Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Das transversale Feld in einem Halbleiterinjektionslaser

Joachim Förste

submitted: 7th November 1995

Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis
und Stochastik
Mohrenstraße 39
D – 10117 Berlin
Germany

Preprint No. 195
Berlin 1995

Edited by
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)
Mohrenstraße 39
D — 10117 Berlin
Germany

Fax: + 49 30 2044975
e–mail (X.400): c=de;a=d400-gw;p=WIAS-BERLIN;s=preprint
e–mail (Internet): preprint@wias-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung Auf der Grundlage der Maxwellschen Gleichungen wird das Verhalten von TE–Moden in einem Halbleiterinjektionslaser untersucht. Dabei wird in der Ladungsträgerbilanzgleichung die Zeit t nur als Parameter zugelassen. Es ergeben sich Aussagen über die Spektralverteilung der TE-Moden.

Summary The behaviour of TE–modes in a semiconductor injection laser is analysed. In the charge carrier conservation equation the time t is considered as a parameter only. A discussion of the TE–mode spectrum is given.

Резюме Мы исследовали свойства TE мод в полупровожащем инъексионном лазере на базе уравнений Максвелла. В уравнении баланса зарядов время t включенное только как параметр. Достигали результатов о свойствах спектра TE мод.

1. Einleitung

Wenn ein Halbleiter von Licht bestrahlt wird, gelten für das elektromagnetische Feld die Maxwellschen Gleichungen

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = \operatorname{rot} E\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \operatorname{rot} H - (\sigma - g(N))\,E\,, \quad \operatorname{div} D = 4\pi\rho\,, \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Hierbei sind E und H das elektrische und magnetische Feld, D und B die dielektrische Verschiebung und die magnetische Induktion, σ die elektrische Leitfähigkeit und $g(N)$ der optische gain (Verstärkung des Feldes in Gebieten mit Inversion) und ρ und c die Raumladungsdichte und die Lichtgeschwindigkeit. Wie für optische Felder üblich sei $B = H$ und $\rho = 0$. Wir schreiben

$$D = E + 4\pi P$$

mit P als Polarisation. Zwischen P und E gibt es eine materialabhängige Beziehung, mit der der übliche Ansatz $D = \epsilon E$ in Einklang zu bringen ist; ϵ wird dabei im allgemeinen keine konstante Größe sein. x, y, z seien kartesische Koordinaten, deren Ursprung im Halbleitergebiet liegt; e_3 bezeichne den Einheitsvektor in z–Richtung. Wir suchen eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen, bei der das elektrische Feld E die Form einer in z–Richtung fortschreitenden transversalen monochromatischen Welle (TE mode) hat:

$$\begin{aligned} E\,(x,y,z,t) &= \widehat{E}\,(x,y)\cos(kz-\omega t) + \widehat{\widehat{E}}\,(x,y)\sin(kz-\omega t)\,, \\ \widehat{E}\,(x,y)\,e_3 &= \widehat{\widehat{E}}\,(x,y)\,e_3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Problemstellung

Mit $E_1 = \widehat{E}\cos kz$, $E_2 = \widehat{E}\sin kz$, $\widehat{E}_1 = \widehat{\widehat{E}}\sin kz$, $\widehat{E}_2 = \widehat{\widehat{E}}\cos kz$ läßt sich (1) in der Form

$$\begin{aligned} E\,(x,y,z,t) = \Big(E_1(x,y,z) + \widehat{E}_1(x,y,z)\Big)\cos\omega t + \big(E_2(x,y,z) \\ + \widehat{E}_2(x,y,z)\big)\sin\omega t \end{aligned} \tag{2}$$

schreiben. Als Maß für die Intensität des elektrischen Feldes führen wir die Größe

$$s = \frac{1}{2}\left(E_1 + \widehat{E}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(E_2 + \widehat{E}_2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\widehat{E} + \widehat{\widehat{E}}^2\right)$$

ein. Der physikalischen Realität entsprechend postulieren wir zwischen P und E eine Relation der Form

$$P\,(x,y,z,t) = X\,(x,y,z;\omega,s)\,E\,(x,y,z,t)\,.$$

Das Halbleitermaterial setzen wir bezüglich der z–Richtung als achsialsymmetrisch voraus, d.h. wir verlangen

$$X\,(x,y,z;\omega,s) = \widehat{X}\,(r;\omega,s)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Es ist konsequent, davon auszugehen, daß in den TE–Moden $\widehat{E}$ und $\widehat{\widehat{E}}$ ebenfalls nur von r abhängen:

$$\widehat{E}(x,y) = v(r)\, i_\odot, \quad \widehat{\widehat{E}}(x,y) = w(r)\, i_\odot, \quad i_\odot = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right);$$

