

Propriétés de boum-boum généralisées dans l'optimisation des plaques

Jürgen Sprekels* Dan Tiba†

June 4, 1998

1991 Mathematics Subject Classification: 35R30, 93C20, 73K40

Keywords: Bang-bang principles, shape optimization of plates, optimal control, necessary conditions of optimality

*Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstrasse 39, D-10117 Berlin, Germany, e-Mail: sprekels@wias-berlin.de

†Institut de Mathématiques, Académie Roumaine, B.P. 1-764, RO-70700 Bucarest, Roumanie, e-Mail: dtiba@stoilow.imar.ro

Abstract

Resumé. Non considérons pour une plaque posée deux problèmes d'optimisation: la minimisation du volume et l'identification d'un coefficient. Via une transformation récemment introduite par les auteurs, on obtient les conditions d'optimalité dans une forme qualifiée et leur analyse entraîne les propriétés de boum-boum pour l'épaisseur optimale.

1 Introduction

Nous considérons l'équation:

$$\Delta(u^3 \Delta y) = f \quad \text{dans } \Omega , \quad (1.1)$$

$$y = \Delta y = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega , \quad (1.2)$$

qui donne, en dimension deux, un modèle simplifié pour une plaque posée (Bendsoe [2, p.91]).

Ici Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^N avec une frontière régulière $\partial\Omega$, $u \in L^\infty(\Omega)_+$ est l'épaisseur de la plaque, $f \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2}$, est la charge (fixée) et $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est la déformation obtenue comme la solution faible de (1.1), (1.2).

On étudie deux problèmes d'optimisation associés à (1.1), (1.2):

- minimisation du volume (ou du poids):

$$\text{Min} \int_{\Omega} u(x) dx ; \quad (1.3)$$

- identification d'un coefficient correspondant à une déformation désirée ou observée, $y_d \in L^2(\Omega)$:

$$\text{Min} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx . \quad (1.4)$$

On impose aussi des contraintes, naturelles dans ce cadre (m, M, τ sont des constantes positives):

$$m \leq u(x) \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega , \quad (1.5)$$

$$y(x) \geq -\tau \quad \text{p.p. dans } \Omega . \quad (1.6)$$

On montre, que l'hypothèse d'admissibilité est satisfaite si M est "assez grand". Si $z \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ note la solution forte de $\Delta z = f$ dans Ω , $z = 0$ sur $\partial\Omega$, alors une transformation directe donne

$$\Delta y = z\ell \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad y = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.7)$$

avec $\ell = u^{-3}$ satisfaisant

$$M^{-3} \leq \ell(x) \leq m^{-3} \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (1.8)$$

C'est un cas particuliers des transformation de "resizing" étudiées dans Sprekels et Tiba [5]. La fonctionnelle (1.3) devient

$$\text{Min} \int_{\Omega} \ell^{-\frac{1}{3}}(x) dx \quad (1.9)$$

et les relations (1.4), (1.6) restent invariantes. On voit que les problèmes d'optimisation (1.3), (1.4) peuvent être réformulés comme des problèmes de contrôle distribués associés à l'équation linéaire (1.7) de deuxième ordre seulement. En particulier, on obtient facilement l'existence d'au moins une paire optimale $[y^*, u^*]$. Dans la section suivante, on discute les conditions d'optimalité pour un problème convexe de contrôle gouverné par l'équation (1.7) et avec les contraintes (1.8), (1.6). On montre que le multiplicateur de Lagrange est une fonction $r^* \in L^s(\Omega)$, $1 < s < \frac{N}{N-2}$, même si la contrainte (1.6) donne un ensemble avec intérieur vide en $L^t(\Omega)$, $1 \leq t < \infty$. C'est un résultat de régularité démontré par une modification des arguments de Bergounioux et Tiba [3]. La dernière section est dédiée aux propriétés de boum-boum ou de boum-boum généralisées pour les solutions $[y^*, u^*]$, dans le sens de Tröltzsch [6].

