

# Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Preprint

ISSN 0946 – 8633

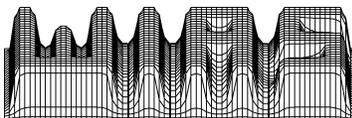
## Randbedingungen für den zweikomponentigen porösen Körper auf dem Rand des Skeletts

Bettina Albers<sup>1</sup>

submitted: 11th January 1999

<sup>1</sup> Weierstraß-Institut  
für Angewandte Analysis  
und Stochastik  
Mohrenstraße 39  
D-10117 Berlin  
E-Mail: [albers@wias-berlin.de](mailto:albers@wias-berlin.de)

Preprint No. 360  
Berlin 1999



Edited by  
Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)  
Mohrenstraße 39  
D — 10117 Berlin  
Germany

Fax: + 49 30 2044975  
E-Mail (X.400): c=de;a=d400-gw;p=WIAS-BERLIN;s=preprint  
E-Mail (Internet): preprint@wias-berlin.de  
World Wide Web: <http://www.wias-berlin.de/>

## 1. Einführung

Der Anstoß, diesen Vortrag zu halten, ist das Lastverteilungsmodell von KARL VON TERZAGHI, das er 1936 veröffentlicht hat. Es geht von der Fragestellung aus, in welcher Weise eine aufgebrachte Last auf die Komponenten eines porösen Mediums verteilt wird. Dazu sollten wir zunächst klarstellen, was ein poröser Körper ist. Böden, Gesteine, Keramik und faserige Stoffe sind Beispiele für poröse Körper. Diese Stoffe haben alle die Gemeinsamkeit, daß es sich um einen „Feststoff mit Löchern“ handelt. Nun würde man einen hohlen Metallzylinder aber kaum als porösen Körper bezeichnen. D.h. man muß die Definition dahingehend erweitern, daß es sich um einen Körper mit mindestens einer festen Phase handelt, der zufällig verteilte Hohlräume aufweist, die miteinander verbunden sind und von denen wenigstens einige von der einen Seite des Mediums bis zur anderen verlaufen.

Wir wollen hier einen zweikomponentigen porösen Körper betrachten, einen Körper bestehend aus einer festen Phase (Skelett) und einer flüssigen Phase (Fluid). Durch die zweite Phase wird neben der Porosität eine zweite Eigenschaft des porösen Körpers erfaßt, die wichtige physikalische Beiträge leistet, nämlich die Diffusion.

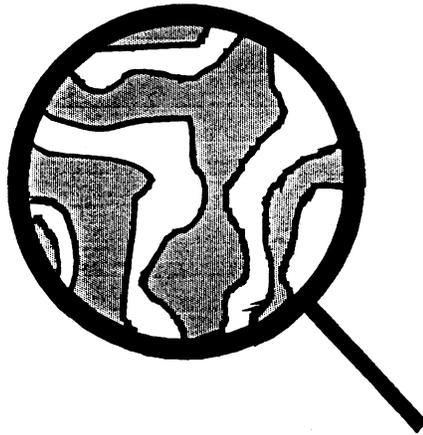


Abb. 1: Zweikomponentiger poröser Körper mikroskopisch betrachtet

Die folgenden verschmierten, d.h. makroskopischen Felder beschreiben Prozesse in einem solchen System, wobei für beide Komponenten die Eulersche Darstellungsweise gewählt wurde:

- $\rho_t^S$  – die augenblickliche Massendichte des Skeletts
- $\rho_t^F$  – die augenblickliche Massendichte der Flüssigkeit
- $\mathbf{v}^S$  – die Geschwindigkeit des Skeletts
- $\mathbf{v}^F$  – die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und
- $n$  – die Porosität.

Wir setzen hier isotherme Bedingungen voraus, d.h. es sollen keine Temperaturänderungen eintreten. Außerdem wird angenommen, daß die Felder die folgenden Bilanzgleichungen erfüllen:

Partielle Massenbilanzen für Skelett (S) und Fluid (F):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_t^S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S) = 0 \\ \frac{\partial \rho_t^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Lokale Impulsbilanzen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_t^S \mathbf{v}^S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \mathbf{T}^S) = \pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^S \mathbf{b}^S \\ \frac{\partial \rho_t^F \mathbf{v}^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F) = -\pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^F \mathbf{b}^F, \end{cases} \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{T}^S$  und  $\mathbf{T}^F$  für die partiellen Cauchy'schen Spannungen stehen. Der Term  $\pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)$  stellt die Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Skelett dar, die durch die relative Bewegung (Diffusion) der Komponenten zueinander hervorgerufen wird.  $\rho_t^S \mathbf{b}^S$  und  $\rho_t^F \mathbf{b}^F$  geben die Schwerkraft der jeweiligen Komponente an. Für zweikomponentige Körper mit einer festen Komponente benötigt man im Gegensatz zur klassischen Mischungstheorie noch die

Bilanzgleichung für die Porosität:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}^S \cdot \operatorname{grad} n + \frac{1}{\rho_t^S} \operatorname{div} [\Phi_0 \rho_t^S (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)] = \hat{n}. \quad (3)$$

Hier bezeichnet der Term  $\frac{\partial n}{\partial t}$  die zeitliche Änderung der Porosität. Der Term  $\mathbf{v}^S \cdot \operatorname{grad} n$  entsteht als konvektiver Anteil der materiellen Ableitung von  $n$ . Der dritte Term stellt die Strömung durch einen bestimmten Bereich des Körpers dar.  $\Phi_0$  ist dabei ein Strömungskoeffizient. Die Differenz  $(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)$  stellt die relative Geschwindigkeit der Komponenten zueinander dar. Die Quelle  $\hat{n}$  wird durch Bewegungen in der Mikroebene verursacht, d.h. sie steht im Zusammenhang mit Relaxationsprozessen in den Poren (Für nähere Erläuterungen zu diesem *Neuen Modell für kompressible poröse Materialien mit der Bilanzgleichung für die Porosität* von K. WILMANSKI siehe z.B. [1]).

Für singuläre Flächen, also an Stellen, an denen die Feldgrößen unstetig sind, wie z.B. an den Rändern der Komponenten, an denen die Funktionen an beiden Seiten endliche Grenzwerte aufweisen, gehen die obigen Bilanzgleichungen in die folgenden dynamischen Kompatibilitätsbedingungen über (Für die Herleitung siehe [2]):

$$\text{Masse} \quad \begin{cases} \llbracket \rho_t^S (c - \mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n}) \rrbracket = 0 \\ \llbracket \rho_t^F (c - \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n}) \rrbracket = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Impuls} \quad \begin{cases} \llbracket \rho_t^S (c - \mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}^S \rrbracket + \llbracket \mathbf{T}^S \rrbracket \mathbf{n} = 0 \\ \llbracket \rho_t^F (c - \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}^F \rrbracket + \llbracket \mathbf{T}^F \rrbracket \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Porosität} \quad \left[ \left[ \Phi_0 \frac{\rho_t^S}{\rho_t^F} \right] \right] = 0, \quad (6)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor der singulären Fläche bezeichnet.  $c$  ist die Geschwindigkeit eines Punktes der singulären Fläche. Die doppelten Klammern stellen Sprünge der Größen dar:

$$[[\dots]] = (\dots)^+ - (\dots)^-.$$

Die „+“ und „-“ Zeichen beziehen sich auf die Grenzen der jeweiligen Funktionen von der positiven bzw. negativen Seite der Oberfläche aus gerechnet (siehe Abb. 2).

Die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen beschreiben Sprünge im Gebiet des Skeletts. Um sie also auf der Grenze des Skeletts beschreiben zu können, müssen wir alle Größen ausdehnen, damit sie auf der positiven (externen) Seite der Grenze definiert sind. Dort sind sie keine Grenzwerte wie auf der negativen Seite der Grenze, weil sich außerhalb des Körpers keine Feststoffpartikel befinden.

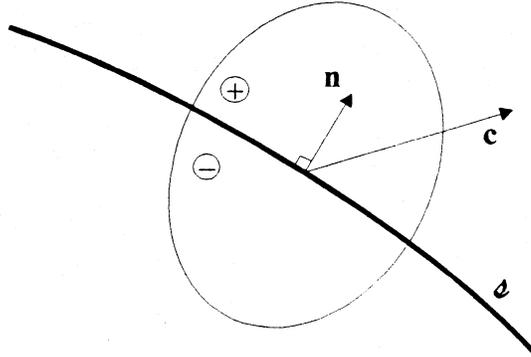


Abb. 2: Singuläre Fläche

Für die Geltung der Gleichungen wird vorausgesetzt, daß es sich um eine ideale singuläre Fläche handelt, d.h. es gibt weder Massenansammlungen noch Impulsproduktion auf der Fläche.

Zur Vereinfachung wollen wir jetzt annehmen, daß die Oberfläche des Kontinuums mit der des Skeletts übereinstimmt, d.h. die singuläre Fläche bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit wie das Skelett

$$c \equiv \mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n}. \quad (7)$$

Setzt man diese Beziehung für die materielle Fläche in die obigen Kompatibilitätsbedingungen ein, so ist die Massenbilanz für das Skelett identisch erfüllt und aus der Impulsbilanz für das Skelett ergibt sich die klassische Poisson-Bedingung für den partiellen Spannungstensor

$$[[\mathbf{T}^S]] \mathbf{n} = 0. \quad (8)$$

## 2. Randbedingungen für den zweikomponentigen porösen Körper

Partielle Differentialgleichungen beschreiben eine Klasse von Phänomenen. Allgemein haben sie unendlich viele Lösungen, von denen jede einem speziellen Fall dieses Phänomens

entspricht. Um aus dieser Vielzahl von Lösungen diejenige zu bestimmen, die einem bestimmten Problem entspricht, sind zusätzliche Informationen nötig. Eine Aufgabe wird vollständig spezifiziert durch Angabe

- der Geometrie des Raumes,
- aller physikalischen Koeffizienten und Parameter,
- der Anfangsbedingungen, die den Ausgangszustand des Systems beschreiben und
- der Interaktion des Systems mit der Außenwelt (Randbedingungen und Volumenbeiträge wie z.B. Schwerkkräfte).

Wir wollen uns jetzt hier den Randbedingungen zuwenden, den physikalischen Bedingungen an den Grenzen des betrachteten Gebiets (Für detailliertere Informationen zu diesem Thema siehe [6]).

Es gibt zwei Arten von Randbedingungen, nämlich

- dynamische Randbedingungen      und
- kinematische Randbedingungen.

Mit den dynamischen Randbedingungen wird eine Aussage über die Verteilung der äußeren Last auf den Körper gemacht. Dies soll im folgenden durch das Lastverteilungsmodell nach VON TERZAGHI motiviert werden. Die kinematischen Randbedingungen geben für den Fall des porösen Körpers Auskunft über Geschwindigkeiten an der Grenze und über die Massenausfuhr. Wir wollen in Kap. 4 die Analogie dieser Randbedingungen zu denen in der Wärmeleitung aufzeigen.

Betrachten wir wieder den zweikomponentigen Körper. Zur Lösung der obigen dynamischen Kompatibilitätsbedingungen und Bilanzgleichungen, die durch die Anwendung von Stoffgesetzen materialabhängig werden und dadurch in Feldgleichungen übergehen, benötigen wir an der Grenze zwei Vektorbedingungen für die Impulssätze und eigentlich eine skalare Bedingung für die Porosität. Für unseren Fall wollen wir allerdings voraussetzen, daß der Koeffizient des Porositätsflusses  $\Phi_0$  mit  $n$  identisch ist (Für Einzelheiten zu dieser Annahme siehe [1]). Dadurch geht die Porositätsgleichung in eine Form über, für die wir keine Randbedingungen mehr benötigen. Auch für die Massenbilanzgleichungen sind keine Randbedingungen nötig, weil sie keinen Strömungsterm enthalten. Es verbleibt also die Suche nach zwei vektoriellen Randbedingungen für die Geschwindigkeiten und einer skalaren Gleichung für die freie Fläche. Um diese bestimmen zu können, ist die wichtige Frage zu klären, in welcher Weise die äußere Last  $t^{\text{ext}}$  (wie „external“) auf das Skelett und das Fluid verteilt wird.

