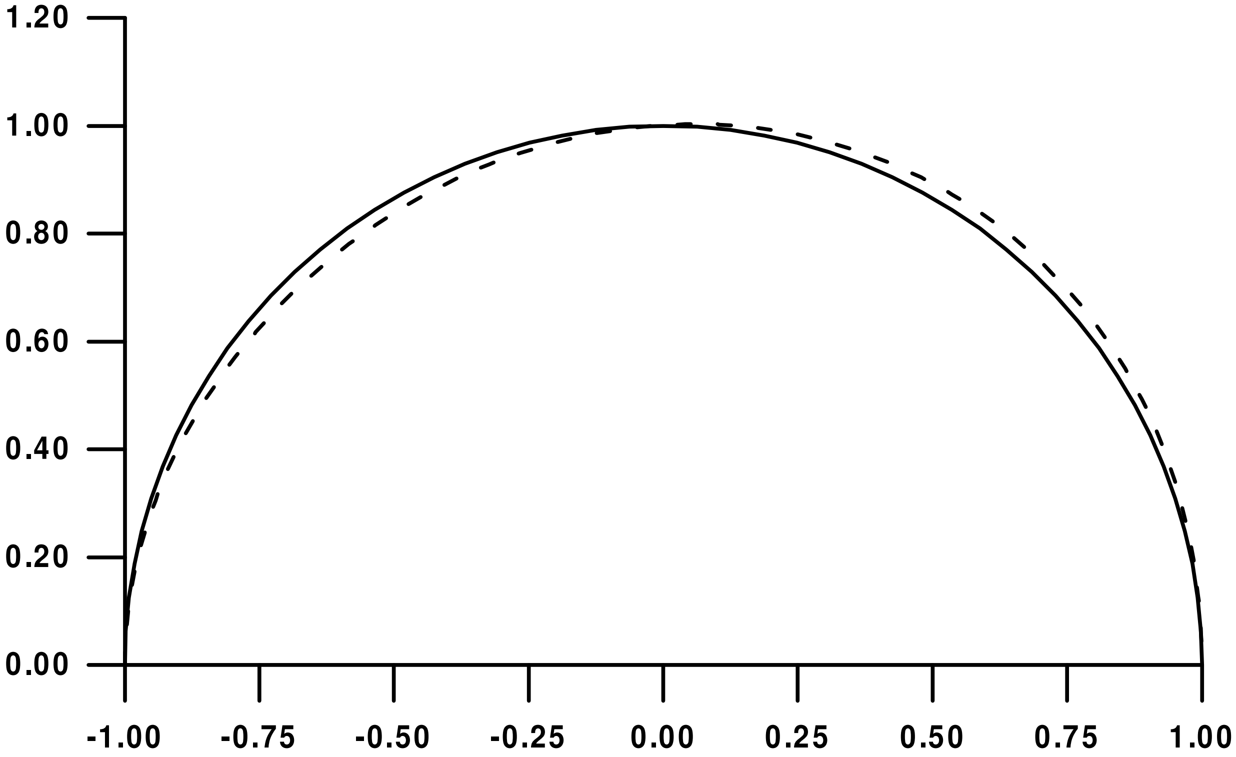

Figure 5

$\theta(t) = t$, $f_1(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \sin(t) / E$, $f_2(t) = \varepsilon^{(-3/2)} \cos(t) / E$, $t \in [0,2\pi]$, E=100

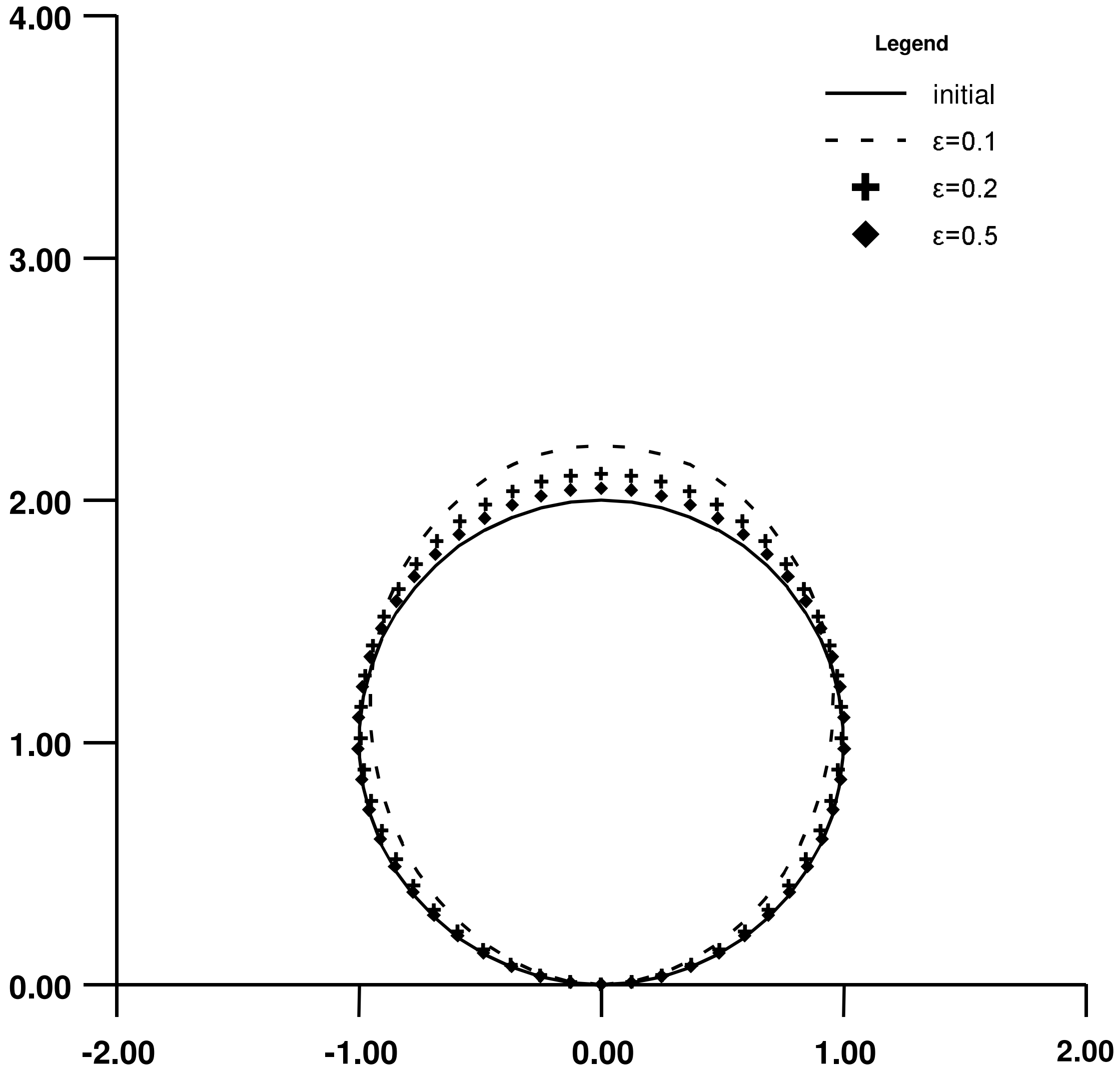

Figure 6