2 Les conditions d'optimalité

Soient $\phi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctionnelles continues, convexes, Gâteaux différentiables, bornées inférieurement par une constante. On considère le problème de contrôle

$$\text{Min}\{\phi(\ell) + \psi(y)\} \quad (2.1)$$

avec $[y, \ell]$ satisfaisant aux conditions (1.6) - (1.8).

La paire $[0, 0]$ vérifie (1.6), (1.7). Alors, si M est "assez grand", $\bar{\ell} = M^{-3}$ est une petite perturbation de 0 et la solution de (1.7), notée \bar{y} , reste dans un voisinage de 0 dans la topologie de $W^{2,t}(\Omega)$, $1 \leq t < \infty$, et, donc, dans

la topologie uniforme sur Ω . Finalement, $[\bar{y}, \bar{\ell}]$ satisfait toutes les conditions (1.6) - (1.8). L'existence d'une couple optimale $[y^*, \ell^*]$ est connue (pas nécessairement unique avec le coût donné par (2.1)).

On introduit:

$$U_{ad} = \{ \ell \in L^2(\Omega); \quad M^{-3} \leq \ell(x) \leq m^{-3} \quad \text{p.p. } \Omega \}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{C} = \{ y \in L^2(\Omega); \quad y(x) \geq -\tau \quad \text{p.p. } \Omega \}. \quad (2.3)$$

Théorème 2.1. *Si M est assez grand, il y a $r^* \in L^s(\Omega)$, tel que la paire $[y^*, \ell^*]$ est solution optimale pour le problème (2.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} & \left(\Delta \phi(\ell^*), \kappa - \ell^* \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\Delta \psi(y^*), \mu - y^* \right)_{L^2(\Omega)} \quad (2.4) \\ & + (r^*, \Delta \mu - z \kappa)_{L^s(\Omega) \times L^q(\Omega)} \geq 0, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1, \quad q > \frac{N}{2}, \\ & \forall \kappa \in U_{ad}, \forall \mu \in \mathcal{C} \cap W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Remarque. En prenant $\kappa = \ell^*$ ou $\mu = y^*$ on peut réécrire (2.4) sous la forme de deux inégalités qui correspondent aux notions classiques "équation adjointe" et "principe de maximum de Pontryaguine". Le remplacement de l'équation adjointe par une inégalité quand des contraintes sont imposées sur l'état a été introduite par Bergounioux et Tiba [3] et permet l'affaiblissement des hypothèses de qualification.

Preuve du Théorème 2.1. On définit le problème pénalisé

$$\text{Min} \left\{ \phi(\ell) + \psi(y) + \frac{1}{2} |\ell - \ell^*|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} |\Delta y - z \ell|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \quad (2.5)$$

pour $[y, \ell]$ dans $[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$ et satisfaisant (1.6), (1.8). La paire $[y^*, \ell^*]$ est admissible pour (2.5) et on note par $[y_\epsilon, \ell_\epsilon]$ la paire optimale unique de (2.5), $\epsilon > 0$. On note aussi

$$r_\epsilon = \epsilon^{-1} (\Delta y_\epsilon - z \ell_\epsilon) \in L^2(\Omega). \quad (2.6)$$

Evidemment, on a

$$\phi(\ell_\epsilon) + \psi(y_\epsilon) + \frac{1}{2} |\ell_\epsilon - \ell^*|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} |\Delta y_\epsilon - z \ell_\epsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \phi(\ell^*) + \psi(y^*), \quad \forall \epsilon > 0$$

ce qui montre, avec les autres hypothèses, que $\{\ell_\epsilon\}$ est borné en $L^\infty(\Omega)$, $\{\epsilon^{\frac{1}{2}} r_\epsilon\}$ est borné dans $L^2(\Omega)$ et, par conséquence, $\{y_\epsilon\}$ est borné dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On peut supposer que $\ell_\epsilon \rightarrow \hat{\ell}$ faiblement* en $L^\infty(\Omega)$, $y_\epsilon \rightarrow \hat{y}$ faiblement en