### **3. Dynamische Bedingungen**

#### **– Durch welche Komponente wird die Last übernommen?**

Die Aufteilung der äußeren Last auf die beiden Komponenten kann nicht a priori vorgenommen werden. Sie muß davon abhängig sein, in welcher Weise die Last aufgebracht wird.

Man kann sich z.B. vorstellen, daß die Last vollständig auf das Skelett aufgebracht wird, wenn wir annehmen, daß der poröse Körper mit einem starren Gitter überspannt wird, auf das die Last übertragen wird, das aber für die Flüssigkeit nahezu vollständig durchlässig ist.

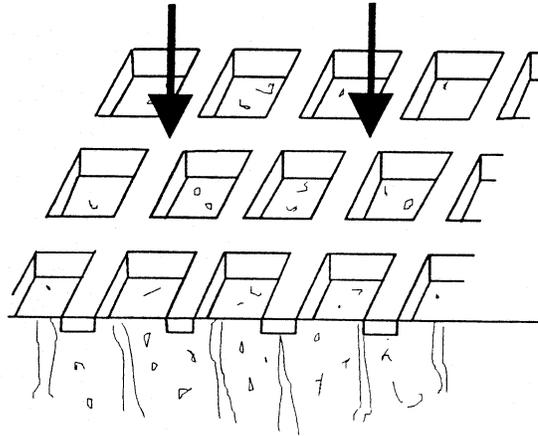


Abb. 3: Lastaufbringung auf das Skelett

Die Aufbringung der Last einzig auf die Flüssigkeit ist eigentlich nur völlig künstlich vorstellbar.

Die wahrscheinlichste Möglichkeit ist eine Verteilung auf beide Komponenten entsprechend der Mikrostruktur der Grenzfläche.

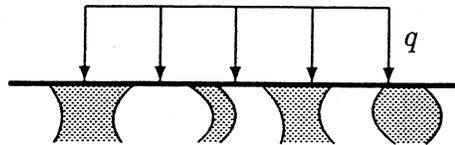


Abb. 4: Lastaufbringung auf beide Komponenten

### – Lastverteilungsmodell nach VON TERZAGHI

Dieser Fall soll uns nun beschäftigen. Wir stellen uns die Frage, welche der Komponenten dabei die Last übernimmt. Dies entspricht genau dem Problem, das VON TERZAGHI (1883 – 1963, von 1929 bis 1938 Professor an der Technischen Hochschule in Wien, Gastprofessuren, Beratungstätigkeiten bei Gründungsproblemen) klären wollte:

Die Erfahrung hatte ihm gezeigt, daß die Setzung von Bauwerken, deren Untergrund Tonschichten enthält, auch nach Fertigstellung des Bauwerkes – wenn der Boden nahezu konstant belastet wird, mit zeitlich abnehmender Geschwindigkeit zunimmt und erst nach vielen Jahren oder Jahrzehnten zum Stillstand kommt. Die Ursache für dieses Phänomen, nämlich die allmähliche Abnahme des Wassergehaltes der belasteten Tonschichten, die durch die Steigerung des Druckes auf den Ton bewirkt wird, war schon seit Ende des 19. Jhdts. unter dem Namen „Konsolidation“ bekannt.

Zunächst hatten VON TERZAGHI und FRÖHLICH 1923 gemeinsam eine Differentialgleichung zur Beschreibung dieses Phänomens aufgestellt. Vor allem diese Gleichung hatte zu heftigen Kontroversen zwischen VON TERZAGHI und seinem Professoren-Kollegen in Wien FILLUNGER geführt, die im Selbstmord des Herrn FILLUNGER endeten. 1936 belegten VON TERZAGHI und FRÖHLICH das Konsolidationsproblem anhand eines grobmechanischen Modells. Das Gedankenexperiment hatte folgenden Aufbau (entnommen aus [3]):

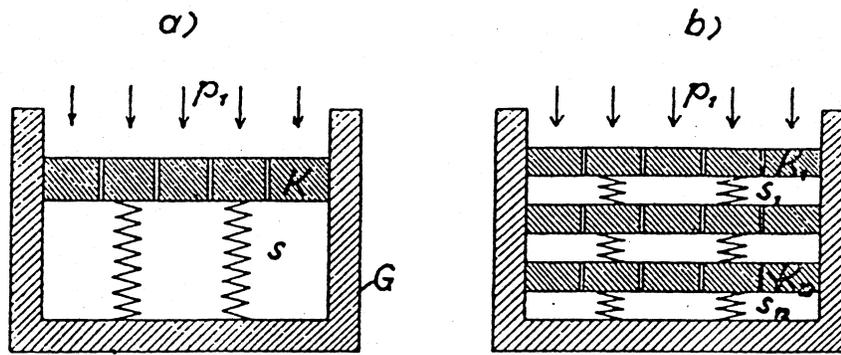


Abb. 5: Grobmechanisches Modell zur Erläuterung der Zeit auf die Verdichtungsgeschwindigkeit in Tonschichten:  
a) Einkolbenmodell                      b) Mehrkolbenmodell

Abb. 5a) zeigt ein zylindrisches Gefäß  $G$ , in das ein Kolben  $K$  mit feinen Bohrungen eingeschliffen ist, der auf Spiralfedern  $S$  ruht, wobei die Federn das Bodenskelett modellieren und der Raum unterhalb des Kolbens die Bodenporen darstellt. Wenn dieser Raum leer ist, so erzeugt eine Belastung des Kolbens mit der Flächenlast  $p_1$  eine rasch auftretende Zusammendrückung der Federn. Die gesamte Auflast wird also vom Boden aufgenommen. Wird der Raum unterhalb des Kolbens jedoch mit Wasser gefüllt, so findet die gleiche Senkung des Kolbens infolge des großen Widerstandes gegen das Entweichen des Wassers durch die Bohrungen nur langsam mit zeitlich abnehmender Geschwindigkeit statt. Die Auflast wird in diesem Fall also zunächst vom Wasser übernommen und geht erst langsam auf den Boden über. Die Apparatur b) unterscheidet sich von der ersten dadurch, daß sie mehrere solcher Kolben enthält, die durch Federn auf Abstand gehalten werden. Dies spiegelt die Vorgänge in der Natur eher wider, weil das Wasser aus den oberen Zwischenräumen viel rascher entweichen kann als aus den unteren. Ist also die Verfestigung des Tones von der durchlässigen Oberfläche zum Innern hin fortgeschritten und ist das Wasser soweit entwichen, daß ein Gleichgewicht zwischen den Kräften im Skelett und der äußeren Belastung eingetreten ist, so ist auch der im Wasser herrschende Überdruck zu Null geworden und die Verfestigung des Tones ist beendet. Natürlich ist der Vorgang in der Natur nicht allein von der Durchlässigkeit und der Zusammendrückbarkeit der Festsubstanz abhängig, sondern auch von anderen physikalisch-chemischen Faktoren, diese wurden hier jedoch vernachlässigt.

### – Zeitentwicklung der Lastverteilung

Die Ergebnisse aus dem Federtopfmodell nach VON TERZAGHI lassen sich qualitativ in einem einfachen Diagramm wiedergeben (siehe Abb. 6).

Die gesamte Auflast wird zunächst von der Flüssigkeit getragen und geht langsam mit abnehmender Geschwindigkeit auf das Skelett über. Am Ende trägt das Skelett die gesamte Auflast. Zu jedem Zeitpunkt des Prozesses der Lastverteilung gilt

$$p^F + p^S = p . \quad (9)$$

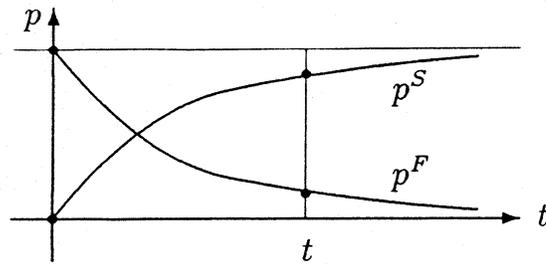


Abb. 6: Zeitentwicklung der Lastverteilung

Ergebnisse, die bestens mit denen dieses klassischen Modells übereinstimmen, erhielt W. KEMPA in [4]. Er entwickelte – basierend auf dem *Modell für kompressible poröse Materialien mit der Bilanzgleichung für die Porosität* von K. WILMANSKI (siehe z.B. [1], [5]) – das numerische Simulationsprogramm LFEP, mit dem er das Konsolidationsproblem untersuchte. Dazu benutzt er die Finite-Elemente-Methode und simuliert den Boden als eindimensionalen Raum. Dieser ist in Finite Elemente unterteilt, die an ihren Grenzen durch Knoten verbunden sind.

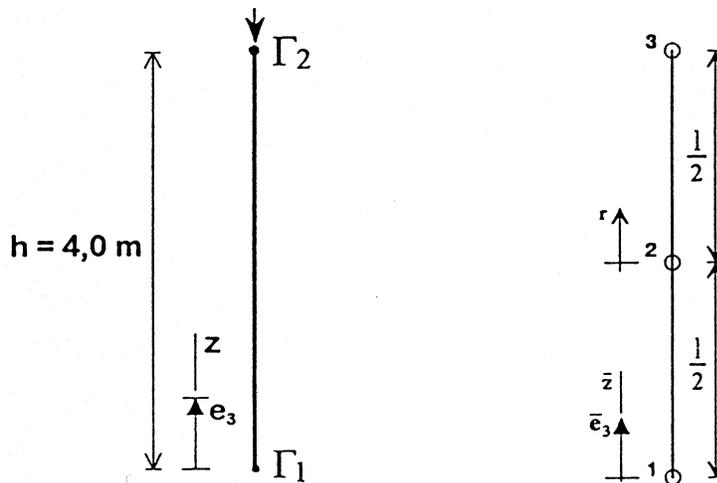


Abb. 7: Simulation des Bodens als eindimensionales Finite-Elemente-Modell (aus [4])

Durch die Wahl der Ansatzfunktionen wird das Modell mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens auf die Elemente übertragen. Unter anderem liefert das Programm Ergebnisse für die Zeitentwicklung der Lastverteilung zwischen Skelett und Fluid für verschiedene Durchlässigkeitsbeiwerte des Bodens:

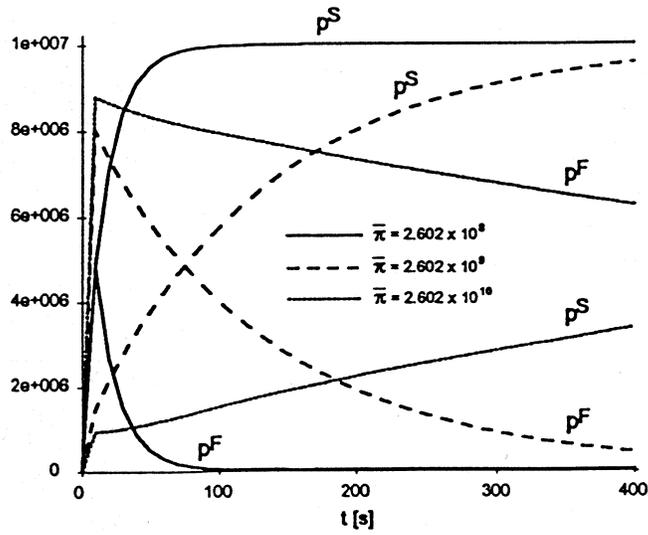


Abb. 8: Ergebnisse für die Lastverteilung (aus [4])

Der Druck in der Flüssigkeit steigt sofort nach Belastung an und erreicht nach kurzer Zeit sein Maximum. Danach fällt der Druck in der Flüssigkeit im gleichen Maße ab, wie er im Skelett ansteigt. Im Gegensatz zum Modell nach VON TERZAGHI, für das das Diagramm für das Skelett zur Zeit  $t = 0$  bei Null beginnt (s. Abb. 6), wird hier sofort ein kleiner Anteil der Belastung vom Skelett getragen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß VON TERZAGHI in seinem Modell die Beschleunigungsterme und die Trägheitskräfte vernachlässigt hat.

