Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Leitfähigkeit eindimensionaler periodischer elektrischer Netze

Alfred Liemant

submitted: 11th December 1995

Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis
und Stochastik
Mohrenstraße 39
D – 10117 Berlin
Germany

Preprint No. 209
Berlin 1995

Edited by
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)
Mohrenstraße 39
D — 10117 Berlin
Germany

Fax: + 49 30 2044975
e–mail (X.400): c=de;a=d400-gw;p=WIAS-BERLIN;s=preprint
e–mail (Internet): preprint@wias-berlin.de

Abstract. The Dirichlet's principle and the Thomson's principle have been used to study the asymptotic behaviour of resistance of a 1–dimensional periodic electric network.

Inhalt

1. Einführung

Bei der Untersuchung von zufälligen elektrischen Netzwerken ist die Beantwortung der Frage von Interesse, unter welchen Bedingungen sich der effektive Widerstand eines Netzes von sehr vielen Widerständen asymptotisch erfassen läßt. Resultate für den Fall, daß die Knotenmenge gleich dem Gitter Z ist und nur die nächsten Nachbarknoten elektrisch verbunden sind, findet man in [1].

Wir konstruieren ein Modell eines unendlichen elektrischen Netzes auf die folgende Weise. Wir nehmen an, die Knoten des Netzes befinden sich auf der rellen Achse an den Orten

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots \quad (x_{i+1} > x_i, x_0 \geq 0)$$

Alle Knoten seien miteinander verbunden. Die elektrische Verbindung zweier Knoten i und j an den Orten x_i und x_j hat die **Leitfähigkeit**

$$w_{ij} = W(|x_i - x_j|),$$

wobei die **Leitfähigkeitsfunktion** $W(\cdot)$ eine positive Funktion auf $R^+ = (0, \infty)$ ist. Mit $r_{ij} = 1/w_{ij}$ bezeichnen wir die Größe des **Ohmschen Widerstands**. Wir erhalten auf diese Weise ein **eindimensionales elektrisches** Netz.

Wir wählen aus der gesamten Knotenmenge $\omega = \{i, i = \cdots - 1, 0, 1 \ldots\}$ die endliche Knotenmenge $\omega_{2n} = \{i, i = -n, \ldots, n\}$ aus und legen an den Knoten $-n$ und n eine Spannung von 1 Volt an. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich eine Stromstärke von $1/R_{2n}$ (bzw. $1 \cdot D_{2n}$), wenn wir mit R_{2n} (bzw. D_{2n}) den **effektiven Ohmschen Widerstand** (bzw. die **effektive elektrische Leitfähigkeit**) des Teilnetzes ω_{2n} bezeichnen. Wir untersuchen in dieser Arbeit das asymptotische Verhalten von R_{2n} (bzw. D_{2n}) für große n.

Vereinfachen wir das Netz zu einer Kette von Widerständen mit $r_{i,i+1} = r_i$ und $r_{ij} = 0$ für $|i-j| > 1$, $w_i = r_i^{-1}$ dann ergeben sich offensichtlich $R_{2n} = r_{-n} + \cdots + r_{n-1}$ und $D_{2n} = 1/(1/w_{-n} + \cdots + 1/w_{n-1})$. Nehmen wir an, die Folge (r_i), $i = \cdots - 1, 0, 1, \ldots$ sei eine doppelt unendliche Folge unabhängiger identisch verteilter positiver Zufallsgrößen (oder allgemeiner eine positive ergodische Folge von Zufallsgrößen), dann folgt aus dem Ergodensatz die fast sichere Konvergenz

$$R_{2n}/2n \xrightarrow[n\to\infty]{} R (= \mathbb{E} r_0)$$

bzw.

$$2n\, D_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} D = 1/R (= 1/\mathbb{E} 1/w_0))$$

wobei $\mathbb{E}$ den Erwartungswert bezeichnet. Angenommen, die Kette (r_i) modelliert die mikroskopisch *inhomogene* Struktur eines "Drahtes", dann können wir R (bzw. D) auf makroskopischer Ebene als spezifischen Ohmschen Widerstand (bzw. elektrische Leitfähigkeit) eines *homogenen* "Drahtes" interpretieren.

Gehen wir zurück zu dem allgemeineren Fall, daß alle Knoten des elektrischen Netzes miteinander verbunden sind.