$H^2(\Omega)$ et $\Delta y_\epsilon - z\ell_\epsilon \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(\Omega)$, sur une sous-suite. Il suit que $[\hat{y}, \hat{\ell}]$ satisfait (1.6) - (1.8) et

$$\phi(\hat{\ell}) + \psi(\hat{y}) + \frac{1}{2}|\hat{\ell} - \ell^*|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \phi(\ell^*) + \psi(y^*)$$

par la faible semicontinuité inférieure de la fonctionnelle (2.5). Alors $\hat{\ell} = \ell^*$, $\hat{y} = y^*$ et $\ell_\epsilon \rightarrow \ell^*$ fortement dans $L^t(\Omega)$, $1 \leq t < \infty$ (par le théorème de Lebesgue), $y_\epsilon \rightarrow y^*$ fortement dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En faisant des variations de la forme $[y_\epsilon + \lambda\tilde{\mu}, \ell_\epsilon + \lambda\tilde{\kappa}]$, $\lambda \in [0, 1]$, $\tilde{\kappa} \in U_{ad} - \ell_\epsilon$, $\tilde{\mu} \in \mathcal{C} - y_\epsilon$, $\tilde{\mu} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, un calcul direct montre que $[y_\epsilon, \ell_\epsilon]$ satisfait les conditions nécessaires d'optimalité:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla \phi(\ell_\epsilon), \kappa - \ell_\epsilon \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\nabla \psi(y_\epsilon), \mu - y_\epsilon \right)_{L^2(\Omega)} + \quad (2.7) \\ & (\ell_\epsilon - \ell^*, \kappa - \ell_\epsilon)_{L^2(\Omega)} + (r_\epsilon, \Delta\mu - z\kappa - \epsilon r_\epsilon)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \\ & \forall \kappa \in U_{ad}, \quad \forall \mu \in \mathcal{C} \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

avec r_ϵ donné par (2.6).

On peut négliger le terme ϵr_ϵ dans (2.7). Les hypothèses sur ϕ, ψ donnent que $\nabla \phi, \nabla \psi$ sont localement borné dans $L^2(\Omega)$. Alors, la convergence forte de $\{\ell_\epsilon\}, \{y_\epsilon\}$ montre que $\{\nabla \phi(\ell_\epsilon)\}, \{\nabla \psi(y_\epsilon)\}$ sont borné dans $L^2(\Omega)$ et, donc, $\nabla \phi(\ell_\epsilon) \rightarrow \nabla \phi(\ell^*), \nabla \psi(y_\epsilon) \rightarrow \nabla \psi(y^*)$ dans $L^2(\Omega)$ faible, à cause de la fermeture dans la topologie forte \times faible de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des opérateurs maximaux monotones $\nabla \phi, \nabla \psi$. Finalement, l'inégalité (2.7) a pour conséquence que

$$(r_\epsilon, \Delta\mu - z\kappa) \geq -ct. \quad (2.8)$$

si $\kappa \in U_{ad}$ et $\mu \in \mathcal{C} \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ reste borné dans $L^2(\Omega)$.

On choisit μ comme la solution de

$$\Delta\mu = \rho \quad \text{dans } \Omega, \quad \mu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.9)$$

avec $|\rho|_{L^q(\Omega)} \leq \delta$. Si δ est petit et $q > \frac{N}{2}$ alors la dépendance continue de μ sur ρ , dans (2.9), donne $\mu(x) \geq -\frac{\rho}{2}$ dans Ω et, évidemment, $\mu \in \mathcal{C} \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, en restant dans un ensemble borné de $L^2(\Omega)$. Maintenant, si M est "assez grand", la solution $\mu_{M,\rho}$ de

$$\Delta\mu_{M,\rho} = \rho + zM^{-3} \quad \text{dans } \Omega, \quad \mu_{M,\rho} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

satisfait les mêmes propriétés. On peut utiliser les paires $[\mu_{M,\rho}, M^{-3}], |\rho|_{L^q(\Omega)} \leq \delta$, dans (2.8) et on obtient que $\{r_\epsilon\}$ est borné dans $L^s(\Omega)$. On note par r^* la limite faible de r_ϵ , sur une sous-suite, et on peut passer à la limite dans (2.7) pour obtenir (2.4).

