

# Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

## Zum Einfluß der Wärmeleitung und der Ladungsträgerdiffusion auf das Verhalten eines Halbleiterlasers

Joachim Förste

submitted: 13th September 1994

Weierstraß–Institut  
für Angewandte Analysis  
und Stochastik  
Mohrenstraße 39  
D – 10117 Berlin  
Germany  
e-mail: foerste@iaas-berlin.d400.de

Preprint No. 117  
Berlin 1994

---

*1991 Mathematics Subject Classification.* 35Q60, 78A60.

*Key words and phrases.* Diffusion, Stabilität, Wärmeleitung, Laser.

Edited by  
Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)  
Mohrenstraße 39  
D — 10117 Berlin  
Germany

Fax: + 49 30 2004975  
e-mail (X.400): c=de;a=d400;p=iaas-berlin;s=preprint  
e-mail (Internet): preprint@iaas-berlin.d400.de

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Grundgleichungen	1
3. Eindimensionales Modell	3
4. Instationäres Problem für $p$	6
5. Stationäres Problem für $p$	8
6. Instationäres Problem für $T$	9
7. Beziehung zwischen stationärem und instationärem Problem	10
Literatur	11

### ZUSAMMENFASSUNG.

Bekanntlich wird eine katastrophenartige Schädigung von  $Ga_xAl_{1-x}As$  Doppelheterostrukturlasern durch Überhitzung herbeigeführt, deren Ursache eine hohe nichtradiative Rekombinationsrate an der Spiegelfacette ist. Auf der Grundlage zweidimensionaler Bilanzgleichungen wird der Einfluß der lateralen Diffusion diskutiert.

### SUMMARY.

It is well known that the catastrophic degradation of  $Ga_xAl_{1-x}As$  DH lasers is caused by the thermal runaway that occurs when the nonradiative recombination rate at the mirror facets is very high. The effects of lateral diffusion are determined on the basis of twodimensional balance equations.

### РЕЗЮМЕ.

Хорошо известно что катастрофическое нарушение  $Ga_xAl_{1-x}As$  лазера составляет когда потепление, создано рекомбинацией, высоко. На базе двухмерных уравнений баланса исследовано влияние боковой диффузии.



## 1. EINLEITUNG

Wir betrachten einen *DH* (double heterostructure) Halbleiterlaser, der aus  $Al_xGa_{1-x}As$  besteht. Bekanntlich kann sich ein solcher Laser infolge Überhitzung zersetzen. Dies tritt ein, wenn an der Spiegelfacette der nicht durch Strahlung bedingte Rekombinationsanteil hoch ist (vgl. [2], [4], [1]).

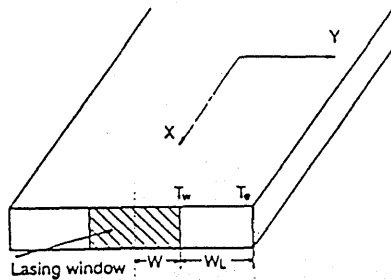
Man möchte wissen, unter welchen Bedingungen eine katastrophenartige Schädigung des Spiegels eintritt. Das Ziel besteht darin, die Lebensdauer des Lasers möglichst zu verlängern, indem man seine geometrische Gestalt, seine physikalischen Eigenschaften und seine Betriebsbedingungen geeignet wählt. Um mathematisch zu beschreiben, was in einem derartigen Halbleiterlaser vor sich geht, zieht man eine Bilanzgleichung für die Ladungsträger und die Wärmeleitungsgleichung heran (vgl. [3]). In der Vergangenheit hat man zunächst versucht, die Vorgänge mit räumlich eindimensionalen Gleichungen zu beschreiben (vgl. [5]). Damit man den Einfluß der lateralen Diffusion erfassen kann, ist aber ein wenigstens zweidimensionales Modell erforderlich. Andernfalls kann man keine Aussagen über den Einfluß der lateralen Abmessungen auf die Lebensdauer des Lasers erwarten.