man hat dann

$$\begin{aligned} E(x,y,z,t) &= [v(r)\cos(kz-\omega t) + w(r)\sin(kz-\omega t)]\, i_\odot, \\ P(x,y,z,t) &= \widehat{X}(r;\omega,s)\,[v(r)\cos(kz-\omega t) + w(r)\sin(kz-\omega t)]\, i_\odot, \\ s &= \frac{1}{2}\left(v(r)^2 + w(r)^2\right). \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit zwischen D und E setzen wir in der Form

$$D(x,y,z,t) = \left\{1 + 4\pi\widehat{X}(r,\omega,s)\right\}\left(g_1^2 - g(N)^2\right) E(x,y,z,t)$$

an. Dabei ist $g(N)$ der aus der Lasertheorie bekannte optische gain und g_1 der Brechungsindex des von äußeren Feldern unbeeinflußten Materials; der gain hängt bei Halbleiterinjektionslasern nur von der Ladungsträgerdichte N ab. Wir setzen $g(N)$ als nichtnegative beschränkte monoton wachsende Funktion voraus. Es existiere ein $N_1 > 0$ mit $g(N) = 0$ für alle $N < N_1$ und $g(N) > 0$ für alle $N > N_1$; es bezeichne g_0 die obere Grenze von $g(N)$, $g_0 < g_1$. Für $N = N(x,y,z)$ besteht eine Bilanzgleichung, N hängt von der Zeit t nicht explizit ab. Wegen

$$\begin{aligned} \text{rot}\, E = {} & k\,[v(r)\sin(kz-\omega t) - w(r)\cos(kz-\omega t)]\, e_r \\ & + \left[\left(v'(r) + \frac{v(r)}{r}\right)\cos(kz-\omega t) + \left(w'(r) + \frac{w(r)}{r}\right)\sin(kz-\omega t)\right] e_r \end{aligned}$$

mit e_r als Einheitsvektor in radialer Richtung ergibt sich das Magnetfeld H aus der Maxwellschen Gleichung $\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot}\, E = 0$ zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}H = {} & -\frac{k}{\omega}\left(v(r)\cos(kz-\omega t) + w(r)\sin(kz-\omega t)\right) e_r \\ & + \frac{1}{\omega}\left(\left(v'(r) + \frac{v(r)}{r}\right)\sin(kz-\omega t) - \left(w'(r) + \frac{w(r)}{r}\right)\cos(kz-\omega t)\right) e_3. \end{aligned}$$

Die in der Maxwellschen Gleichung $\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \text{rot}\, H - (\sigma - g(N))\, E$ auftretenden Ausdrücke haben folgende Gestalt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} &= \left\{1 + 4\pi\widehat{X}(r,\omega,s)\right\}\left(g_1^2 - g(N)^2\right)\frac{\partial E}{\partial t} \\
&= \left\{1 + 4\pi\widehat{X}(r,\omega,s)\right\}\left(g_1^2 - g(N)^2\right)\omega\left[v(r)\sin(kz-\omega t) - w(r)\cos(kz-\omega t)\right] i_\ominus, \\
\operatorname{rot} H &= \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) i_\ominus = -\frac{ck}{\omega}\left[-kv(r)\sin(kz-\omega t) - kw(r)\cos(kz-\omega t)\right] i_\ominus \\
&\quad - \frac{c}{\omega}\left[\left(v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2}\right)\sin(kz-\omega t)\right. \\
&\qquad \left. - \left(w''(r) + \frac{w'(r)}{r} - \frac{w(r)}{r^2}\right)\cos(kz-\omega t)\right] i_\ominus \\
&= -\frac{c}{\omega}\left\{\left[v'' + \frac{v'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2\right)v\right]\sin(kz-\omega t)\right. \\
&\qquad \left. - \left[w'' + \frac{w'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2\right)w\right]\cos(kz-\omega t)\right\} i_\ominus - (\sigma - g(N))\,E \\
&= -(\sigma - g(N))\left[v(r)\cos(kz-\omega t) + w(r)\sin(kz-\omega t)\right] i_\ominus.
\end{aligned}
$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von $\cos(kz-\omega t)$ und von $\sin(kz-\omega t)$ in $\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \operatorname{rot} H - (\sigma - g(N))E$ liefert dann für $v(r)$ und $w(r)$ die Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left[1 + 4\pi\widehat{X}(r,\omega,s)\right]\left(g_1^2 - g(N)^2\right)\omega v(r) = &-\frac{c}{\omega}\left[v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2\right)v(r)\right] \\
&- (\sigma - g(N))w(r),
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left[1 + 4\pi\widehat{X}(r,\omega,s)\right]\left(g_1^2 - g(N)^2\right)\omega w(r) = &\frac{c}{\omega}\left[w''(r) + \frac{w'(r)}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2\right)w(r)\right] \\
&- (\sigma - g(N))v(r).
\end{aligned} \tag{4}
$$