Ein eindimensionales elektrisches Netz mit der Leitfähigkeitsfunktion $\mathbb{W}$ heißt **stationäres Netz** $(\mathbb{P}, \mathbb{W})$, wenn die Folge $\xi = (\xi_i)$ der Abstände $\xi_i = x_{i+1} - x_i$ benachbarter Knoten eine doppelt unendliche stationäre Folgen von positiven Zufallsgrößen mit dem Verteilungsgesetz $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}\xi_0 < \infty$ ist.

Aufgrund der Tatsache, daß w_{ij} nur vom Abstand der Knoten i und j abhängt, erwartet man, daß unter gewissen Bedingungen $R_{2n}/2n$ (damit auch $2nD_{2n}$) auch für stationäre

Netze $(\mathbb{P}, \mathbb{W})$ gegen ein Grenzwert konvergiert. Wir untersuchen hier spezielle stationäre Netze.

Definition: *Eine stationäre Folge $\xi = (\xi_i)$ von rellen Zufallsgrößen mit Verteilungsgesetz P heißt periodisch mit Periode p, wenn eine natürliche Zahl p existiert, so daß*

$$P(\xi_i = \xi_{i+p}) = 1, \; i = \cdots - 1, 0, 1 \ldots$$

gilt.

Ist ξ_i periodisch (mit Periode p) und ergodisch, dann gibt es Zahlen $y_1, \ldots, y_p$ mit

$$P(\ldots \xi_{i-1} = y_p, \xi_i = y_1, \ldots, \xi_{i+p} = y_1, \xi_{i+p+1} = y_2, \ldots) = 1/p, \; i = 1, 2 \ldots, p.$$

Definition: *Ein eindimensionales stationäres Netz $(\mathbb{P}, \mathbb{W})$ heißt* ***ergodisches periodisches Netz,*** *wenn die doppelt unendliche Folge (ξ_i) der Knotenabstände eine ergodische periodische stationäre Folge ist.*

Es gilt folgendes:

Theorem: *Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{W})$ ein ergodisches periodisches elektrisches Netz mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E}(W(\xi_1 + \cdots + \xi_k)) < \infty.$$

Dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n}/2n = R \quad P-\textit{fast sicher}$$
$$\textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} 2n\, D_{2n} = D = 1/R.$$

Außerdem ist $D \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E} W(\xi_1 + \cdots + \xi_k)$ erfüllt.

Im Gitterfall, d.h. $P(\xi_i = 1) = 1$, erhält man den expliziten Ausdruck

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W(k),$$

2. Elektrische Netze und Variationsprinzipien

Es sei eine endliche Knotenmenge $\omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ gegeben. Zwei Knoten i, j aus ω seien durch eine elektrische Leitung mit dem **Ohmschen Widerstand**

$$r_{ij} \, (r_{ij} = r_{ji}, 0 < r_{ij} < \infty)$$

verbunden. Mit $w_{ij} = 1/r_{ij}$ bezeichnen wir die **elektrische Leitfähigkeit**. Ein **elektrisches Potentialfeld** (v_i) verursacht einen **Stromfluß**

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (v_i - v_j)/r_{ij} \\ &= (v_i - v_j) w_{ij} \quad (c_{ij} + c_{ji} = 0). \end{aligned}$$

zwischen den Knoten i und j.

Fixiert man zwei Knoten, etwa 0 und n, gibt dort die elektrischen Potentiale $v_0 = 1$ und $v_n = 0$ vor, und bestimmt die verbleibenden Potentiale $v_1, \ldots, v_{n-1}$ gemäß der

1. Kirchhoffschen Regel, die besagt, daß die Summe der Ströme in jedem Knoten $1, \ldots, n-1$ verschwindet, so erhält man für dieses elektrische Netz einen **Gesamtstrom**

$$c = \sum_{j=1}^{n} c_{0j}.$$

Hieraus resultiert der **effektive Widerstand** R des elektrischen Netzes nach dem *Ohmschen Gesetz.*

$$R = 1/c \quad (= \text{Spannung/Stromstärke}).$$

Eine weitere physikalische Grundgröße eines Stromnetzes ist die **Energie**. Wir nutzen sie zur Beschreibung und Bestimmung von R mit Hilfe von Variationsprinzipien.