## 2. GRUNDGLEICHUNGEN

Das kartesische  $XY$ -Koordinatensystem liege so, daß die  $X$ -Achse in Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls zeigt und die  $Y$ -Achse senkrecht dazu in der aktiven Zone (vgl. Skizze 1). Für die Ladungsträgerdichte  $p(X, Y, t)$  hat man (vgl. [2])

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \right) - (g - \alpha)S(1 + R) \quad (1)$$

$$-L \leq X \leq L, \quad -W \leq Y \leq W, \quad t > 0.$$



Skizze 1: Geometrie eines Doppel-Heterostruktur-Lasers

Dabei bezeichnet  $D$  den effektiven Diffusionskoeffizienten, für den

$$D^{-1} = \frac{1}{2} (D_e^{-1} + D_h^{-1})$$

gilt und  $e$  für Elektronen und  $h$  für Löcher steht.  $g$  sei der gain,  $\alpha$  der Absorptionskoeffizient,  $S$  die Laserflußdichte in der aktiven Schicht und  $R$  das Reflexionsvermögen

des Spiegels. In der Laserpraxis ist  $g - \alpha$  eine monoton wachsende beschränkte Funktion von  $p$  derart, daß  $\inf (g - \alpha) = -\alpha < 0$  und  $\sup (g - \alpha) = g_0 > 0$  ist. Es existiere also ein  $p = p_0$  mit der Eigenschaft  $g - \alpha > 0$  für alle  $p > p_0$ .

$\frac{\partial(g-\alpha)}{\partial p}$  soll existieren und beschränkt sein:  $\left| \frac{\partial(g-\alpha)}{\partial p} \right| \leq g'_0$ .

Die Wärmeleitungsgleichung schreibt man in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + J_{th} V_j + m \rho_c J^2 - \frac{1}{\rho C_p h} \frac{K_r (T - T_c)}{H}. \quad (2)$$

Dabei ist  $T$  die absolute Temperatur,  $K$  die Wärmeleitfähigkeit und  $h$  die Dicke der aktiven Schicht.  $T_c$  bezeichnet die Temperatur der Wärmesenke und  $K_r$  die Wärmeleitfähigkeit einer Bezugsschicht.  $H$  heißt Wirklänge und ist durch

$$H = K_r \sum_i \frac{Z_i}{H_i}$$

definiert, dabei ist  $Z_i$  die Dicke der  $i$ -ten Schicht zwischen der aktiven Schicht und der Wärmesenke. Der letzte Term in (2) beschreibt also den Wärmeübergang von der aktiven Schicht auf die Wärmesenke.  $J_{th}$  steht für die nichtradiative Rekombination im aktiven Bereich und  $V_j$  für die der Laserenergie der Photonen proportionale Berührungsspannung;  $m \rho_c J^2$  ist die Joulesche Wärme am Ohmschen Kontakt. Es wird angenommen, daß der gesamte Injektionsstrom unterhalb des Schwellwertes in der aktiven Zone in Wärme umgewandelt wird:  $J_{te} = J_{th} + (1 - \eta_d)(J - J_{th})$ .

Dabei bezeichnet  $J_{th}$  den Schwellstrom und  $\eta_d$  die äußere Quantendifferenzialeffizienz (external differential quantum efficiency). Uns interessieren Lösungen von (1), (2), die folgenden Randbedingungen unterworfen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0 \text{ für } X = 0, \quad D \frac{\partial p}{\partial X} = -V_0 p \text{ für } X = L, \\ \frac{\partial Y}{\partial T} &= 0 \text{ für } Y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \text{ für } Y = W, \end{aligned} \quad (3)$$

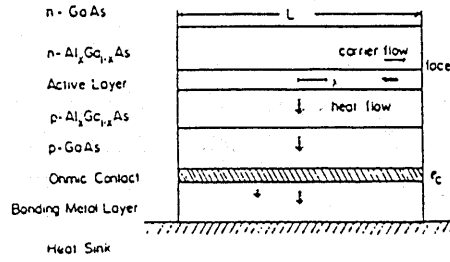
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial X} &= 0 \text{ für } X = 0, \quad K \frac{\partial T}{\partial X} = V_0 p \text{ für } X = L, \\ \frac{\partial T}{\partial Y} &= 0 \text{ für } Y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = -\frac{T - T_e}{W_L} \text{ für } Y = W. \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei bezeichnet  $V_0$  die Rekombinationsgeschwindigkeit, soweit sie nicht durch Strahlung verursacht ist.  $W_L$  bezeichnet die halbe Differenz zwischen der Breite des Halbleiterkörpers und der aktiven Zone (siehe Skizze 2),  $T_e$  ist die Temperatur bei  $Y = W + W_L$  und kann als gegeben (einer Messung zugänglich) angesehen werden. Zur Festlegung der Funktionen  $p(X, Y, t)$  und  $T(X, Y, t)$  sind außerdem Anfangsbedingungen zu stellen; wir verlangen

$$p(X, Y, 0) = \tilde{p}(X, Y), \quad (5)$$

$$T(X, Y, 0) = \tilde{T}(X, Y), \quad (6)$$

wobei  $\tilde{p}$  und  $\tilde{T}$  für  $0 \leq X \leq L$ ,  $0 \leq Y \leq W$  definiert sind und die gleichen Randbedingungen wie  $p$  und  $T$  erfüllen.