In dem vom Halbleitermaterial eingenommenen räumlichen Gebiet möge G ein Teilgebiet bezeichnen, das ein Intervall der z–Achse enthält. In G gelte die Ladungsträgerbilanzgleichung

$$
D\Delta N - \frac{1}{\tau}N - g(N)\frac{s}{\|s\|} + J = 0, \tag{5}
$$

wobei $D\Delta N$ die Diffusion, $\frac{1}{\tau}N$ spontane Emission, $g(N)\frac{s}{\|s\|}$ stimulierte Emission und J eine Quelldichte beschreibt. In der Praxis der Halbleiterinjektionslaser ist durch eine geeignete Materialwahl dafür gesorgt, daß N nur in einem begrenzten Teilgebiet G des Halbleiters von null verschiedene Werte annimmt. Der Strom J wird in G als Quellverteilung der Ladungsträger interpretiert. Indem man auf dem Rand von G eine homogene Neumannsche Bedingung vorschreibt, trägt man der Tatsache Rechnung, daß die Ladungsträger aus G nicht abfließen können. Wir nehmen an, N hänge explizit nur von r ab, dann hat (5) die Form

$$
\frac{D}{r}(rN'(r))' - \frac{1}{\tau}N(r) - \frac{1}{2\pi}g(N(r))\frac{v(r)^2 + w(r)^2}{\int (v(r)^2 + w(r)^2) r\,dr} + J = 0. \tag{5'}
$$

Es sei $r_0 > 0$ eine gegebene Zahl, welche die Größe des Gebietes G charakterisiert. Von $N(r)$ wird dann verlangt, daß es sich auf $[0, r_0]$ beschränkt verhält und

$$N'(r_0) = 0 \tag{6}$$

gilt. Es ergibt sich dann folgendes

Problem A: Man finde Funktionen $N(r), v(r)$ und $w(r)$, wobei v und w nicht beide identisch verschwinden, die folgenden Bedingungen genügen

i) $v, w, \in C^2((0,\infty)\setminus\{r_1, \dots, r_m\}) \cap C^1(0,\infty),\ N \in H^1(G)$

ii) $v'' + \frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2}v + \left(\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\widehat{X}(r,\omega,s) + \frac{\omega^2}{c^2}\right)(g_1^2 - g(N)^2)\, v - k^2 v = -\omega(\sigma - g(N))w,$

$w'' + \frac{w'}{r} - \frac{1}{r^2}w + \left(\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\widehat{X}(r,\omega,s) + \frac{\omega^2}{c^2}\right)(g_1^2 - g(N)^2)\, w - k^2 w = -\omega(\sigma - g(N))v,$

$\frac{D}{r}(rN')' - \frac{1}{\tau}N - \frac{1}{2\pi}g(N)\frac{v(r)^2+w(r)^2}{\int(v(r)^2+w(r)^2)rdr} + J = 0,$

iii) $\lim\limits_{r\to 0} v(r) = \lim\limits_{r\to 0} w(r) = 0;$

$\lim\limits_{r\to 0} v'(r)$ und $\lim\limits_{r\to 0} w'(r)$ existieren,

$\lim v(r) = \lim w(r) = \lim v'(r) = \lim w'(r) = 0$ für $r \to \infty$

iv) $v, w \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Schwache Formulierung des Problems

Für das Studium von Problem A ist es nützlich, die Funktionen $u(r)$ und $U(r)$ einzuführen, die durch

$$u(r) = r^{\frac{1}{2}}v(r)\ ,\ U(r) = r^{\frac{1}{2}}w(r)$$

definiert werden. Wir zerlegen

$$\widehat{X}(r,\omega,s) = \widehat{X}_{NL}(r,s) + \widehat{X}_L(r)$$

mit $\widehat{X}_L(r) = \lim\limits_{s\to 0}\widehat{X}(r,\omega,s) = \widehat{X}(r,\omega,0)$ und setzen

$$p(r,s) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\widehat{X}_{NL}\left(r, \frac{1}{2}r^{-1}s^2\right)\ ,\ q(r) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left(\widehat{X}_L(r) - \widehat{X}_L(\infty)\right),$$

$\lambda = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}g_1^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right),$

dann geht Problem A über in das äquivalente Problem A': Man finde Funktionen $u(r), U(r)$ und $N(r)$, wobei $u(r)$ und $U(r)$ nicht zugleich identisch verschwinden und die folgenden Bedingungen erfüllt sind

i') $u, U \in C^2((0,\infty)\setminus\{r_1, \dots, r_m\}) \cap C^1(0,\infty), N \in H^1(G),$

ii') $u'' - \frac{3}{4r^2}u + q(r)(g_1^2 - g(N)^2)u + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2)u$

$-\frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)u + \lambda u = -\omega(\sigma - g(N))U,$

$U'' - \frac{3}{4r^2}U + q(r)(g_1^2 - g(N)^2)U + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2)U$