### Wie groß ist der Einfluß der Kinematik?

Modelle für mehrkomponentige Körper sind eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit als klassische Modelle für einkomponentige Körper. Die Modelle beschreiben aber mit unterschiedlicher Genauigkeit dieselben Vorgänge. Dies bedeutet, daß sowohl für die Masse als auch für den Impuls die Summe der beiden Bilanzgleichungen für Skelett und Fluid der klassischen Bilanzgleichung entsprechen muß.

Masse:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_t^S}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S) &= 0 \\ &+ \\ \frac{\partial \rho_t^F}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \text{div}(\rho_t \mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

Impuls:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_t^S \mathbf{v}^S}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \mathbf{T}^S) &= \pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^S \mathbf{b}^S \\ &+ \\ \frac{\partial \rho_t^F \mathbf{v}^F}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F) &= -\pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^F \mathbf{b}^F \end{aligned} \right\} \implies \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_t \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho_t \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) = \rho_t \mathbf{b},$$

Durch den Vergleich der einzelnen Terme ergibt sich:

$$\rho_t := \rho_t^S + \rho_t^F, \quad (12)$$

$$\rho_t \mathbf{v} := \rho_t^S \mathbf{v}^S + \rho_t^F \mathbf{v}^F, \quad (13)$$

$$\rho_t \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T} = \rho_t^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \mathbf{T}^S + \rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F, \quad (14)$$

und

$$\rho_t \mathbf{b} = \rho_t^S \mathbf{b}^S + \rho_t^F \mathbf{b}^F. \quad (15)$$

Daraus folgt für den Spannungstensor:

$$\mathbf{T} = \underbrace{\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^F}_{\text{statischer Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_t^S + \rho_t^F} (\rho_t^S \mathbf{v}^S + \rho_t^F \mathbf{v}^F) \otimes (\rho_t^S \mathbf{v}^S + \rho_t^F \mathbf{v}^F) - \rho_t^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F}_{\text{kinematischer Anteil}} \quad (16)$$

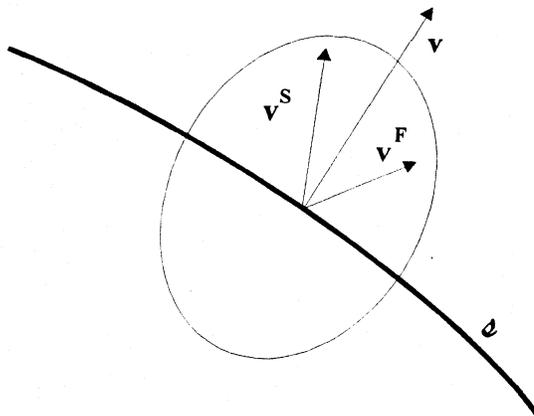


Abb. 9: Geschwindigkeit einer einkomponentig verschmierten materiellen Fläche

Eine einkomponentig verschmierte materielle Fläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch den Körper. Die einzelnen Teilchen haben aber die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^S$  bzw.  $\mathbf{v}^F$  und nicht  $\mathbf{v}$ . Das bewirkt, daß sie durch die relative Bewegung eine gewisse Menge Impuls transportieren. Dadurch entsteht der kinematische Anteil im Spannungstensor.

### – Herleitung der dynamischen Randbedingung

Wir definieren die Ausfuhren der flüssigen sowie der festen Komponente als

$$m^F := \rho^{F\pm} (c - \mathbf{v}^{F\pm} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{und} \quad m^S := \rho^{S\pm} (c - \mathbf{v}^{S\pm} \cdot \mathbf{n}). \quad (17)$$

Unter Berücksichtigung von (7) ergibt sich für den Rand

$$m^S = 0 . \quad (18)$$

Addition der dynamischen Kompatibilitätsbedingungen für den Impuls liefert damit

$$-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \rrbracket = \llbracket \mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S \rrbracket \mathbf{n} . \quad (19)$$

Dies bedeutet

$$-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \rrbracket = (\mathbf{T}^{F+} + \mathbf{T}^{S+})\mathbf{n} - (\mathbf{T}^{F-} + \mathbf{T}^{S-})\mathbf{n} . \quad (20)$$

Mit

$$\mathbf{t}^{\text{ext}} = (\mathbf{T}^{F+} + \mathbf{T}^{S+})\mathbf{n} , \quad (21)$$

erhalten wir

$$-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \rrbracket = \mathbf{t}^{\text{ext}} - (\mathbf{T}^{F-} + \mathbf{T}^{S-})\mathbf{n} . \quad (22)$$

Unter Berücksichtigung der sphärischen Struktur des Tensors  $\mathbf{T}^F$

$$\mathbf{T}^F = -p^F \mathbf{1} , \quad (23)$$

ergibt sich

$$\boxed{-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \rrbracket = \mathbf{t}^{\text{ext}} + p^{F-}\mathbf{n} - \mathbf{T}^{S-}\mathbf{n} .} \quad (24)$$

Im folgenden wollen wir diese dynamische Randbedingung in den senkrechten und den tangentialen Anteil von  $\mathbf{t}^{\text{ext}}$  aufspalten. Dazu multiplizieren wir die Gleichung zunächst mit  $\mathbf{n}$

$$-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} + p^{F-} - \mathbf{T}^{S-} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) . \quad (25)$$

Mit

$$-m^F \llbracket \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} \rrbracket = -\llbracket p^F \rrbracket , \quad (26)$$

und

$$\llbracket \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} \rrbracket = m^F \llbracket \frac{1}{\rho^F} \rrbracket , \quad (27)$$

also

$$-\llbracket p^F \rrbracket = -m^{F2} \llbracket \frac{1}{\rho^F} \rrbracket , \quad (28)$$

erhalten wir<sup>1</sup>

$$\underbrace{-m^{F2} \llbracket \frac{1}{\rho^F} \rrbracket}_{\text{klein}} = \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} + p^{F-} - \mathbf{T}^{S-} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) . \quad (29)$$

Damit gilt für den *senkrechten Anteil* von  $\mathbf{t}^{\text{ext}}$

$$\boxed{\mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{S-} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - p^{F-} .} \quad (30)$$

---

<sup>1</sup>wegen Abschätzung von  $m^F$  siehe [7]

Um den tangentialen Anteil zu bestimmen, definieren wir

$$\mathbf{t}_{\perp}^{\text{ext}} := \mathbf{t}^{\text{ext}} - (\mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} . \quad (31)$$

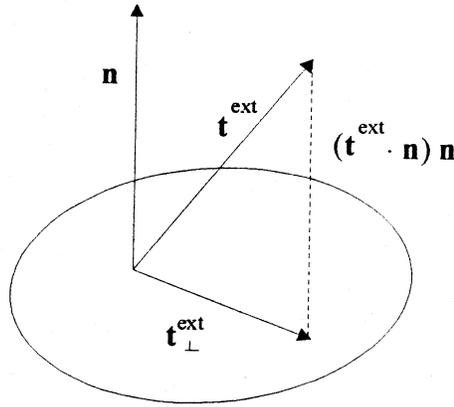


Abb. 10: Aufspaltung der äußeren Last

Aus (24) ergibt sich

$$-m^F \underbrace{\llbracket \mathbf{v}_{\perp}^F \rrbracket}_{\equiv 0} = \mathbf{t}_{\perp}^{\text{ext}} - (\mathbf{T}^{S-} \mathbf{n})_{\perp} , \quad (32)$$

also gilt für den *tangentialen Anteil* von  $\mathbf{t}^{\text{ext}}$

$$\boxed{\mathbf{t}_{\perp}^{\text{ext}} = (\mathbf{T}^{S-} \mathbf{n})_{\perp} .} \quad (33)$$

#### 4. Kinematische Bedingungen

Die kinematischen Randbedingungen machen für den Fall des porösen Körpers eine Aussage über die Geschwindigkeiten der Komponenten. Auch hier ist es wieder sinnvoll, die normalen und tangentialen Anteile zu betrachten.

Für die Geschwindigkeiten tangential zum Rand wird angenommen

$$\boxed{\mathbf{v}_{\perp}^S = \mathbf{v}_{\perp}^F = 0 .} \quad (34)$$

Um die normale Komponente angeben zu können, wollen wir zwei Fälle unterscheiden:

1.) Der Rand ist völlig durchlässig für die Flüssigkeit.

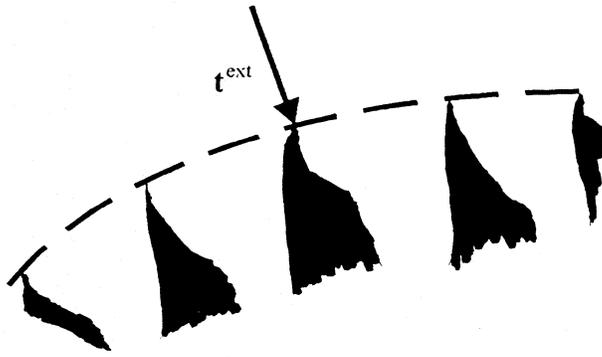


Abb. 11: Durchlässiger Rand

Wir hatten schon vorher angenommen, daß sich der Rand mit derselben Geschwindigkeit wie das Skelett bewegt. Für die normale Komponente gilt also

$$\boxed{\mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n} = c .} \quad (35)$$

Allerdings können wir nicht sagen, mit welcher Geschwindigkeit die Flüssigkeit aus dem Körper ausfließt

$$\mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} = ? . \quad (36)$$

Da wir die Fluidgeschwindigkeit am Rande nicht kennen, müssen wir für eine andere Größe eine Randbedingung formulieren. Es ist naheliegend, diese Randbedingung für den Massentransport der flüssigen Komponente am freien Rand aufzustellen. Einen derartigen Ansatz gab RUNESSON in [8] für ein Konsolidationsproblem an:

$$m^F = \psi(p, t) = \gamma(p - p_S) + \bar{Q}(t) , \quad (37)$$

wobei mit  $\psi$  der Massentransport der flüssigen Komponente am freien Rand bezeichnet wird.  $\gamma$  ist der Materialparameter der Trennfläche,  $p$  der Porenwasserdruck und  $p_S$  ein Referenzdruck. Die Größe  $\bar{Q}(t)$  steht für den sogenannten Drainagefluß. Weder dessen physikalische Bedeutung noch der Unterschied zum ersten Glied der rechten Seite wurde allerdings in der Arbeit geklärt. In Anlehnung an [1] und [7] wollen wir diese Randbedingung hier in der Form

$$\boxed{m^F = \alpha(p^{F^-} - n^- p_A) ,} \quad (38)$$

angeben. Der Druck auf der Innenseite des Randes wird mit  $p^{F^-}$ , der atmosphärische Druck mit  $p_A$  bezeichnet. Die Flächenkonstante  $\alpha$  soll wiederum die Materialstruktur der Trennfläche beschreiben,  $n^-$  ist die Porosität auf der Innenseite.