Der Energieverbrauch E_{ij} eines Widerstandes ist definiert durch das Produkt aus Potentialdifferenz und Stromstärke und läßt sich auf unterschiedliche Weise ausdrücken.

$$\begin{aligned} E_{ij} &= (v_i - v_j)c_{ij} \\ &= (v_i - v_j)^2/r_{ij} = (v_i - v_j)^2 w_{ij} \\ &= c_{ij}^2 r_{ij} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie E des elektrischen Netzes ist

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (v_i - v_j)^2 w_{ij}$$

Es gilt das **Dirichletsche Variationsprinzip:**
Das elektrische Netz nimmt den Zustand kleinster Gesamtenergie an.

(1)
$$\mathbb{E}_D = \min_{v_0=1, v_n=0} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (v_i - v_j)^2 w_{ij}$$

Die Bestimmungsgleichungen

$$\sum_{j=0}^{n} (v_i - v_j) w_{ij} = 0, \; i = 1, \ldots, n-1$$

dieser Variationsaufgabe entsprechen der *1. Kirchhoffschen Regel* (vgl. [3]).

Außerdem gilt

$$R = 1/\mathbb{E}_D,$$

bzw. für die **effektive Leitfähigkeit** D

$$D = \mathbb{E}_D$$

Für die Formulierung des zweiten Variationsprinzips benötigen wir eine Definition. Wir sagen (a_{ij}) bestimmt einen **Fluß** vom Knoten 0 zum Knoten n, wenn

$$\begin{aligned} a_{ij} + a_{ji} &= 0 \quad \text{(Antisymmetrie)} \\ \sum_{j=0}^{n} a_{ij} &= 0, \, i \neq 1, n \quad \text{(Quellfreiheit)} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

(a_{ij}) heiße **Einheitsfluß**, wenn $\sum_{i=0}^{n} a_{0j} = 1$. Ein Einheitsfluß, der aus einem Potentialfeld resultiert, d.h. $a_{ij} = (v_i - v_j)/r_{ij}$, heiße **Einheitsstromfluß**. Definieren wir die Gesamtenergie eines Stromnetzes aus den Strömen, dann sagt das (vgl. [2])

Thomsonsche Variationsprinzip: *Das elektrische Netz nimmt den Zustand kleinster Gesamtenergie an.*

(2) $$\mathbb{E}_T = \min_{\text{Einheitsfluß}} \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}^2 r_{ij} = \min_{\text{Einheitsstromfluß}} \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}^2 r_{ij}$$

und es gilt $\mathbb{E}_T = R$.

Für das weitere benötigen wir noch eine Variante des Dirichletschen Variationsprinzips. Wir schreiben die Potentiale v_i als Summe der Differenzen $u_i = v_{i-1} - v_i$ und erhalten für die Dirichletsche Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v_i - v_j)^2 w_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_i u_j \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{l=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} w_{k-1,l} \quad i \le j \\ A_{ij} &= A_{ji},\ 1 \le i,j \le n \end{aligned}$$

Das Dirichletsche Variationsprinzip ergibt nun

$$\mathbb{E}_D = \min_{u_1+\cdots+u_n=1} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_i u_j$$

und führt zu einem Gleichungssystem für $u_1, u_2, \ldots, u_n$

(3) $$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} u_j = \lambda \quad i = 1, \ldots, n$$

(4) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1,$$

das folgendermaßen interpretiert werden kann. Teilen wir die Knotenmenge $\omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ in zwei Teilmengen $\{0, 1, \ldots i-1\}$ und $\{i, \ldots, n\}$, so besagen die Gleichungen, daß die Summe der Ströme zwischen diesen beiden Teilmengen für alle $i = 1, \ldots, n$ den gleichen Wert λ ergibt. Dies ist äquivalent zur 1. Kirchhoffschen Regel und λ repräsentiert den Gesamstrom c.

Setzt man $\lambda = 1$ so führt die Lösung $u_1, \ldots, u_n$ von (3) zu dem Einheitsstromfluß $c_{ij} = (v_i - v_j) w_{ij}$, der die Thomsonsche Gesamtenergie minimiert, und wir erhalten die nützliche Beziehung für den effektiven Widerstand

$$R = u_1 + \cdots + u_n$$

Das Gleichungssystem (3) ist eindeutig lösbar, da aus

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j = 0, \quad i = 1, \dots n$$

über

$$0 = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v_i - v_j)^2 w_{ij}$$

folgt, daß $u_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, weil $w_{i,i+1} > 0$, $i = 0, \dots, n-1$.