$-\frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)U + \lambda U = \omega(\sigma - g(N))u,$

$\frac{D}{r}(rN')' - \frac{1}{\tau}N - \frac{1}{2\pi r}g(N)\frac{u(r)^2+U(r)^2}{\int(u(r)^2+U(r)^2)dr} + J = 0,$

iii') $\lim_{r\to 0} r^{-\frac{3}{2}}u(r)$ und $\lim_{r\to 0} r^{-\frac{3}{2}}U(r)$ existieren und $\lim_{r\to\infty} r^{-\frac{1}{2}}u(r) = \lim_{r\to\infty} r^{-\frac{1}{2}}U(r) = 0,$

iv') $u \in H^1(0,\infty)$, $U \in H^1(0,\infty)$;

die Zahl λ ist der Bedingung $-\infty < \lambda \leq \frac{\omega^2}{c^2}g_1^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)$ unterworfen.

Wir stellen uns das Ziel, Problem A' durch ein äquivalentes Variationsproblem zu ersetzen, wobei die Randbedingungen in natürlicher Weise berücksichtigt werden.
Definition: λ, u, U, N heißt eine schwache Lösung des Problems A', wenn

$$-\infty < \lambda \leq \frac{\omega^2}{c^2}g_1^2\left\{1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right\},$$

$$\{u,U\} \in H_0^1(0,\infty) \times H_0^1(0,\infty)\backslash\{0,0\}, N \in H^1(G)$$

gilt und

$$\begin{aligned}
\langle u',\varphi'\rangle + \langle U',\Phi'\rangle = \Bigg\langle \Bigg\{ & q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2) \\
& - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right) + \lambda\Bigg\} u, \varphi\Bigg\rangle \\
& + \Bigg\langle\Bigg\{q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2) \\
& - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right) + \lambda\Bigg\} U, \Phi\Bigg\rangle \\
& + \langle\omega(\sigma - g(N))U, \varphi\rangle + \langle -\omega(\sigma - g(N))u, \Phi\rangle,
\end{aligned}$$

$$\left\langle Dr^{-1}(rN')' - \frac{1}{\tau}N - (2\pi r)^{-1}g(N)\frac{u(r)^2 + U(r)^2}{\int_0^\infty (u(r)^2 + U(r)^2)dr} + J, \chi\right\rangle = 0$$

für alle $\varphi, \Phi \in H_0^1(0,\infty), \chi \in H^1(G)$.

Wir unterwerfen $\widehat{X}$ folgenden Voraussetzungen

a) Es gibt m Intervalle $(r_i, r_{i+1}), 0 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_m < r_{m+1} = \infty$, so daß $\widehat{X}(r,s) = \widehat{X}_i(r,s)$ für $r \in [r_i, r_{i+1})$ und $s > 0$ ist, wobei $\widehat{X}_i \in C^1([r_i, r_{i+1}] \times (0,\infty)) \times C([r_i, r_{i+1}] \times [0,\infty))$ gilt.

b) $\left.\frac{\partial\widehat{X}}{\partial r}\right|_{r=0} = 0.$

c) $\widehat{X}(r,s)$ ist für jedes r als Funktion von s nicht fallend.

d) Für $\widehat{X}_L(r) = \lim_{s\to 0}\widehat{X}(r,s)$, $\widehat{X}_S(r) = \lim_{s\to\infty}\widehat{X}(r,s)$ gleichmäßig für alle kompakten Teilmengen von $[0,\infty)$ gilt $0 \le \widehat{X}_L(r) \le \widehat{X}_S(r) < \infty$ für alle $r > 0$, wobei $\widehat{X}_L(\infty)$ und $\widehat{X}_S(\infty)$ existieren und endlich sind.

e) Zu jedem $i = 1,\dots,m$ gibt es ein $\gamma_i > 0$ und eine Funktion $B_i(r) \in C[r_i, r_{i+1}]$ mit $\lim_{s\to 0}\frac{\widehat{X}_i(r,s)-\widehat{X}_i(r,0)}{s^{\gamma_i}} = B_i(r)$ gleichmäßig in $[r_i, r_{i+1}]$, für $r\to\infty$ soll $B_{m+1}(r)$ beschränkt sein. Hängt $\widehat{X}$ stetig von r ab, so sei $m=1$.