Skizze 2: Typische Struktur eines DH-Halbleiterlasers

### 3. EINDIMENSIONALES MODELL

Es wurde der Versuch unternommen, dieses zweidimensionale Modell in der Weise auf ein eindimensionales zu reduzieren, daß der Einfluß der lateralen Abmessung Berücksichtigung findet. Dazu werden dimensionslose Größen eingeführt.

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{W}, \quad \gamma = \frac{L}{W}, \quad \gamma_w = \frac{Wh_f}{K + W_L h_f}, \quad \Theta = \frac{Dt}{L^2}$$

$$w = \frac{p}{p_L}, \quad u = \frac{T}{T_c}, \quad \bar{u} = u|_{x=1}, \quad \tilde{u} = u|_{x=0}, \quad u_a = \frac{T_a}{T_c},$$

$$\phi^2 = \frac{L^2 S(1+R)\alpha_0}{Dp_L}, \quad \mu^2 = \frac{L^2 K_r}{HhK}, \quad Le = \frac{D\rho C_p}{K},$$

$$k_1 = \frac{V_0 L}{D}, \quad k_2 = \frac{LV_0 p_L}{KT_c}.$$

Falls man für den gain der Einfachheit halber eine quadratische Abhängigkeit von  $p$  annimmt und in der Wärmeleitungsgleichung die äußeren Einflüsse fortläßt, nehmen (1) und (2) die Gestalt

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \phi^2 (w^2 - 1) e^{14(u - \bar{u})}, \quad (7)$$

$$Le \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu^2 (u - 1) \quad (8)$$

an (vgl. [3]) und die Randbedingungen (3) und (4) erhalten das Aussehen

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \text{ für } x = 0, & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \text{ für } y = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= -k_1 w \text{ für } x = 1, & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \text{ für } y = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ für } x = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ für } y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= k_2 w \text{ für } x = 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\gamma_w(u - u_a) \text{ für } y = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Das Gleichungssystem läßt sich beträchtlich vereinfachen, wenn man annimmt, die Überhitzung setze in der Mitte der Spiegelfacetten ein. Diese Annahme besagt, die höchste Temperatur sei bei  $y = 0$  zu erwarten. Dann approximiert man das  $y$ -Profil von  $u$  in der Form

$$u(x, y, \Theta) = u_0(x, \Theta) + u_1(x, \Theta)y^2$$

Man erhält dann mit Rücksicht auf die Randbedingungen

$$u(x, y, \Theta) = u_0(x, \Theta) + [u_w(x, \Theta) - u_0(x, \Theta)]y^2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = 2(u_w - u_0) = -\gamma_w(u_w - u_a)$$

also

$$u_w = \frac{2u_0 + \gamma_w u_a}{2\gamma_w}$$

und es ergibt sich

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 2(u_w - u_0) = -\frac{2\gamma_w}{2 + \gamma_w}(u_0 - u_a).$$

Auf diese Weise erhält man für  $u_0$  die vereinfachte Differentialgleichung

$$Le \frac{\partial u_0}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma^2 \gamma_w}{2 + \gamma_w} u_0 - \mu^2(u_0 - 1) + \frac{2\gamma^2 \gamma_w}{2 + \gamma_w} u_a. \quad (11)$$