La réciproque est claire: chaque paire admissible $[y, \ell]$ pour le problème original peut être utilisée dans (2.4) à la place de $[\mu, \kappa]$, avec $\Delta\mu - z\kappa = 0$, et l'optimalité de $[y^*, \ell^*]$ suit par la définition de la sousdifférentielle.

Remarque. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on peut prendre $s = q = 2$.

Remarque. Le **Théorème 2.1** donne un résultat d'existence et de régularité pour le multiplicateur de Lagrange sous une hypothèse naturelle sur M , qui dépend seulement des autres données f et τ .

3 Les propriétés de boum-boum

Si $\phi(\ell) = 0$, $\psi(y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx$, le problème (2.1) devient (1.4). Clairement, $y^* \in C(\bar{\Omega})$ et l'ensemble

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : y^*(x) = -\tau\} \quad (3.1)$$

est fermé, tandis que $\Omega \setminus \Omega_1$ est ouvert. Soit $d \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \Omega_1)$ et $\lambda > 0$ tel que $y^*(x) \geq -\tau + \lambda$ sur le compact $\text{supp } d$. Alors on peut choisir $\mu = y^* \pm \sigma d$ (σ "petit") et $\kappa = \ell^*$ dans (2.4) et on a

$$\pm(y^* - y_d, \sigma d)_{L^2(\Omega)} \pm (r^*, \sigma \Delta d)_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

c'est à dire on a l'équation "adjointe":

$$-\Delta r^* = y^* - y_d \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \Omega_1). \quad (3.2)$$

Supposons que $y_d \in L^q(\Omega)$, alors (3.2) donne $r^* \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\Omega \setminus \Omega_1)$ et $r^* \in C(\Omega \setminus \Omega_1)$. Soient:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{x \in \Omega \setminus \Omega_1 ; z(x)r^*(x) > 0\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in \Omega \setminus \Omega_1 ; z(x)r^*(x) < 0\} \end{aligned}$$

qui sont des ouvertures dans Ω et $\Omega_4 = (\Omega \setminus \Omega_1) \setminus (\Omega_2 \cup \Omega_3)$.

Si on prend $\mu = y^*$ et $\kappa = \ell^*$ dans $\Omega \setminus \Omega_2$, alors (2.4) montre

$$(zr^*, \ell^* - \kappa)_{L^s(\Omega_2) \times L^q(\Omega_2)} \geq 0$$

et, donc, $\ell^* = m^{-3}$ p.p. Ω_2 . De la même manière, on a $\ell^* = M^{-3}$ p.p. Ω_3 .

Supposons que $f \neq 0$ p.p. Ω . Alors l'ensemble où $z(x) = 0$ a mesure nulle et, si Ω_4 a mesure positive, on obtient $r^*(x) = 0$ p.p. Ω_4 . La régularité maximale de r^* dans $\Omega \setminus \Omega_1$ et (3.2) impliquent $y^*(x) = y_d(x)$ p.p. dans Ω_4 , Brezis [4, p.195]. Evidemment, (1.7) montre aussi que Ω_1 a mesure nulle.

Corollaire 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, si $y_d \in L^q(\Omega)$ et $f \neq 0$ p.p. dans Ω , alors pour la paire optimale $[y^*, u^*]$ unique du problème (1.4) il y a un ensemble de mesure nulle $\Omega^* \subset \Omega$ tel que*

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega^* \cup \{x \in \Omega : u^*(x) = M\} \cup \{x \in \Omega : u^*(x) = m\} \cup \\ \cup \{x \in \Omega : y^*(x) = -\tau\} \cup \{x \in \Omega : y^*(x) = y_d(x)\}. \end{aligned}$$

Remarque Des résultats de ce type ont été mis en évidence pour la première fois dans le livre de F. Tröltzsch [6] sous le nom de propriété de boum-boum généralisée.