Es gilt dann der folgende Satz:
Wenn $\widehat{X}$ die vorstehenden Voraussetzungen erfüllt, ist jede Lösung von Problem A' eine schwache Lösung und umgekehrt.
Beweis: Sei λ, u, U, N eine schwache Lösung. Wegen $u, U \in H_0^1(0,\infty)$ gilt $u, U \in C[0,\infty)$ mit

$$\lim_{r\to 0} r^{-\frac{1}{2}}u(r) = \lim_{r\to 0} r^{-\frac{1}{2}}U(r) = \lim_{r\to\infty} u(r) = \lim_{r\to\infty} U(r) = 0$$

und man sieht, daß $p(r,s)u, p(r,s)U \in L^2(0,\infty)$ und

$$\Big\{q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2) \\ - \frac{\omega^2}{c^2} g(N)^2 \left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right) + \lambda\Big\} u(r) \in L^2(R,\infty),$$

$$\Big\{q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2) \\ - \frac{\omega^2}{c^2} g(N)^2 \left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right) + \lambda\Big\} U(r) \in L^2(R,\infty),$$

für beliebiges $R > 0$ zutrifft. Dann folgt aus der Definition der schwachen Lösung, das $u, U \in H^2(R,\infty)$ ist. Daraus ergibt sich $u, U \in C^1(0,\infty) \cap C^2((0,\infty)\backslash\{r_1,\dots,r_m\})$ und

$$u'' - \frac{3}{4r^2}u + q(r)(g_1^2 - g(N)^2)u + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2)u - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)u \\ + \lambda u = -\omega(\sigma - g(N))U,$$

$$U'' - \frac{3}{4r^2}U + q(r)(g_1^2 - g(N)^2)U + p(r,s)(g_1^2 - g(N)^2)U - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)U \\ + \lambda U = -\omega(\sigma - g(N))u$$

für $r \in (0,\infty)\backslash\{r_1,\dots,r_m\}$ ... $N \in H^1(G)$ und es gilt $\lim_{r\to\infty} u'(r) = \lim_{r\to\infty} U'(r) = 0$.
Indem man ausnutzt, daß $r^{-\frac{1}{2}}$ und $r^{3/2}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $u'' - \frac{3}{4r^2}u = 0$ bilden, zeigt sich, daß auch die Grenzwerte $\lim_{r\to 0} r^{-3/2}u(r)$ und $\lim_{r\to 0} r^{-3/2}U(r)$ existieren.
Damit ist klar, daß λ, u, U, N Lösung des Problems A' ist.

Wenn wir umgekehrt annehmen, λ, u, U, N sei eine Lösung des Problems A', sehen wir, daß $\lim_{r\to 0} u(r) = \lim_{r\to 0} u'(r) = \lim_{r\to 0} U(r), = \lim_{r\to 0} U'(r) = 0$ und $r^{-1}u(r), r^{-1}U(r) \in L^2(0,\infty)$ gilt. Multipliziert man nun die beiden Differentialgleichungen mit beliebigem φ bzw. $\Phi \in H_0^1(0,\infty)$, integriert von 0 bis $R > 0$, wendet auf die Glieder mit den zweiten Ableitungen partielle Integration an und berücksichtigt die obigen Tatsachen, so ergibt sich, daß λ, u, U, N eine schwache Lösung unseres Problems ist.

4. Linearisierungen

Zunächst betrachten wir zwei linearisierte Probleme, wir ersetzen nämlich $\widehat{X}$ durch die Grenzwerte $\widehat{X}_L$ bzw. $\widehat{X}_S$. D.h. wir beschäftigen uns mit den Grenzfällen $s = 0$ und $s = \infty$. Diese linearisierten Eigenwertprobleme untersuchen wir, indem wir geeignete quadratische Formen einführen. Als erstes denken wir $\widehat{X}$ durch $\widehat{X}_L$ ersetzt; es sei als $p = 0$. Wir definieren die bilineare Form

$$\begin{aligned} a(u,U,v,V) = \langle u', v'\rangle - \Big\langle \Big\{ & q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} \\ & - \frac{\omega^2}{c^2} g(N)^2 \left(1 + 4\pi \widehat{X}_L(\infty)\right)\Big\} u(r), v(r) \Big\rangle \\ + \langle U', V'\rangle - \Big\langle \Big\{ & q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} \\ & - \frac{\omega^2}{c^2} g(N)^2 \left(1 + 4\pi \widehat{X}_L(\infty)\right)\Big\} U(r), V(r) \Big\rangle \end{aligned}$$

a ist stetig, nach unten beschränkt und symmetrisch[1] bzgl. H_0^1; a ist in L^2 abgeschlossen. Es läßt sich daher $a(u,U;v,V)$ in eindeutiger Weise ein selbstadjungierter Operator S zuordnen:

$$a(u,U;v,V) = \left\langle \vec{S}(u,U), (v,V)\right\rangle = \langle Su, v\rangle + \langle SU, V\rangle$$

mit $D(S) = \left\{u \in H_0^1 : u'' - \frac{3}{4r^2}u \in L^2(0,\infty)\right\}$,

$$Su = -u'' - \left\{ q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} g(N)^2 \left(1 + 4\pi \widehat{X}_L(\infty)\right)\right\} u.$$