Eine andere Möglichkeit bietet der Fall

2.) Der Rand ist undurchlässig.

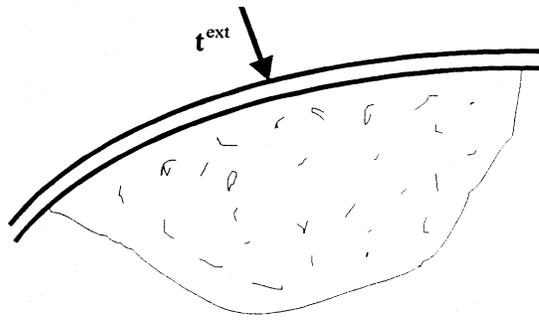


Abb. 12: Undurchlässiger Rand

Wenn der Rand des Körpers undurchlässig für die Flüssigkeit ist, können wir eine Aussage über die relative Geschwindigkeit der Komponenten zueinander an diesem Rand machen. Da die Flüssigkeit nicht ausfließen kann, ist also die Ausfuhr  $(17)_1$  gleich Null

$$m^F = \rho^{F-} (\mathbf{v}^{F-} - \mathbf{v}^{S-}) \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (39)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{v}^{F-} - \mathbf{v}^{S-} = 0 , \quad (40)$$

wobei das „-“ Zeichen für die innere Seite des Körpers steht. D.h., die Flüssigkeit wird sich genauso schnell bewegen wie das Skelett und die Geschwindigkeitsdifferenz wird sich zu Null ergeben.

Für die normale Komponente erhält man also

$$\boxed{\mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} = c} . \quad (41)$$

Damit ist die normale Geschwindigkeit beider Komponenten gleich der Geschwindigkeit des Randes.

Auch in diesem Fall findet Glg. (38) Anwendung. Für den undurchlässigen Rand ist nämlich die Materialkonstante  $\alpha = 0$  und wiederum ergibt sich für die Ausfuhr

$$m^F = 0 . \quad (42)$$

Die obigen Randbedingungen für den zweikomponentigen porösen Körper sollen durch die Analogie zu bekannten Randbedingungen motiviert werden. Die bekanntesten Randbedingungen dieser Art sind wohl die Randbedingungen für Trennscheiben in der Theorie der Wärmeleitung. Deshalb wollen wir nun die wichtigsten Klassen von Randbedingungen für die Wärmeleitung vorstellen.

### – Analogie zur Wärmeleitung

Wir gehen von der Energiebilanzgleichung aus:

$$\frac{\partial \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) \right]}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} - \mathbf{T} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] = \rho r + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} , \quad (43)$$

wobei  $\varepsilon$  die spezifische partielle innere Energie,  $\mathbf{q}$  den Wärmefluß und  $r$  die Strahlung darstellen.

Mit der Annahme, daß wir einen starren Körper betrachten, also

$$\mathbf{v} = 0, \quad \rho = \text{konst.}, \quad (44)$$

ergibt sich daraus

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} = \rho r. \quad (45)$$

Wir setzen voraus, daß die Energie eine Funktion der Temperatur ist

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta), \quad (46)$$

sowie, daß das FOURIERSche Gesetz Gültigkeit besitzt

$$\mathbf{q} = -\kappa(\theta) \text{grad } \theta, \quad \kappa > 0. \quad (47)$$

$\kappa$  steht hier für die Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Materials. Unter Berücksichtigung der Kettenregel ergibt sich damit aus (45)

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \underbrace{|\text{grad } \theta|^2}_{\approx 0} - \kappa \text{div grad } \theta = \rho r, \quad (48)$$

Der Term  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}$  wird auch spezifische Wärme  $c_v$  genannt. Wir setzen voraus, daß der Temperaturgradient klein ist, deshalb können wir das Quadrat des Temperaturgradienten zu Null setzen. Die rechte Seite der Gleichung bezeichnet die Dichte der Wärmequelle.

Mit der Definition des Laplace-Operators

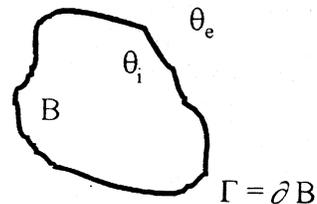
$$\Delta \theta := \text{div grad } \theta, \quad (49)$$

ergibt sich die parabolische Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c_v} \Delta \theta = \frac{r}{c_v}}, \quad c_v := \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} > 0, \quad (50)$$

die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

Zur Lösung dieser Differentialgleichung muß man ebenfalls Randbedingungen angeben. Dazu wird der nebenstehende Körper betrachtet.



Wir stellen die drei wichtigsten Klassen von Randbedingungen vor:

- 1) Für eine gegebene Temperatur  $\theta_e$  (Steuerung) außerhalb des Körpers (s.g. Wärmereservoir) kann man setzen

$$\boxed{\theta|_{\Gamma} = \theta_e(\mathbf{x})} . \quad (51)$$

(DIRICHLETSche Randbedingung).

Die Stetigkeit der Temperatur folgt in der klassischen Thermodynamik aus der Stetigkeit des Wärme- und des Entropieflusses auf der singulären Fläche.

- 2) Aus der Sprungbedingung

$$\llbracket \mathbf{q}^S \rrbracket \mathbf{n} = 0 , \quad (52)$$

folgt die VON NEUMANNsche Randbedingung

$$\boxed{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = Q_e(\mathbf{x})} . \quad (53)$$

Hier ist die Außenströmung die gegebene Steuerung. Sie gibt die Wärmemenge an, die pro Flächen- und Zeiteinheit aus der Außenwelt zugeführt wird.

Mit dem FOURIERSchen Gesetz (47) können wir diese RB auch in der folgenden Form schreiben

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial n}|_{\Gamma} = -\frac{Q_e(\mathbf{x})}{\kappa}} , \quad \frac{\partial \theta}{\partial n}|_{\Gamma} := \mathbf{n} \cdot \text{grad } \theta|_{\Gamma} . \quad (54)$$

- 3) Als Beispiel betrachten wir eine Glasscheibe der Dicke  $h$ ,

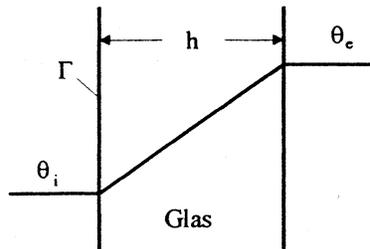


Abb. 13: Glasscheibe

die den Körper mit der Randtemperatur  $\theta_i$  und das Wärmereservoir mit der Temperatur  $\theta_e$  voneinander trennt.

Wenn die Scheibe dünn ist, so können wir setzen

$$(\text{grad } \theta)_{\text{Glas}} \approx \frac{\theta_e - \theta_i}{h} . \quad (55)$$

Setzen wir diese Beziehung für den Wärmestrom in die VON NEUMANNsche Randbedingung (53) ein, so erhalten wir

$$-\kappa \mathbf{n} \cdot \text{grad } \theta|_{\Gamma} = -\kappa_{\text{Glas}} \frac{\theta_e - \theta_i}{h}. \quad (56)$$

Die Geltung des FOURIERSchen Gesetzes wurde hier auch für die Scheibe vorausgesetzt.

Mit

$$\theta_i = \theta|_{\Gamma} \quad (57)$$

ergibt sich daraus

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{\kappa_{\text{Glas}}}{\kappa h} \theta \Big|_{\Gamma} = \frac{\kappa_{\text{Glas}}}{\kappa h} \theta_e \quad (58)$$

Definieren wir

$$\alpha := \frac{\kappa_{\text{Glas}}}{\kappa h}, \quad (59)$$

so entsteht aus (58) die ROBBINSche Randbedingung

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha \theta \Big|_{\Gamma} = \alpha \theta_e.} \quad (60)$$

Die Grössen dieser Gleichung lassen sich folgendermaßen interpretieren:

Der Wärmetransport durch die Fläche  $\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma}$  ist durch die Temperaturunstetigkeit  $\theta_e - \theta|_{\Gamma}$  und eine Stoffgröße  $\alpha$  definiert, denn formen wir (56) um, so ergibt sich

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \alpha (\theta_e - \theta|_{\Gamma}). \quad (61)$$

Der Parameter  $\alpha$  beschreibt die thermischen Eigenschaften der Fläche. Er ist also kein üblicher volumetrischer Materialparameter wie z.B. die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  oder die spezifische Wärme  $c_v$ .

Bei dieser Art von Randbedingungen liegt die Analogie zwischen den beiden Problemstellungen Wärmeleitung und zweikomponentiger poröser Körper auf der Hand:

| Wärmeleitung   | zweikomp. por. Körper           |
|--|---------------------------------|
| <u>Robbin:</u><br>$\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big _{\Gamma} = \alpha (\theta_e - \theta _{\Gamma})$ | $m^F = \alpha (p^{F-} - n p_A)$ |

Der Parameter  $\alpha$  hat bei der Randbedingung für den zweikomponentigen porösen Körper den gleichen Typ wie oben für die Wärmeleitung beschrieben. Auch hier handelt es sich um eine Flächenkonstante, die die Eigenschaften der Trennfläche beschreibt. Beide Größen sind vorhanden, weil am Rande des Körpers eine Grenzschicht existiert. Im Falle der Wärmeleitung ist die Isolierungswand dieser Grenzschicht gleichzusetzen, für

den porösen Körper ist die Grenzschicht der Übergang vom mehr- zum einkomponentigen Körper.

## 5. Beispiel: Quasi-statische Strömung mit axialer Symmetrie

### 5.1 Problemstellung

Zur Verdeutlichung wollen wir nun das Beispiel eines radial durchflossenen Zylinders aus porösem Material betrachten.

Wir benutzen die Felder

$$\{\rho_t^F, \mathbf{v}^F, \mathbf{u}^S, \Delta\}. \quad (62)$$

Hierbei ist  $\mathbf{u}^S$  die Verschiebung des Skeletts, die neue Variable  $\Delta \equiv n - n_E$  ersetzt die Porosität  $n$ ,  $n_E = \text{konst.}$

Die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls lauten wie oben angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_t^S}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_t^F}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{Masse} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_t^S \mathbf{v}^S}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \mathbf{T}^S) &= \pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^S \mathbf{b}^S \\ \frac{\partial \rho_t^F \mathbf{v}^F}{\partial t} + \text{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F) &= -\pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho_t^F \mathbf{b}^F, \end{aligned} \right\} \text{Impuls} \quad (64)$$

Die Bilanzgleichung für die Porosität wird aus thermodynamischen Gründen (siehe [9], Kap.3) in der folgenden Form angegeben

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \mathbf{v}^S \cdot \text{grad} \Delta + \varphi \text{div}(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) = -\frac{\Delta}{\tau}. \quad (65)$$

Die Relaxationszeit wurde hier mit  $\tau$  bezeichnet und  $\varphi = \Phi_0 J^{S-1}$ , wobei  $J^S$  für die Jacobi-Determinante des Deformationsgradienten für das Skelett steht

(d.h.  $J^S = \frac{\rho_t^S}{\rho_t^E} \approx 1 + \mathbf{e}^S \cdot \mathbf{1}$ ).