3. Beweis des Theorems

Es sei $\xi = (\xi_i) = (x_{i+1} - x_i)$, $i = \dots -1, 0, 1, \dots$ die periodische stationäre Folge der Knotenabstände, $r_{ik}^{-1} = w_{ik} = W(\xi_i + \dots + \xi_{k-1})$, $i < k$ und

$$D_{2n} = \min_{u_{-n+1}+\dots+u_n=1} \sum_{-n+1 \le i < k \le n} W(\xi_i + \dots + \xi_{k-1})(u_i + \dots + u_{k-1})^2$$

gemäß dem Dirichletschen Variationsprinzip die effektive Leitfähigkeit des Teilnetzes $\{-n, \dots, n\}$.

Wir zeigen zuerst

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} 2nD_{2n} \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E}W(\xi_1 + \dots + \xi_k) \quad P\text{-fast sicher}$$

Mit Hilfe des Dirichletschen Variationsprinzips erhalten wir für $\overline{u}_i = 1/2n$, $i = -n+1, \dots, n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 2nD_{2n} &\le 2n \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=-n+1}^{n-k+1} (\overline{u}_l + \dots + \overline{u}_{l+k-1})^2 W(\xi_l + \dots + \xi_{l+k-1}) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=-n+1}^{n-k+1} k^2 W(\xi_l + \dots + \xi_{k-1}) \end{aligned}$$

und weiter

$$\le \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n-1} k^2 W(\xi_l + \dots + \xi_{l+k-1})$$

Die rechte Seite konvergiert aber aufgrund der Ergodizität von (ξ_i) gegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E}W(\xi_1 + \dots + \xi_n)$$

Der Schlüssel zum Beweis ist die Untersuchung des unendlichen Netzes. Wir zeigen, daß für das unendliche Netz ein Einheitsstromfluß $(c_{ij}) = ((v_i - v_j)w_{ij})$ existiert mit einem eindeutig bestimmten "Gradientenfeld" $(u_i) = (v_{i-1} - v_i)$. Das bedeutet, das unendlich lineare Gleichungssystem

$$(5) \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}^{(\infty)} u_j = 1 \quad i = \cdots -1, 0, 1 \ldots$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(\infty)} &= \sum_{l \geq j} \sum_{k \leq i} w_{k-1,l} \quad i \leq j \\ A_{ji}^{(\infty)} &= A_{ij}^{(\infty)} \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar. Die Koeffizienten $A_{ij}^{(\infty)}$ sind endlich. Es gilt sogar aufgrund der Voraussetzung

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}^{(\infty)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{l=0}^{k-1} W(\xi_{i+l+1-k} + \cdots + \xi_{i+l}) < \infty \quad P\text{-fast sicher}$$

weil

$$E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}^{(\infty)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E} W(\xi_1 + \cdots + \xi_k)$$

Die Periodizität von (ξ_i) hat zur Folge, daß (5) genau dann eindeutig lösbar ist und die Lösung periodisch ist, wenn das endliche Gleichungssystem

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{p} B_{ij} u_j = 1, \quad i = 1, \ldots, p$$

mit

$$B_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{i,j+kp}^{(\infty)}$$

eindeutig lösbar ist. Die eindeutige Lösbarkeit von (6) erkennt man auf folgende Weise. Aus

$$\sum_{i=1}^{p} B_{ij} u_j = 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{p} u_i \sum_{j=1}^{p} B_{ij} u_j \\ &= u_1^2 W(\xi_1) + u_2^2 W(\xi_2) + \cdots + u_p^2 W(\xi_p) + \text{Rest mit} \quad (\text{Rest} \geq 0) \end{aligned}$$

und somit $u_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$.

Sei nun $u_i = u_i(\xi)$ mit $u_i(\xi) = u_{i+p}(\xi)$ die Lösung von (5).