Bezeichnet Λ das Infimum des Spektrums von $\vec{S}$, dann folgt

$$\Lambda = \inf\left\{ \frac{a(u,U,u,U)}{|u|_2^2 + |U|_2^2} : u, U \in H_0^1 \times H_0^1 \backslash \{0,0\}\right\}$$

und das wesentliche Spektrum von $\vec{S}$ liegt im Intervall $[0,\infty)$. In diesem linearen Fall bedeutet die Suche nach Lösungen des Problems A' bzw. nach schwachen Lösungen die Suche nach Eigenwerten von $\vec{S}$. In einem homogenen linearen Material ist $q(r) \equiv 0$, und $\vec{S}$

[1] vgl. [1], S. 78

hat keine Eigenwerte. Andererseits hat $\vec{S}$ wenigstens einen negativen Eigenwert dann und nur dann, wenn es wenigstens ein Paar u, U gibt, für das $a(u, U, u, U) < 0$ ist. Hat man

$$\liminf_{r\to\infty} r^2 q(r) g_1^2 > 1,$$

so besitzt $\vec{S}$ unendlich viele negative Eigenwerte. Wenn $\vec{S}$ negative Eigenwerte hat, gewinnt man für das zugehörige nichtlineare Problem Aussagen über die Existenz schwacher Lösungen, indem man bekannte Sätze über die Bifurkation bei einfachen Eigenwerten anwendet. Das läuft darauf hinaus, daß Lichtwellen, die bei linearer Suszeptibilität den Lichtleiter infolge aufeinander folgender Totalreflexionen passieren, dies auch beim Übergang zu nichtlinearer Suszeptibilität tun.

Wir ersetzen nun $\widehat{X}$ durch $\widehat{X}_S$. Mit $Q(r) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left\{\widehat{X}_S(r) - \widehat{X}_S(\infty)\right\}$ lauten die Differentialgleichungen für $u(r)$ und $U(r)$

$$\begin{aligned} u'' + \left\{Q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2}\right\}u + \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left\{\widehat{X}_S(\infty) - \widehat{X}_L(\infty)\right\}(g_1^2 - g(N)^2)u \\ - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)u + \lambda u = -\omega(\sigma - g(N))U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'' + \left\{Q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2}\right\}U + \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left\{\widehat{X}_S(\infty) - \widehat{X}_L(\infty)\right\}(g_1^2 - g(N)^2)U \\ - \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)U + \lambda U = \omega(\sigma - g(N))u. \end{aligned}$$

Dies führt auf die quadratische Form

$$\begin{aligned} a^\infty(u, U, v, V) = \langle u', v'\rangle - \left\langle\left\{Q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} - \Lambda_e^\infty\right\}u(r), v(r)\right\rangle \\ + \langle U', V'\rangle - \left\langle\left\{Q(r)(g_1^2 - g(N)^2) - \frac{3}{4r^2} - \Lambda_e^\infty\right\}U(r), V(r)\right\rangle \end{aligned}$$

mit

$$\Lambda_e^\infty = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left(\widehat{X}_L(\infty) - \widehat{X}_S(\infty)\right)(g_1^2 - g(N)^2) + \frac{\omega^2}{c^2}g(N)^2\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right) \leq 0.$$

a^∞ ist eine stetige symmetrische Form und man hat

$$a^\infty(u, U, u, U) \geq -\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left\{\sup_{r\geq 0}\widehat{X}_S(r) - \widehat{X}_L(\infty)\right\}\left(|u|_2^2 + |U|_2^2\right).$$

Wenn wir mit Λ^∞ die untere Grenze des Spektrums des von a^∞ erzeugten selbstadjungierten Operators A bezeichnen, folgt

$$\Lambda^\infty = \inf\left\{\frac{a^\infty(u, U, u, U)}{|u|_2^2 + |U|_2^2} : u, U \in H_0^1 \times H_0^1 \backslash\{0, 0\}\right.$$

und das wesentliche Spektrum von A liegt im Intervall $[\Lambda_e^\infty, \infty)$. Aus den über $\widehat{X}$ getroffenen Voraussetzungen ergibt sich

$$-\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left\{\sup_{r\geq 0}\widehat{X}_S(r)-\widehat{X}_L(\infty)\right\}(g_1^2-g(N)^2)\leq\Lambda^\infty\leq\Lambda_e^\infty\leq 0.$$

Es läßt sich dann zeigen, daß es nur zu solchen Zahlen λ Lösungen des Problems A' geben kann, die der Bedingung $\lambda \geq \Lambda^\infty$ genügen. Unter einer geringen Zusatzvoraussetzung an $\widehat{X}(r,s)$ (Hölderstetigkeit bezüglich s bei $s=0$ und Summierbarkeit von $\widehat{X}(r,s)$) kann die Zahl λ nicht positiv sein.