Wir haben vorausgesetzt, daß keine Massenquellen existieren. Außerdem wollen wir eine explizite Zeitabhängigkeit ausschließen. Dadurch werden sämtliche Zeitableitungen zu Null. Weiterhin wollen wir annehmen, daß sich das Skelett nicht mehr bewegt, d.h.  $\mathbf{v}^S \equiv 0$ .

Mit diesen Annahmen ist die Massenbilanz für das Skelett identisch erfüllt. Für die übrigen Bilanzgleichungen folgt:

$$\text{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F) = 0 \quad (66)$$

$$\text{div} \mathbf{T}^S + \pi \mathbf{v}^F + \rho_t^S \mathbf{b}^S = 0 \quad (67)$$

$$\underbrace{\operatorname{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F)}_{\approx 0} = \operatorname{div} \mathbf{T}^F - \pi \mathbf{v}^F + \rho_t^F \mathbf{b}^F \quad \Longrightarrow$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^F - \pi \mathbf{v}^F + \rho_t^F \mathbf{b}^F = 0 \quad (68)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^F = -\frac{\Delta}{\tau \varphi} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = -\tau \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}^F \quad (69)$$

Wir stellen die Stoffgesetze für dieses Beispiel auf:

Unter Voraussetzung von Linearität kann man für den partiellen Spannungstensor das HOOKEsche Gesetz verwenden und findet eine Beziehung zum Verzerrungstensor  $\mathbf{e}^S$ .

$$\mathbf{T}^S = \lambda^S (\mathbf{e}^S \cdot \mathbf{1}) \mathbf{1} + 2\mu^S \mathbf{e}^S + \beta \Delta \mathbf{1} , \quad (70)$$

$$\mathbf{e}^S := \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u}^S + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}^S) , \quad (71)$$

$\lambda^S$  und  $\mu^S$  sind hier Lamé-Konstanten,  $\beta$  ist eine Materialkonstante.

Für den CAUCHYschen Spannungstensor für das Fluid gilt:

$$\mathbf{T}^F = -\varphi^F (\rho_t^F) \mathbf{1} - \beta \Delta \mathbf{1} . \quad (72)$$

Hier ist  $\varphi^F$  der intrinsische Druck in der Flüssigkeit.

Wir können mit Gl. (69)<sub>2</sub> den Porositätsterm aus diesen Stoffgesetzen eliminieren:

$$\mathbf{T}^S = \lambda^S (\mathbf{e}^S \cdot \mathbf{1}) \mathbf{1} + 2\mu^S \mathbf{e}^S - \beta (\tau \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}^F) \mathbf{1} , \quad (73)$$

$$\mathbf{T}^F = -\varphi^F (\rho_t^F) \mathbf{1} + \beta (\tau \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}^F) \mathbf{1} . \quad (74)$$

Damit gehen die Bilanzgleichungen in die folgenden Feldgleichungen über:

$$\operatorname{div}(\rho_t^F \mathbf{v}^F) = 0 \quad (75)$$

$$(\lambda^S + \mu^S) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^S + \mu^S \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}^S - \beta \tau \varphi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^F + \pi \mathbf{v}^F + \rho_t^S \mathbf{b}^S = 0 \quad \dagger \quad (76)$$

†

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}^S &= \lambda^S \operatorname{grad} (\mathbf{e}^S \cdot \mathbf{1}) + 2\mu^S \operatorname{div} \mathbf{e}^S - \beta \tau \varphi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^F \\ &= \lambda^S \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}^S + \operatorname{div} \mathbf{u}^S) \right\} + 2\mu^S \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u}^S + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}^S) \right\} - \\ &\quad - \beta \tau \varphi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^F \\ &= \lambda^S \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^S + 2\mu^S \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}^S + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^S) \right\} - \\ &\quad - \beta \tau \varphi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^F \\ &= (\lambda^S + \mu^S) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu^S \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}^S - \beta \tau \varphi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^F \end{aligned}$$

$$-\frac{d\varphi^F}{d\rho_t^F} \text{grad } \rho_t^F + \beta \tau \varphi \text{grad div } \mathbf{v}^F - \pi \mathbf{v}^F + \rho_t^F \mathbf{b}^F = 0 \quad \ddagger \quad (77)$$

Die Betrachtung eines Zylinders geschieht am günstigsten in krummlinigen Koordinaten, deshalb nehmen wir hier eine Koordinatentransformation vor:

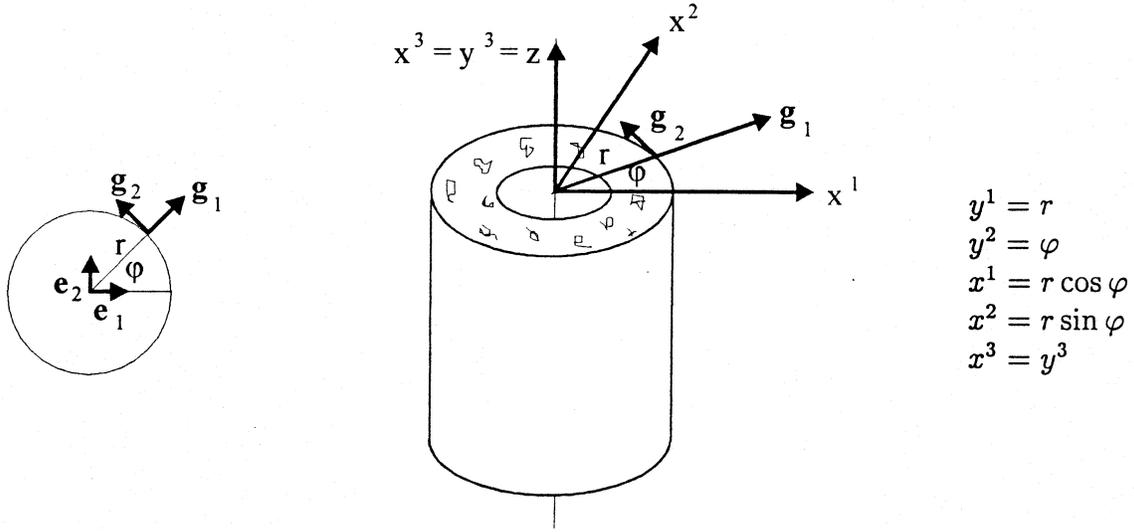


Abb. 14: Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi = \mathbf{g}^1, & |\mathbf{g}_1| &= 1 \\ \mathbf{g}_2 &= -r(\mathbf{e}_1 \sin \varphi - \mathbf{e}_2 \cos \varphi) = r^2 \mathbf{g}^2, & |\mathbf{g}_2| &= r \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}^3. \end{aligned} \quad (78)$$

Wir setzen hier axiale Symmetrie voraus, d.h. die Vorgänge im Zylinder sind sowohl vom Winkel  $\varphi$  als auch von der  $z$ -Koordinate unabhängig. Daraus folgt

$$\mathbf{v}^F = v_r^F \mathbf{g}^1, \quad \mathbf{u}^S = u_r^S \mathbf{g}^1. \quad (79)$$

Weiterhin wollen wir im folgenden die Schwerkräfte vernachlässigen, d.h.

$$\mathbf{b}^S \equiv 0, \quad \mathbf{b}^F \equiv 0. \quad (80)$$

Um die Feldgleichungen in Zylinderkoordinaten angeben zu können, ist die Umrechnung einiger Größen notwendig.

$$\text{grad } \mathbf{v}^F = \frac{dv_r^F}{dr} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \frac{v_r^F}{r} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^2 \quad (81)$$

†

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T}^F &= -\text{grad } \varphi^F(\rho_t^F) + \beta \tau \varphi \text{grad div } \mathbf{v}^F \\ &= -\frac{d\varphi^F}{d\rho_t^F} \underbrace{\frac{d\rho_t^F}{dx^k} \mathbf{e}_k}_{\text{grad } \rho_t^F} + \beta \tau \varphi \text{grad div } \mathbf{v}^F \\ &= -\frac{d\varphi^F}{d\rho_t^F} \text{grad } \rho_t^F + \beta \tau \varphi \text{grad div } \mathbf{v}^F \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^F = \frac{dv_r^F}{dr} + \frac{v_r^F}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv_r^F) \quad (82)$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}^S = \frac{du_r^S}{dr} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \frac{u_r^S}{r} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^2 \equiv \mathbf{e}^S \quad (83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^S = \frac{du_r^S}{dr} + \frac{u_r^S}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_r^S) \quad (84)$$

Damit ergeben sich für die Felder  $\{\rho_t^F, v_r^F, u_r^S\}$  die Feldgleichungen in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} v_r^F \frac{d\rho_t^F}{dr} + \rho_t^F \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv_r^F) &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left( (\lambda^S + 2\mu^S) u_r^S - \beta \varphi \tau v_r^F \right) \right) + \pi v_r^F &= 0, \\ -\frac{d\varphi^F}{d\rho_t^F} \frac{d\rho_t^F}{dr} + \beta \varphi \tau \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_r^F) \right) - \pi v_r^F &= 0. \end{aligned} \quad (85)$$

## 5.2 Randbedingungen

Bevor wir versuchen wollen, dieses Gleichungssystem zu lösen, werden wir die Randbedingungen für das Beispiel aufstellen. Wir benötigen fünf Bedingungen, nämlich eine für die Massenbilanz (85)<sub>1</sub>, sowie jeweils zwei Bedingungen für die beiden Impulsbilanzen (85)<sub>2</sub> und (85)<sub>3</sub>. Für die Bilanzgleichung für die Porosität, die nach  $\Delta$  aufgelöst worden ist, wird keine Bedingung mehr benötigt.

Zunächst suchen wir für den inneren und den äußeren Rand des Körpers dynamische Randbedingungen der Form

$$\mathbf{t}|_{\Gamma} = \mathbf{t}^{\text{ext}}. \quad (86)$$

Dabei setzt sich  $\mathbf{t}$  aus dem normalen Anteil der Spannungstensoren für Skelett und Fluid zusammen

$$\mathbf{t} := (\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^F) \mathbf{n}. \quad (87)$$

Wir formen die bekannten Stoffgesetze mit Gln. (81) – (84) um und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^S &= \lambda^S (\mathbf{e}^S \cdot \mathbf{1}) \mathbf{1} + 2\mu^S \mathbf{e}^S + \beta \Delta \mathbf{1} \\ &= \lambda^S \left( \frac{du_r^S}{dr} + \frac{u_r^S}{r} \right) \mathbf{1} + 2\mu^S \left( \frac{du_r^S}{dr} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \frac{u_r^S}{r} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}^2 \right) + \beta \Delta \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\mathbf{T}^F = -\varphi^F (\rho_t^F) \mathbf{1} - \beta \Delta \mathbf{1}. \quad (89)$$

Die äußere Belastung ist durch den Druck am Rande gegeben:

$$\mathbf{t}^{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} \mathbf{n} = -p_{\text{ext}} \mathbf{g}_1 \quad (90)$$

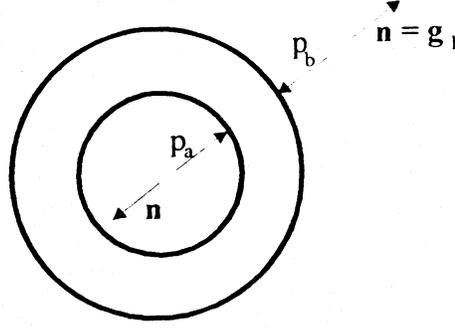


Abb. 15: Außenlast auf den Zylinder

Durch Einsetzen in (87) ergeben sich die Randbedingungen  
für  $r = b$  :

$$\lambda^S \left( \frac{du_r^S}{dr} + \frac{u_r^S}{r} \right) \mathbf{g}_1 + 2\mu^S \frac{du_r^S}{dr} \mathbf{g}_1 + \beta \Delta \mathbf{g}_1 - \wp^F(\rho_t^F) \mathbf{g}_1 - \beta \Delta \mathbf{g}_1 = -p_b \mathbf{g}_1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda^S \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r^S) + 2\mu^S \frac{du_r^S}{dr} - \wp^F(\rho_t^F) \Big|_{r=b} = -p_b ,} \quad (91)$$

für  $r = a$  :

$$\boxed{\lambda^S \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r^S) + 2\mu^S \frac{du_r^S}{dr} - \wp^F(\rho_t^F) \Big|_{r=a} = -p_a .} \quad (92)$$