Dans le cas des problèmes de minimisation du volume de la plaque, on prouve la propriété classique de boum-boum pour l'épaisseur optimale.

Nous choisissons $\psi(y) = 0$ et $\phi(\ell) = -\int_{\Omega} \ell(x) dx$. Par la transformation qu'on utilise, $\ell(x) = u^{-3}(x)$, le problème (2.1) est équivalent avec la minimisation de

$$-\int u^{-3}(x) dx \quad (1.3')$$

qui représente une variante du problème (1.3) parce que l'application $u \rightarrow -u^{-3}$ est aussi croissante pour $u > 0$. On définit Ω_1 comme dans (3.1) et on obtient l'équation "adjointe"

$$\Delta r^* = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega \setminus \Omega_1) \quad (3.2')$$

et, par conséquence, $r^* \in C^\infty(\Omega \setminus \Omega_1)$.

Si $\mu = y^*$, alors (2.4) donne

$$(zr^* + 1, \ell^* - \kappa)_{L^s(\Omega) \times L^q(\Omega)} \geq 0, \quad \forall \kappa \in U_{ad}$$

On introduit les ensembles ouverts $\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3 \subset \Omega \setminus \Omega_1$ par la condition $\pm(zr^* + 1)(x) > 0$. Comme auparavant, il suit que $\ell^* = m^{-3}$ p.p. dans $\tilde{\Omega}_2$ et $\ell^* = M^{-3}$ p.p. dans $\tilde{\Omega}_3$.

Si l'ensemble $\tilde{\Omega}_4 = \{x \in \Omega \setminus \Omega_1 : z(x)r^*(x) + 1 = 0\}$ a une mesure positive, la régularité maximale permet de dériver directement (Brezis, [4, p.195]) et on a

$$\Delta r^* = \frac{z\Delta z - 2|\Delta z|^2}{z^3} = 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \tilde{\Omega}_4,$$

c'est à dire $z\Delta z \geq 0$ p.p. dans $\tilde{\Omega}_4$. Ajoutons l'hypothèse que $f(x)$ ne change pas de signe dans Ω . Alors la définition de z et le principe de maximum montrent que $z\Delta z < 0$ dans Ω et, donc, $\tilde{\Omega}_4$ a la mesure nulle. Parce que z est continue, le principe de maximum fort donne $z(x) \neq 0$ dans Ω et, donc, $\Delta y^* \neq 0$ dans Ω par (1.7). Alors, la régularité maximale de y^* implique que Ω_1 a aussi la mesure nulle.

On a prouvé le

Corollaire 3.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1., si $f \neq 0$ p.p. Ω et ne change pas de signe dans Ω , alors pour chaque épaisseur optimale de (1.3'), il y a un ensemble de mesure nulle Ω^* tel que*

$$\Omega = \Omega^* \cup \{x \in \Omega; u^*(x) = M\} \cup \{x \in \Omega; u^*(x) = m\} .$$

Remarque Dans l'ouvrage de Arnautu, Langmach, Sprekels et Tiba [1], on donne des méthodes numériques pour le calcul et l'optimisation des plaques et on a retrouvé dans les exemples la propriété de boum-boum du **Corollaire 3.2.**

Références

- [1] V. Arnautu, H. Langmach, J. Sprekels et D. Tiba, *On the approximation and the optimization of plates*, Preprint 357 WIAS, Berlin (1997), envoyé à Numerische Mathematik.
- [2] M. Bendsoe, *Optimization of structural topology, shape and material*, Springer Verlag, New York (1995).
- [3] M. Bergounioux et D. Tiba, *General optimality conditions for constrained convex control problems*, SIAM J. Control Optimiz., vol. 34, no. 2 (1996), pp. 698 - 711.
- [4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris (1983).
- [5] J. Sprekels et D. Tiba, *A duality approach in the optimization of beams and plates*, Preprint 335, WIAS, Berlin (1997), accepté pour publication en SIAM J. Control Optimiz.
- [6] F. Tröltzsch, *Optimality conditions for parabolic control problems and applications*, Teubner Verlag, Leipzig (1984).