5. Variationsproblem

Wir wenden uns nun dem nichtlinearen Problem zu und definieren zunächst das Funktional $\Phi : H_0^1 \to \mathbb{R}$ vermöge

$$\Phi(s)=\int_0^\infty P(r,s)dr,$$

wobei

$$P(r,s)=\int_0^s p(r,t)t\,dt$$

gesetzt wird. Wir berechnen

$$\begin{aligned}P(r,s)&=\int_0^s p(r,t)t\,dt=\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\int_0^s\widehat{X}_{NL}(r,\frac{1}{2}r^{-1}t^2)t\,dt\\&=\frac{4\pi\omega^2 r}{c^2}\int_0^{\frac{1}{2}r^{-1}s^2}\widehat{X}_{NL}(r,\tau)d\tau=\frac{4\pi\omega^2 r}{c^2}\int_0^{\frac{1}{2}r^{-1}s^2}\widehat{X}(r,\tau)d\tau-\frac{2\pi\omega^2 s^2}{c^2}\widehat{X}_L(r).\end{aligned}$$

Dazu ist an $\widehat{X}_{NL}(r,\tau)=\widehat{X}(r,\tau)-\widehat{X}_L(r)$ zu erinnern. Dann wird

$$\begin{aligned}0\leq\Phi(s)&=\int_0^\infty P(r,s)dr=\int_0^\infty\left\{\frac{4\pi\omega^2 r}{c^2}\int_0^{\frac{1}{2}r^{-1}s^2}\widehat{X}(r,\tau)d\tau-\frac{2\pi\omega^2 s^2}{c^2}\widehat{X}_L(r)\right\}dr\\&\leq\frac{2\pi\omega^2}{c^2}\int_0^\infty\left\{\widehat{X}_S(r)-\widehat{X}_L(r)\right\}s(r)^2dr\\&\leq\frac{2\pi\omega^2}{c^2}\sup_{r\geq 0}\left[\widehat{X}_S(r)-\widehat{X}_L(r)\right](|u|_2^2+|U|_2^2).\end{aligned}$$

Daraus ist

$$\Phi'(s)S=\int_0^\infty p(r,s(r))s(r)S(r)dr\quad\text{für alle}\quad s,S\in H_0^1$$

ablesbar. Setzt man $F(s)(r)=p(r,s(r))s(r)$, dann bildet F von H_0^1 nach L^2 ab, ist beschränkt und stetig und es gilt

$$\Phi'(s)S=\langle F(s),S\rangle\quad\text{für alle}\quad s,S\in H_0^1.$$

Für beliebiges reelles λ definieren wir

$$J_\lambda(u,U)=\frac{1}{2}a(u,U;u,U)-\frac{1}{2}\lambda(|u|_2^2+|U|_2^2)-\Phi(s).$$

Damit läßt sich Problem A' als Variationsaufgabe formulieren. Es gilt nämlich der Satz: Unter den angegebenen Voraussetzungen über $\widehat{X}$ und unter der Beschränkung $-\infty < \lambda \leq \frac{\omega^2}{c^2}\left(g_1^2 - g(N)^2\right)\left(1 + 4\pi\widehat{X}_L(\infty)\right)$ sind die Aussagen

1) λ, u, U, N ist Lösung von Problem A'

2) $u, U \in H_0^1 \times H_0^1 \backslash \{0,0\}$, $J'_\lambda(u,U) = 0$

3) $u, U \in D(\vec{S})$, $\vec{S}(u,U) - F(s) = \lambda(u,U), \quad u, U \neq 0, 0$

äquivalent.
Bei der Suche nach nichttrivialen Lösungen von

$$\vec{S}(u,U) - F(s) = \lambda(u,U) \tag{$*$}$$

ist die Aussage $D(\vec{S}^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(0,\infty) \times H_0^1(0,\infty)$ von Nutzen. Eine entscheidende Rolle beim Studium von $(*)$ spielt die Abschätzung der mit $\vec{S}$ und F verbundenen Energie auf einer Fläche

$$S(d) = \left\{u, U \in H_0^1 \times H_0^1 : |u|_2^2 + |U|_2^2 = d^2\right\}.$$

Dies läuft hinaus auf den Ausdruck

$$m(d) = \inf\left\{\frac{1}{2}a(u,U;u,U) - \Phi(s)\,;\, u, U \in S(d)\right\}$$

Es gilt dann der folgende Satz:
Wenn $\widehat{X}$ bzw. p und q die angegebenen Bedingungen erfüllen, so ist $\frac{m(d)}{d^2}$ eine nirgends wachsende Funktion von $d \in (0,\infty)$ und es gilt

$$\frac{m(d)}{d^2} \geq \frac{1}{2}\Lambda^\infty \quad \text{für alle} \quad d > 0$$

und

$$\lim_{d\to\infty} \frac{m(d)}{d^2} \leq -\frac{2\pi\omega^2}{c^2}\left[\widehat{X}_S(\infty) - \widehat{X}_L(\infty)\right] = \frac{1}{2}\Lambda_e^\infty \leq 0.$$

Literatur

[1] Stuart, C.A., *Self–trapping of electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rat. Mech. and Analysis **113** (1991), 65 – 96.