Weitere zwei Randbedingungen erhalten wir, wenn wir die Ausfuhr betrachten. Wir kennen Glg. (38)

$$m^F = \alpha(p^F - n p_A) . \quad (93)$$

Hier können wir bekannte Größen einsetzen

$$p^F = \wp^F(\rho_t^F) + \beta \Delta ,$$

$$\Delta = -\tau \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}^F = -\tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} ,$$

$$n = n - n_E + n_E = \Delta + n_E = -\tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} + n_E ,$$

und erhalten

für  $r = b$ :

$$\boxed{m_b^F = \alpha \left[ \wp^F(\rho_t^F) \Big|_{r=b} - \beta \tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} \Big|_{r=b} - p_b \left( n_E - \tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} \Big|_{r=b} \right) \right] ,} \quad (94)$$

für  $r = a$ :

$$m_a^F = \alpha \left[ \varphi^F(\rho_t^F) \Big|_{r=a} - \beta \tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} \Big|_{r=a} - p_a \left( n_E - \tau \varphi \frac{1}{r} \frac{d(rv_r^F)}{dr} \Big|_{r=a} \right) \right]. \quad (95)$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Ausfuhr auf der positiven und der negativen Seite des Randes gleich groß ist

$$m^F = \rho^{F-} \mathbf{v}^{F-} \cdot \mathbf{n} = \rho^{F+} \mathbf{v}^{F+} \cdot \mathbf{n}, \quad (96)$$

gilt

$$\rho_t^F r v_r^F = r_0 \rho_0^F v_0^F, \quad (97)$$

bzw.

$$\rho_t^F r v_r^F \Big|_{r=b} = b m_b^F, \quad (98)$$

und

$$\rho_t^F r v_r^F \Big|_{r=a} = a m_a^F. \quad (99)$$

Mit (94) & (98) sowie (95) & (99) sind also zwei weitere Randbedingungen entstanden. Die fehlende fünfte Bedingung wird für den Sonderfall unseres Beispiels an späterer Stelle durch Überlegungen zur Lastverteilung auf die Komponenten ermittelt. Es stellt sich heraus, daß es genügt, den Sonderfall  $p_a = p_b$  zu behandeln. In diesem Falle treten keine Diffusionsprozesse zwischen den Komponenten auf. Für den allgemeinen Fall ist als Folgerung aus dem Modell von VON TERZAGHI eine solche Aufteilung der Last auf die Komponenten jedoch nicht richtig (siehe hierzu: W. KEMPA [4]).

### 5.3 Näherungslösung mit Hilfe der Störungsmethode

Wenden wir uns nun der Lösung des Gleichungssystems (85) zu. Wir benutzen die Störungsmethode, um eine Näherungslösung für das Problem zu finden.

#### 5.3.1 Entwicklung der Gleichungen

Wir beginnen mit dem *Ansatz*

$$\begin{aligned} \rho_t^F &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots = \sum_{n=0} \rho_n \varepsilon^n \\ v_r^F &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots = \sum_{n=0} v_n \varepsilon^n \\ u_r^S &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = \sum_{n=0} u_n \varepsilon^n. \end{aligned} \quad (100)$$

Der kleine Parameter  $\varepsilon$  wird als Druckdifferenz definiert:

$$0 < \varepsilon := \left| \frac{p_b - p_a}{p_a} \right| \ll 1. \quad (101)$$

Mit

$$\frac{d\varphi^F}{d\rho_t^F} \Big|_{\rho_t^F = \rho_0^F} =: c^{F2} \cong \text{konst}, \quad (102)$$

wobei  $c^F$  die intrinsische Schallgeschwindigkeit des Fluids darstellt, entsteht unter Berücksichtigung obigen Ansatzes aus Gleichungssystem (85)

$$\begin{aligned} \frac{d(r\rho_0 v_0)}{dr} + \varepsilon \frac{d}{dr} r(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) + \varepsilon^2 \frac{d}{dr} r(\rho_1 v_1 + \rho_0 v_2 + \rho_2 v_0) + \dots = 0, \\ \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{\beta\varphi\tau}{c^{F^2}} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_0) \right] + \frac{\pi}{c^{F^2}} v_0 + \varepsilon \left\{ \frac{d\rho_1}{dr} - \frac{\beta\varphi\tau}{c^{F^2}} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_1) \right] + \frac{\pi}{c^{F^2}} v_1 \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \frac{d\rho_2}{dr} - \frac{\beta\varphi\tau}{c^{F^2}} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_2) \right] + \frac{\pi}{c^{F^2}} v_2 \right\} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_0 - \beta \varphi \tau v_0 \right] \right] + \pi v_0 + \\ + \varepsilon \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_1 - \beta \varphi \tau v_1 \right] \right] + \pi v_1 \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_2 - \beta \varphi \tau v_2 \right] \right] + \pi v_2 \right\} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Als Annahme soll gelten

$$\rho_0(r) = \rho_0^F = \text{konst.} \quad (104)$$

Wir sind nun in der Lage, die verschiedenen Stufen von  $\varepsilon$  zu betrachten und können durch z.T. mehrfache Integration die Geschwindigkeiten, Massendichten und Verschiebungen bestimmen. Hierin sind selbstverständlich noch unbekannte Konstanten enthalten.

Nullte Stufe „ $\varepsilon^0$ “:

$$\begin{aligned} \text{Gl.1 : } \quad \frac{d(r\rho_0 v_0)}{dr} = 0 \quad \implies \quad v_0 = \frac{A_0}{r}, \\ \text{Gl.2 : } \quad \frac{\pi}{c^{F^2}} v_0 = 0 \quad \implies \quad \begin{matrix} A_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{matrix}, \quad (105) \\ \text{Gl.3 : } \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_0 \right] \right\} = 0 \quad \implies \\ u_0 = \frac{C_0}{r(\lambda^S + 2\mu^S)} + \frac{B_0}{2(\lambda^S + 2\mu^S)}. \end{aligned}$$

Erste Stufe „ $\varepsilon^1$ “:

$$\begin{aligned} \text{Gl.1 : } \quad \frac{d(r\rho_0 v_1)}{dr} = 0 \quad \implies \quad v_1 = \frac{A_1}{r}, \\ \text{Gl.2 : } \quad \frac{d\rho_1}{dr} \frac{\pi}{c^{F^2}} \frac{A_1}{r} = 0 \quad \implies \quad \rho_1 = B_1 - \frac{\pi}{c^{F^2}} A_1 \ln r, \quad (106) \\ \text{Gl.3 : } \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_1 \right] \right\} + \pi \frac{A_1}{r} = 0 \quad \implies \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{D_1}{r(\lambda^S + 2\mu^S)} + \frac{C_1}{2(\lambda^S + 2\mu^S)}r - \frac{\pi A_1}{2(\lambda^S + 2\mu^S)}\left(r \ln r - \frac{r}{2}\right).$$

Zweite Stufe „ $\varepsilon^2$ “:

$$\begin{aligned} \text{Gl.1 : } & \frac{d}{dr} \left[ r \left( (B_1 - \frac{\pi}{c^{F^2}} A_1 \ln r) \frac{A_1}{r} + \rho_0 v_2 \right) \right] = 0 \quad \implies \\ & v_2 = \frac{A_2}{r \rho_0} + \frac{\pi A_1^2 \ln r}{c^{F^2} \rho_0 r}, \\ \text{Gl.2 : } & \frac{d\rho_2}{dr} - \frac{\beta \varphi \tau}{c^{F^2}} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{\pi A_1^2 \ln r}{c^{F^2} \rho_0 r} \right] + \frac{\pi}{c^{F^2}} \left[ \frac{A_2}{r \rho_0} + \frac{\pi A_1^2 \ln r}{c^{F^2} \rho_0 r} \right] = 0 \quad \implies \\ & \rho_2 = B_2 + \frac{\beta \varphi \tau \pi A_1^2}{(c^{F^2})^2 \rho_0} \frac{1}{r^2} - \frac{\pi}{c^{F^2}} \left[ \frac{A_2}{\rho_0} \ln r + \frac{\pi A_1^2}{2c^{F^2} \rho_0} (\ln r)^2 \right], \quad (107) \\ \text{Gl.3 : } & \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left[ (\lambda^S + 2\mu^S) u_2 - \frac{\beta \varphi \tau \pi A_1^2 \ln r}{c^{F^2} \rho_0 r} \right] \right\} + \pi \left[ \frac{A_2}{r \rho_0} + \frac{\pi A_1^2 \ln r}{c^{F^2} \rho_0 r} \right] = 0 \quad \implies \\ & u_2 = \frac{D_2}{r(\lambda^S + 2\mu^S)} + \frac{\beta \varphi \tau \pi A_1^2}{c^{F^2} \rho_0 (\lambda^S + 2\mu^S)} \frac{\ln r}{r} + \frac{C_2}{2(\lambda^S + 2\mu^S)} r - \\ & \quad - \frac{\pi}{(\lambda^S + 2\mu^S)} \left[ \frac{A_2}{\rho_0} \left( \frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + \frac{\pi A_1^2}{2c^{F^2} \rho_0} \left( \frac{r}{2} (\ln r)^2 - \frac{r}{2} \ln r + \frac{r}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Einfachheitshalber werden nur diese drei Stufen betrachtet. Vor allem für die Bestimmung der Integrationskonstanten würde die Berücksichtigung weiterer Stufen nämlich einen großen Rechenaufwand bedeuten.

### 5.3.2 Entwicklung der Randbedingungen

Auf dieselbe Weise wie die Gleichungen müssen nun auch die Randbedingungen für die verschiedenen Stufen entwickelt werden.