Wir zeigen

$$\frac{R_{2n}}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} E u_0(\xi) \quad P\text{-fast sicher}$$

Es sei analog zu (3) für $\lambda = 1$

$$\sum_{j=-n+1}^{n} A_{ij}^{(n)} u_j^{(n)} = 1 \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(n)} &= \sum_{l=j}^{n} \sum_{k=-n+1}^{i} w_{k-1,l}, \quad i \le j \\ A_{ji}^{(n)} &= A_{ij}^{(n)}, \quad -n+1 \le i,j \le n \end{aligned}$$

das lineare Gleichungssystem für $u_i^{(n)}$, $i = -n+1, \ldots, n$. Die Lösung $\left(u_i^{(n)}\right)$ führt zum Einheitsstromfluß, der die Thomsonsche Gesamtenergie für die endliche Knotenmenge $\omega = \{-n, \ldots, n\}$ minimiert.

$A^{(n)}$ bzw. A bezeichnen die Koeffizientenmatrizen des endlichen bzw. des unendlichen Systems. Mit $A_n = (A_{ij})$, $-n+1 \le i, j \le n$ bzw. $u_{(n)} = (u_i)$, $-n+1 \le i \le n$ bezeichnen wir endliche Abschnitte von A bzw. u. Es sei $1_n = (1)_{-n+1 \le i \le n}$ und x^T die Transponierte einer Matrix x. Dann ist aufgrund von $A^{(n)}u^{(n)} = 1_n$ die folgende Identität gültig.

$$\begin{aligned} (2n)^{-1} 1_n^T \left(u^{(n)} - u_{(n)}\right) &= (2n)^{-1} \left(u_{(n)}^T \left(1_n - A_n u_{(n)}\right)\right. \\ &+ \left(1_n^T - u_{(n)}^T A_{(n)}\right)\left(u^{(n)} - u_{(n)}\right) \\ &+ u_{(n)}^T \left(A_n - A^{(n)}\right) u^{(n)} \,). \end{aligned} \tag{8}$$

Da $\left|c_{i,i+1}^{(n)}\right| = \left|u_{i+1}^{(n)} w_{i,i+1}\right| = \left|u_{i+1}^{(n)} W(\xi_i)\right| <$ Gesamtstrom $= 1$, folgt

$$\left|u_i^{(n)}\right| \le \max_{i=1,\ldots,p} (W(y_i))^{-1} = c, \quad i = -n+1, \ldots, n$$

und ebenso $\left|u_i\right| < c \quad i = \cdots -1, 0, 1 \ldots$

Aus

$$\left(1_n - A_n u_{(n)}\right)(i) = \sum_{j \le -n, j \ge n+1} A_{ij} u_j, \quad i = -n+1, \ldots, n$$

bekommen wir für die Summe $T_1 + T_2$ der beiden ersten Terme der rechten Seite von (8) die Abschätzung

$$\left|T_1 + T_2\right| \le 2c^2 (2n)^{-1} \sum_{i=-n+1}^{n} \sum_{j \le -n, j \ge n+1} A_{ij}$$

und aus

$$\mathbb{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij} = \mathbb{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{0j} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{E} W(\xi_1 + \cdots + \xi_k) < \infty$$

ergibt sich, daß T_1 und T_2 für $n \to \infty$ verschwinden. Für den dritten Term T_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|T_3\right| &\leq c(2n)^{-1} \sum_{i,j=-n+1}^{n} \left(A_{ij} - A_{ij}^{(n)}\right) \\
&\leq 2c(2n)^{-1} \sum_{i=-n+1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \left(A_{ij} - A_{ij}^{(n)}\right) \\
&\leq 2c(2n)^{-1} \left(\sum_{i=-n+1}^{n} ((n+i)A_{in} + (n-i+1)A_{-n,i}) \right)
\end{aligned}$$

Da aber gilt,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{i=-n+1}^{n} ((n+i)A_{in} + (n-i+1)A_{-n,i}) &\leq \sum_{l=1}^{2n} l \sum_{k=l}^{\infty} k\mathbb{E}W(\xi_0 + \cdots + \xi_k) \\
&\leq 2 \sum_{l=1}^{2n} \sum_{k=l}^{\infty} k^2 \mathbb{E}W(\xi_0 + \cdots + \xi_n)
\end{aligned}$$

verschwindet auch T_3 für $n \to \infty$. Aus (2)

$$R_{2n} = u_{-n+1}^{(n)} + \cdots + u_n^{(n)}$$

folgt aufgrund von (7) und der Ergodizität von (ξ_i) die Behauptung.