[2] Stuart, C.A., *Guidance properties of nonlinear planar waveguides*, Arch. Rat. Mech. and Analysis **125** (1993), 145 – 200.

[3] Chow, W.W., Koch, S.W., and Sargent, M., *Semiconductor laser physics*, Springer–Verlag New York Inc. 1994.

[4] Xinfu Chen, Avner Friedman, and Li–Shang Jiang, *Mathematical modeling of semiconductor lasers*, SIAM J. Appl. Math. **53** (1993), 168 – 186.

[5] Stavros Busenberg, Weifu Fang, and Kazufumi Ito, *Modeling and Analysis of laser–beam–induced current images in semiconductors*, SIAM J. Appl. Math. **53** (1993), 187 – 204.

[6] *Mathematical modeling of dielectric waveguides* in A. Friedman (ed.) Mathematics in Industrial Problems, Part 3, Springer–Verlag New York, Inc. 1990.

[7] *Mathematical modeling of semiconductor lasers* in A. Friedman (ed.) Mathematics in Industrial Problems, Part 3, Springer–Verlag New York, Inc. 1990.

Recent publications of the
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Preprints 1995

166. Norbert Hofmann, Peter Mathé: On quasi–Monte Carlo simulation of stochastic differential equations.

167. Henri Schurz: Modelling, analysis and simulation of stochastic innovation diffusion.

168. Annegret Glitzky, Rolf Hünlich: Energetic estimates and asymptotics for electro–reaction–diffusion systems.

169. Pierluigi Colli, Jürgen Sprekels: Remarks on the existence for the one–dimensional Frémond model of shape memory alloys.

170. Klaus R. Schneider, Adelaida B. Vasil'eva: On the existence of transition layers of spike type in reaction–diffusion–convection equations.

171. Nikolaus Bubner: Landau–Ginzburg model for a deformation–driven experiment on shape memory alloys.

172. Reiner Lauterbach: Symmetry breaking in dynamical systems.

173. Reiner Lauterbach, Stanislaus Maier–Paape: Heteroclinic cycles for reaction diffusion systems by forced symmetry–breaking.

174. Michael Nussbaum: Asymptotic equivalence of density estimation and Gaussian white noise.

175. Alexander A. Gushchin: On efficiency bounds for estimating the offspring mean in a branching process.

176. Vladimir G. Spokoiny: Adaptive hypothesis testing using wavelets.

177. Vladimir Maz'ya, Gunther Schmidt: "Approximate approximations" and the cubature of potentials.

178. Sergey V. Nepomnyaschikh: Preconditioning operators on unstructured grids.

179. Hans Babovsky: Discretization and numerical schemes for stationary kinetic model equations.

180. Gunther Schmidt: Boundary integral operators for plate bending in domains with corners.

181. Karmeshu, Henri Schurz: Stochastic stability of structures under active control with distributed time delays.

182. Martin Krupa, Björn Sandstede, Peter Szmolyan: Fast and slow waves in the FitzHugh–Nagumo equation.

183. Alexander P. Korostelev, Vladimir Spokoiny: Exact asymptotics of minimax Bahadur risk in Lipschitz regression.

184. Youngmok Jeon, Ian H. Sloan, Ernst P. Stephan, Johannes Elschner: Discrete qualocation methods for logarithmic–kernel integral equations on a piecewise smooth boundary.

185. Michael S. Ermakov: Asymptotic minimaxity of chi–square tests.

186. Björn Sandstede: Center manifolds for homoclinic solutions.

187. Steven N. Evans, Klaus Fleischmann: Cluster formation in a stepping stone model with continuous, hierarchically structured sites.

188. Sybille Handrock–Meyer: Identifiability of distributed parameters for a class of quasilinear differential equations.

189. James C. Alexander, Manoussos G. Grillakis, Christopher K.R.T. Jones, Björn Sandstede: Stability of pulses on optical fibers with phase–sensitive amplifiers.

190. Wolfgang Härdle, Vladimir G. Spokoiny, Stefan Sperlich: Semiparametric single index versus fixed link function modelling.

191. Oleg Lepskii, Enno Mammen, Vladimir G. Spokoiny: Optimal spatial adaptation to inhomogeneous smoothness: An approach based on kernel estimates with variable bandwidth selectors.

192. William McLean, Siegfried Prößdorf: Boundary element collocation methods using splines with multiple knots.

193. Michael H. Neumann, Rainer von Sachs: Wavelet thresholding in anisotropic function classes and application to adaptive estimation of evolutionary spectra.

194. Gottfried Bruckner, Siegfried Prößdorf, Gennadi Vainikko: Error bounds of discretization methods for boundary integral equations with noisy data.