Unter Berücksichtigung von

$$p_b = p_a + \underbrace{\frac{p_b - p_a}{\varepsilon}}_{\varepsilon} p_a, \quad (108)$$

ergibt sich

#### RB 1

$$\begin{aligned} \text{„}\varepsilon^{0\text{“}} : & \quad \varrho^F(\rho_0^F) - \lambda^S \left( \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{r} \right) \Big|_{r=a} - 2\mu^S \frac{du_0}{dr} \Big|_{r=a} = p_a, \\ \text{„}\varepsilon^{1\text{“}} : & \quad c^{F^2} \rho_1^F(a) - \lambda^S \left( \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} \right) \Big|_{r=a} - 2\mu^S \frac{du_1}{dr} \Big|_{r=a} = 0, \\ \text{„}\varepsilon^{2\text{“}} : & \quad c^{F^2} \rho_2^F(a) - \lambda^S \left( \frac{du_2}{dr} + \frac{u_2}{r} \right) \Big|_{r=a} - 2\mu^S \frac{du_2}{dr} \Big|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

## RB 2

$$\begin{aligned} \text{„}\varepsilon^0\text{“} : \quad & \wp^F(\rho_0^F) - \lambda^S \left( \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{r} \right) \Big|_{r=b} - 2\mu^S \frac{du_0}{dr} \Big|_{r=b} = p_a , \\ \text{„}\varepsilon^1\text{“} : \quad & c^{F^2} \rho_1^F(b) - \lambda^S \left( \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} \right) \Big|_{r=b} - 2\mu^S \frac{du_1}{dr} \Big|_{r=b} = p_a , \\ \text{„}\varepsilon^2\text{“} : \quad & c^{F^2} \rho_2^F(b) - \lambda^S \left( \frac{du_2}{dr} + \frac{u_2}{r} \right) \Big|_{r=b} - 2\mu^S \frac{du_2}{dr} \Big|_{r=b} = 0 . \end{aligned} \quad (110)$$

## RB 3

$$\begin{aligned} \text{„}\varepsilon^0\text{“} : \quad & 0 = \alpha \left[ \wp^F(\rho_0^F) - p_a n_E \right] , \\ \text{„}\varepsilon^1\text{“} : \quad & \rho_0 v_1(a) = \alpha \left[ c^{F^2} \rho_1^F(a) \right] , \\ \text{„}\varepsilon^2\text{“} : \quad & \rho_0 v_2(a) + \rho_1(a) v_1(a) = \alpha \left[ c^{F^2} \rho_2^F(a) - \tau \varphi(p_a - \beta) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r v_2(a) \right] . \end{aligned} \quad (111)$$

## RB 4

$$\begin{aligned} \text{„}\varepsilon^0\text{“} : \quad & 0 = \alpha \left[ \wp^F(\rho_0^F) - p_a n_E \right] , \\ \text{„}\varepsilon^1\text{“} : \quad & \rho_0 v_1(b) = \alpha \left[ c^{F^2} \rho_1^F(b) - p_a n_E \right] , \\ \text{„}\varepsilon^2\text{“} : \quad & \rho_0 v_2(b) + \rho_1(b) v_1(b) = \alpha \left[ c^{F^2} \rho_2^F(b) - \tau \varphi(p_a - \beta) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r v_2(b) \right] . \end{aligned} \quad (112)$$

### 5.3.3 Bestimmung der Integrationskonstanten

In der Stufe „ $\varepsilon^0$ “ werden nur Terme des Ansatzes berücksichtigt, in denen weder  $\varepsilon$  noch eine höhere Potenz von  $\varepsilon$  enthalten ist. Da also alle Terme mit  $\varepsilon$  unberücksichtigt bleiben sollen, kann man auch  $\varepsilon = 0$  schreiben. In diesem Fall ist kein Druckunterschied zwischen dem Innenrand und dem Außenrand des Zylinders vorhanden. Es findet deshalb auch keine Massenausfuhr statt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist also  $v_r^F = 0$ .

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten betrachten wir die nullte Stufe der ersten beiden Randbedingungen.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \wp^F(\rho_0^F) - \frac{\lambda^S B_0}{\lambda^S + 2\mu^S} + \frac{2\mu^S C_0}{\lambda^S + 2\mu^S} \frac{1}{a^2} - \frac{\mu^S B_0}{\lambda^S + 2\mu^S} = p_a , \\ 2. \quad & \wp^F(\rho_0^F) - \frac{\lambda^S B_0}{\lambda^S + 2\mu^S} + \frac{2\mu^S C_0}{\lambda^S + 2\mu^S} \frac{1}{b^2} - \frac{\mu^S B_0}{\lambda^S + 2\mu^S} = p_a . \end{aligned} \quad (113)$$

Da  $a \neq b$  folgt offensichtlich  $C_0 = 0$ . Es bleibt also noch übrig:

$$\wp^F(\rho_0^F) - \frac{\lambda^S + \mu^S}{\lambda^S + 2\mu^S} B_0 = p_a . \quad (114)$$

Für diesen Sonderfall  $\varepsilon = 0$ , wie auch für Komposite, gelten die Bedenken zur Lastverteilung auf die Komponenten, die aus dem Gedankenexperiment von VON TERZAGHI folgen,

nicht, weil keine Diffusionsprozesse zwischen den Komponenten stattfinden. Deshalb überlegen wir uns, wie der Außendruck auf den porösen Körper wirkt. Da in diesem Fall die Geschwindigkeit gleich Null ist, wird der Außendruck entsprechend der Mikrostruktur auf die Komponenten verteilt werden.

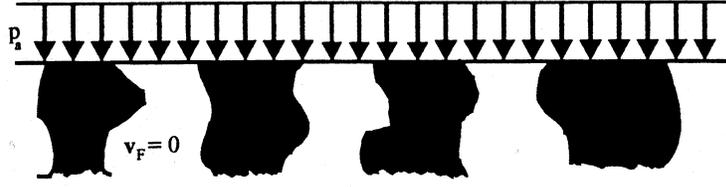


Abb. 16: Außendruck auf den porösen Körper

Als fünfte Bedingung bestimmen wir den homogenen Anfangsdruck in der Flüssigkeit als einen der Anfangsporosität entsprechenden Anteil am Außendruck

$$\varphi^F(\rho_0^F) = n_E p_a . \quad (115)$$

Dies geht zurück auf die Anfangsbedingung für den allgemeinen nichtstationären Vorgang. Mit Gl. 114 gilt dann für den übrigen Anteil des Drucks

$$(1 - n_E)p_a = -\frac{\lambda^S + \mu^S}{\lambda^S + 2\mu^S} B_0 . \quad (116)$$

Damit ist die Konstante  $B_0$  bestimmt zu

$$B_0 = -\frac{\lambda^S + \mu^S}{\lambda^S + 2\mu^S} (1 - n_E)p_a , \quad (117)$$

und es ergibt sich für die Verschiebung

$$u_0 = -\frac{(1 - n_E)p_a}{\lambda^S + \mu^S} r . \quad (118)$$

Nun wenden wir uns der Bestimmung der Integrationskonstanten in der ersten Stufe „ $\varepsilon^{1\alpha}$ “ zu. In dieser Stufe werden diejenigen Terme des Ansatzes berücksichtigt, in denen  $\varepsilon$  in einfacher Potenz vorkommt.

Durch Subtraktion der dritten Randbedingung (111)<sub>2</sub> von der vierten Randbedingung (112)<sub>2</sub> läßt sich die Konstante  $A_1$  direkt bestimmen:

$$A_1 = \frac{\alpha p_a n_E}{\alpha \pi (\ln a - \ln b) - \left( \frac{\rho_0}{b} - \frac{\rho_0}{a} \right)} . \quad (119)$$

Nach Einsetzen der Ergebnisse für  $\frac{du_1}{dr}$ ,  $\frac{u_1}{r}$  und  $\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r}$  liefert die Subtraktion der ersten beiden Randbedingungen (110)<sub>2</sub> und (109)<sub>2</sub> die Gleichung

$$\pi A_1 (\ln a - \ln b) + \frac{\lambda^S \pi A_1}{\lambda^S + \mu^S} (\ln b - \ln a) + \frac{2\mu^S D_1}{\lambda^S + \mu^S} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{\mu^S \pi A_1}{\lambda^S + \mu^S} (\ln b - \ln a) = p_a . \quad (120)$$

Damit erfolgt die Bestimmung der Konstante  $D_1$  zu

$$D_1 = \frac{p_a(\lambda^S + 2\mu^S) - \mu^S \pi A_1 (\ln a - \ln b)}{2\mu^S \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}. \quad (121)$$

Aus RB 3 folgt

$$B_1 = \frac{\rho_0 A_1}{a \alpha c^{F^2}} + \frac{\pi}{c^{F^2}} A_1 \ln a, \quad (122)$$

und aus RB 1

$$C_1 = \frac{\lambda^S + 2\mu^S}{\lambda^S + \mu^S} c^{F^2} \left( B_1 - \frac{\pi}{c^{F^2}} A_1 \ln a \right) + \frac{\lambda^S \pi A_1}{\lambda^S + \mu^S} \ln a - \frac{2\mu^S D_1}{a^2 (\lambda^S + \mu^S)} - \frac{\mu^S \pi A_1}{\lambda^S + \mu^S} \left( \ln a + \frac{1}{2} \right). \quad (123)$$

Mit derselben Vorgehensweise wie in der ersten Stufe werden die Integrationskonstanten der zweiten Stufe „ $\varepsilon^2$ “ bestimmt. Wir erhalten:

$$A_2 = \frac{B_1 A_1 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \alpha \left\{ \frac{\pi^2 A_1^2}{2c^{F^2} \rho_0} [(\ln a)^2 - (\ln b)^2] + (2\beta - p_a) \frac{\varphi \tau \pi A_1^2}{c^{F^2} \rho_0} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right\}}{1 + \frac{\alpha \pi}{\rho_0} (\ln b - \ln a)}, \quad (124)$$

$$D_2 = \frac{-\frac{\pi A_2}{2\rho_0} (\ln b - \ln a) + \frac{\pi^2 A_1^2}{4c^{F^2} \rho_0} [(\ln a)^2 - (\ln b)^2 + \ln b - \ln a] - \frac{\beta \varphi \tau \pi A_1^2}{c^{F^2} \rho_0} \left( \frac{\ln a}{a^2} - \frac{\ln b}{b^2} \right)}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \quad (125)$$

$$B_2 = \frac{A_2 + B_1 A_1}{\alpha c^{F^2} a} + \frac{\pi A_2}{\rho_0 c^{F^2}} \ln a + \frac{\pi^2 A_1^2}{2 (c^{F^2})^2 \rho_0} (\ln a)^2 + (p_a - 2\beta) \frac{\varphi \tau \pi A_1^2}{(c^{F^2})^2 \rho_0} \frac{1}{a^2}, \quad (126)$$

$$C_2 = \frac{1}{\lambda^S + \mu^S} \left\{ (\lambda + 2\mu) B_2 + \frac{\mu^S \pi A_2}{\rho_0} \left( \frac{1}{2} - \ln a \right) + \frac{2\mu^S D_2}{a^2} + \frac{2\mu^S \beta \varphi \tau \pi A_1^2 \ln a}{c^{F^2} \rho_0 a^2} + \frac{\mu^S \pi^2 A_1^2}{2c^{F^2} \rho_0} \left[ -(\ln a)^2 + \ln a - \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (127)$$

## 5.4 Ergebnisse

Durch Einsetzen dieser Konstanten in die Gleichungen (105) - (107) erhalten wir die Massendichten, Geschwindigkeiten und Verschiebungen für die verschiedenen Stufen. Das

Einsetzen dieser Größen in den Ansatz (100) liefert dann die gesuchte Näherungslösung für  $\rho_t^F$ ,  $v_r^F$  und  $u_r^S$ . Dazu werden die folgenden Daten benutzt:

$$\begin{aligned}\beta &= 0.72 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, & c^F &= 1.5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, & \varphi &= 0.23, \\ \tau &= 3.699 \cdot 10^{-6} \text{ s}, & \pi &= 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ s}}, \\ \lambda &= 10.776 \cdot 10^3 \text{ MPa}, & \mu &= 6.144 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \\ n_E &= 0.23, & \rho_0 &= 0.23 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, & \alpha &= 4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{s}}{\text{m}}, \\ p_a &= 10^2 \text{ MPa}, & p_b &= 0.5 \cdot 10^2 \text{ MPa}, \\ a &= 0.5 \text{ m}, & b &= 1.0 \text{ m}.\end{aligned}$$

Die Lösungen sind in den nachstehenden Abbildungen in Abhängigkeit vom Radius des Zylinders dargestellt. Um den Einfluß der Kopplung zwischen den Komponenten zu verdeutlichen, wurden in einigen Fällen die Größen zum Vergleich sowohl für  $\beta = 0$  und  $\pi = 0$  als auch für  $\beta \neq 0$  und  $\pi \neq 0$  aufgezeichnet. Es stellte sich heraus, daß die Größenordnung von  $\beta$  kaum Einfluß auf das Verhalten hat, während der Einfluß von  $\pi$  sehr groß ist.