Literatur

[1] Bellissard, J., Combe, Ph., Essoh, C. and Sirugue–Collin, M., Convergence of the conductance of an Euclidian random resistors network: a superadditive aproach in Dynamics of complex and irregular systems, ed. Ph. Blanchard, L. Streits, M. Sirugue–Collin and D. Testard, World Scientific, 1993

[2] Chen, Mu Fa, From Markov chains to non–equilibrium particle systems, World Scientific, 1992

[3] Kesten, H., Percolation theory for mathematicians, Birkhäuser, 1982

Recent publications of the Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Preprints 1995

180. Gunther Schmidt: Boundary integral operators for plate bending in domains with corners.

181. Karmeshu, Henri Schurz: Stochastic stability of structures under active control with distributed time delays.

182. Martin Krupa, Bjn Sandstede, Peter Szmolyan: Fast and slow waves in the FitzHugh–Nagumo equation.

183. Alexander P. Korostelev, Vladimir Spokoiny: Exact asymptotics of minimax Bahadur risk in Lipschitz regression.

184. Youngmok Jeon, Ian H. Sloan, Ernst P. Stephan, Johannes Elschner: Discrete qualocation methods for logarithmic–kernel integral equations on a piecewise smooth boundary.

185. Michael S. Ermakov: Asymptotic minimaxity of chi–square tests.

186. Björn Sandstede: Center manifolds for homoclinic solutions.

187. Steven N. Evans, Klaus Fleischmann: Cluster formation in a stepping stone model with continuous, hierarchically structured sites.

188. Sybille Handrock–Meyer: Identifiability of distributed parameters for a class of quasilinear differential equations.

189. James C. Alexander, Manoussos G. Grillakis, Christopher K.R.T. Jones, Björn Sandstede: Stability of pulses on optical fibers with phase–sensitive amplifiers.

190. Wolfgang Härdle, Vladimir G. Spokoiny, Stefan Sperlich: Semiparametric single index versus fixed link function modelling.

191. Oleg Lepskii, Enno Mammen, Vladimir G. Spokoiny: Optimal spatial adaptation to inhomogeneous smoothness: An approach based on kernel estimates with variable bandwidth selectors.

192. William McLean, Siegfried Prößdorf: Boundary element collocation methods using splines with multiple knots.

193. Michael H. Neumann, Rainer von Sachs: Wavelet thresholding in anisotropic function classes and application to adaptive estimation of evolutionary spectra.

194. Gottfried Bruckner, Siegfried Prößdorf, Gennadi Vainikko: Error bounds of discretization methods for boundary integral equations with noisy data.

195. Joachim Förste: Das transversale Feld in einem Halbleiterinjektionslaser.

196. Anatolii Puhalskii, Vladimir G. Spokoiny: On large deviation efficiency in statistical inference.

197. Klaus Fleischmann, Carl Mueller: A super–Brownian motion with a locally infinite catalytic mass.

198. Björn Sandstede: Convergence estimates for the numerical approximation of homoclinic solutions.

199. Olaf Klein: A semidiscrete scheme for a Penrose–Fife system and some Stefan problems in $\mathbb{R}^3$.

200. Hans Babovsky, Grigori N. Milstein: Transport equations with singularity.

201. Elena A. Lyashenko, Lev B. Ryashko: On the regulators with random noises in dynamical block.

202. Sergei Leonov: On the solution of an optimal recovery problem and its applications in nonparametric statistics.

203. Jürgen Fuhrmann: A modular algebraic multilevel method.

204. Rolf Hünlich, Regine Model, Matthias Orlt, Monika Walzel: Inverse problems in optical tomography.

205. Michael H. Neumann: On the effect of estimating the error density in nonparametric deconvolution.

206. Wolfgang Dahmen, Angela Kunoth, Reinhold Schneider: Operator equations, multiscale concepts and complexity.

207. Annegret Glitzky, Konrad Gröger, Rolf Hünlich: Free energy and dissipation rate for reaction diffusion processes of electrically charged species.

208. Jörg Schmeling: A dimension formula for endomorphisms – The Belykh family.