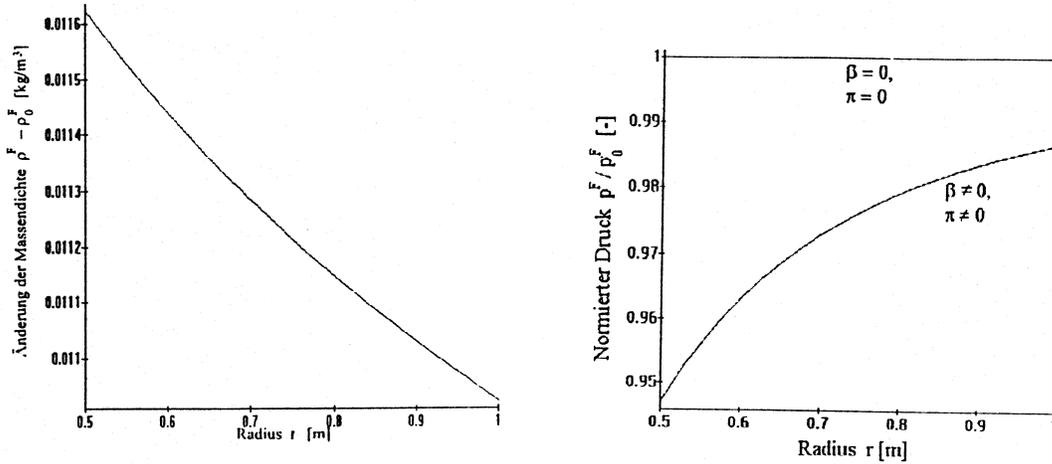


Abb. 17: Änderung der Massendichte und normierter Druck als Funktionen vom Radius

Da die Massendichte der Flüssigkeit nahezu konstant ist, wurde hier die Abweichung der Massendichte von der Anfangsmassendichte  $\rho^F - \rho_0^F$  aufgetragen.

Obwohl die Änderung sehr klein ist, kann man deutlich erkennen, daß die Massendichte vom Innenrand zum Außenrand des Zylinders abnimmt.

Der Druck in der Flüssigkeit  $p^F$  setzt sich aus dem intrinsischen Druck  $\varphi^F$  und einem aus dem Zusammenwirken der Komponenten entstehenden Anteil zusammen

$$p^F = \varphi^F(\rho_t^F) + \beta \Delta, \quad (128)$$

dabei ist

$$\varphi^F(\rho_t^F) = \kappa^F \rho_0^F + \kappa^F (\rho_t^F - \rho_0^F) = \kappa^F \rho_t^F. \quad (129)$$

Hier beschreibt  $\kappa^F$  die Kompressibilität des Fluids. Damit ist der normierte Druck gegeben zu

$$\frac{p^F}{p_0^F} = \frac{\kappa^F \rho_t^F + \beta \Delta}{\kappa^F \rho_0^F} = \frac{\rho_t^F}{\rho_0^F} + \frac{\beta \Delta}{\kappa^F \rho_0^F}. \quad (130)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Kompressibilität

$$\kappa^F = -\frac{1}{V^F} \frac{\partial V^F}{\partial p^F} = \frac{1}{\rho^F} \frac{\partial \rho^F}{\partial p^F}, \quad (131)$$

wobei  $V^F = \frac{1}{\rho^F}$  das spezifische Volumen der Flüssigkeit bezeichnet, können wir  $\kappa^F$  aus Gl. (130) eliminieren. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^F} &= \rho_t^F \left( \frac{\partial \varphi^F}{\partial \rho_t^F} \right) \Big|_{\rho_t^F = \rho_0^F} = (\rho_t^F - \rho_0^F + \rho_0^F) \left( \frac{\partial \varphi^F}{\partial \rho_t^F} \right) \Big|_{\rho_t^F = \rho_0^F} = \\ &= \rho_0^F \left( 1 + \frac{\rho_t^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} \right) \left( \frac{\partial \varphi^F}{\partial \rho_t^F} \right) \Big|_{\rho_t^F = \rho_0^F}, \end{aligned} \quad (132)$$

und mit Gl. (102)

$$\frac{1}{\kappa^F} = \rho_0^F c^{f2} \implies \kappa^F = \frac{1}{\rho_0^F c^{F2}}. \quad (133)$$

Der normierte Druck läßt sich also auch in folgender Weise angeben:

$$\frac{p^F}{p_0^F} = \frac{\rho_t^F}{\rho_0^F} + \beta \Delta c^{F2}. \quad (134)$$

Ebenso wie die Massendichte nimmt auch die Fluidgeschwindigkeit von innen nach außen ab.

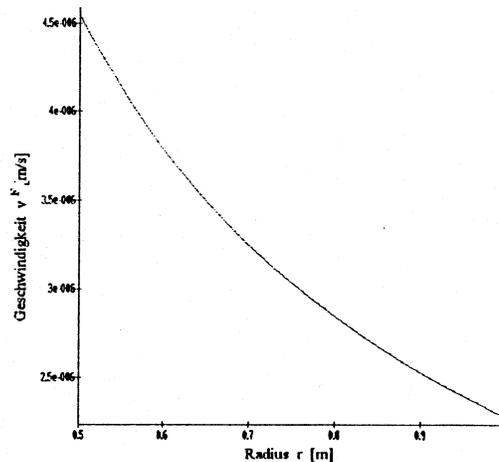


Abb. 18: Geschwindigkeit  $v^F$  als Funktion vom Radius

Dagegen nimmt die Verschiebung des Skeletts nach außen hin zu.

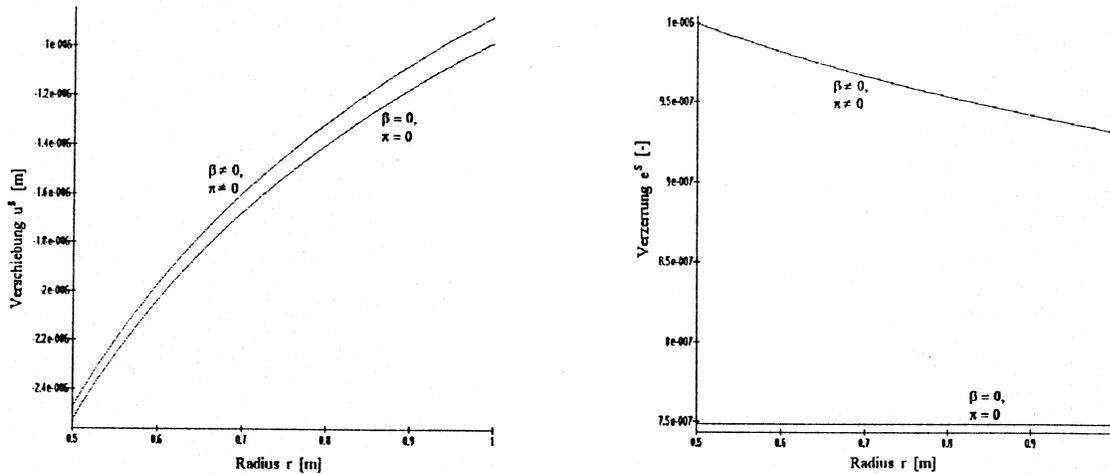


Abb. 19: Verschiebung  $u^S$  und Verzerrung  $e^s$  als Funktionen vom Radius

## 6. Schlußbemerkung

Wir erinnern noch einmal an die Aspekte, die ein Problem spezifizieren: Die Definition des Gebietes durch Vorgabe der Gleichungen für die Oberflächen, die Auswahl der benötigten Felder, die Angabe der partiellen Differentialgleichungen, die von den Feldern in jedem Punkt des Gebiets erfüllt werden, die Vorgabe der Randbedingungen und die Beschreibung von Anfangsbedingungen. Wenn man diese Merkmale bestimmt hat, möchte man das Problem natürlich lösen. Dies wird in den meisten Fällen nicht analytisch möglich sein, sondern erfordert eine Aufbereitung für numerische Verfahren. Üblich sind hier z.B. die Methode der Finiten Differenzen oder die Finite Elemente Methode. Als Beispiel sei an das Kapitel über die dynamischen Bedingungen erinnert, wo gezeigt wurde, wie W. KEMPA das Konsolidationsproblem mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin (also einem Verfahren der Finite Elemente Methode) simuliert hat. Für den speziellen Fall der porösen Körper sei auch auf die Dissertation von G. KRAUSE [10] verwiesen, die sich eingehend mit der Anwendung numerischer Verfahren auf diese Medien auseinandersetzt.

Die hier behandelten Randbedingungen wurden für den Rand des Skeletts aufgestellt. Es ist allerdings genauso möglich, daß das Fluid die freie Fläche darstellt (z.B. Transport von Verunreinigungen). Dann gilt für die Geschwindigkeit der freien Fläche  $\mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} = c$ . In diesem Fall haben die Randbedingungen natürlich eine andere Form.

Um den Einfluß der Kopplung zwischen den Komponenten zu verdeutlichen, wurden einige Ergebnisse des Beispiels sowohl für  $\beta \neq 0$  und  $\pi \neq 0$  als auch für  $\beta = 0$  und  $\pi = 0$  dargestellt.

Es soll betont werden, daß die Randwertaufgabe für einen stationären Vorgang (Beispiel des radial durchströmten Zylinders) mit Hilfe einer zusätzlichen Bedingung (siehe (115)) gelöst wurde. Dies folgt aus der hier benutzten Definition der Störung. Für die flüssige Komponente kann man den ungestörten Zustand nicht als Nullzustand definieren, weil solche Zustände für Flüssigkeiten meistens nicht zulässig sind. Die Bedingung (115) hängt mit der allgemeinen Anfangsbedingung zusammen, die im untersuchten Fall mit der nullten Stufe (d.h.  $\varepsilon = 0$ ) verbunden ist.

## Literatur

1. K. Wilmanski: *Porous Media at Finite Strains – The New Model with the Balance Equation for Porosity*, Arch. Mech., **48**, 4 591 – 628, 1996.
2. K. Wilmanski: *Lagrangean Model of Two-Phase Porous Material*, Journal of Non-equilibrium Thermodynamics, **20**, 1, 50 – 78, 1995.
3. K. v. Terzaghi u. O.K. Fröhlich: *Theorie der Setzung von Tonschichten*, Franz Deuticke, Leipzig • Wien, 1936.
4. W. Kempa: *On the description of the consolidation phenomenon by means of a two-component continuum*, Arch. Mech., (in Druck), 1997.
5. K. Wilmanski: *The Thermodynamical Model of the Compressible Porous Material With the Balance Equation for Porosity*, Preprint No. 310, WIAS, Berlin 1997.
6. J. Bear: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Dover Publications, New York, 1988, Kap. 7.
7. W. Kempa: *Das Grenzwertproblem bei Konsolidation – eine konsistente Konstruktion der schwachen Formulierung*, MECH-Report 95/13, Universität-GH Essen, 1995.
8. K. Runesson: *On Non-Linear Consolidation of Soft Clay*, Dissertation, dept. of Struct. Mech., Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1978.
9. K. Wilmanski: *On the acoustic waves in two-component linear poroelastic materials*, Preprint No. 312, WIAS, Berlin 1997.
10. G. Krause: *Untersuchungen über numerische Verfahren für elastisch, poröse Medien*, Dissertation, Fachbereich Physikalische Ingenieurwissenschaft, Technische Universität Berlin, 1975.