Das  $y$ -Profil von  $w$  approximiert man durch

$$w(x, y, \Theta) = w_0(x, \Theta) + w_1(x, \Theta)y^2 + w_2(x, \Theta)y^4, \quad (12)$$

wobei man in  $y$  ein Polynom vierten Grades wählt, damit man alle Randbedingungen von  $w$  erfüllen kann. Mit  $w_0 = w(x, 0, \Theta)$ ,  $w_w = w(x, 1, \Theta)$  nimmt (12) die Gestalt

$$\begin{aligned} w(x, y, \Theta) &= w_0(x, \Theta) + \frac{2}{3}(w_w(x, \Theta) - w_0(x, \Theta))y^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}(w_w(x, \Theta) - w_0(x, \Theta))y^4 \end{aligned}$$

an. Dabei wurden für  $w_w$  und  $w_0$  die Randbedingungen benutzt. Die Differentialgleichung (7) kann dann ersetzt werden durch eine Differentialgleichung für  $w_0$  (bei  $y = 0$ ) und eine zweite für  $w_w$  (bei  $y = 1$ ). Für die praktische Rechnung führt man eine weitere Vereinfachung ein: man ersetzt näherungsweise  $w_w = \frac{w_0}{3}$ . Diese



Annahme steht in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Differentialgleichung für  $w_w$  läßt man dann weg. Man kommt so auf die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial w_0}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{8}{9} \gamma^2 w_0 - \phi^2 (w_0^2 - 1) e^{14(\bar{u}_0 - \bar{u}_0)}, \quad (13)$$

$$Le \frac{\partial u_0}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma^2 \gamma_w}{2 + \gamma_w} u_0 - \mu^2 (u_0 - 1) + \frac{2\gamma^2 \gamma_w}{2 + \gamma_w} u_a \quad (14)$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = -k_1 w_0 \text{ für } x = 1,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = k_2 w_0 \text{ für } x = 1$$

und hat damit ein eindimensionales Modell, das aber die laterale Diffusion berücksichtigt. Um nun ein Überhitzungskriterium zu erhalten, wird eine Störung des stationären Zustands eingeführt:

$$u_0 = u_s + \epsilon u_1, \quad (15)$$

$$w_0 = w_s + \epsilon w_1, \quad (16)$$

wobei der Index  $s$  den stationären Zustand kennzeichnet,  $\epsilon$  ein kleiner Parameter ist und der Index  $1$  für den gestörten Zustand steht. Man setzt

$$u_1(x, \Theta) = U(x) e^{\lambda \Theta}, \quad w_1(x, \Theta) = W(x) e^{\lambda \Theta}$$

und geht dann mit (15), (16) in (13), (14) ein. Dies liefert für  $U$  und  $W$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = (\lambda Le + \mu^2 + B_1) U, \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = \left( \lambda + \frac{8}{9} \gamma^2 + \phi^2 \alpha \right) W + \phi^2 \beta (\bar{U} - \bar{U})$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dW}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \quad \frac{dU}{dx} = k_2 W, \quad \frac{dW}{dx} = -k_1 W \text{ für } x = 1.$$

Dies führt auf eine Eigenwertgleichung

$$F_1(\lambda) = F_2(\lambda) \text{ mit } F_1(\lambda) = AB, \quad F_2(\lambda) = -\frac{k^2 \phi^2 \beta}{A} - k_1 B,$$

$$A = \left( \lambda + \phi^2 \alpha + \frac{8}{9} \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = \left( \lambda Le + \mu^2 + \frac{2\gamma^2 \gamma_w}{2 + \gamma_w} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Auswertung der Eigenwertgleichung liefert ein notwendiges Kriterium für die Instabilität des Vorganges. Eine katastrophale Überhitzung kann nämlich höchstens dann eintreten, wenn  $\lambda$  einen positiven Realteil hat.

Im folgenden wird sich zeigen, daß man auch ohne den neuerlichen Übergang vom zweidimensionalen auf ein (verbessertes) eindimensionales Modell, der mit zusätzlichen Annahmen verbunden ist, eine Aussage über den Zusammenhang zwischen stationärem und instationärem Vorgang treffen kann. Unsere Frage lautet: Unter welchen Bedingungen strebt eine instationäre Lösung für große  $t$  gegen die Lösung des stationären Problems? Dabei wird sich allerdings nur eine hinreichende Bedingung für die Stabilität des Vorganges ergeben.

#### 4. INSTATIONÄRES PROBLEM FÜR $p$

Das Anfangs-Randwertproblem (1), (3), (5) kann zunächst unabhängig von den übrigen Gleichungen betrachtet werden. Zur Lösung dieses Problems setzen wir das Galerkinverfahren an:

$$p_n(X, Y, t) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu(t) \varphi_\nu(X, Y). \quad (17)$$

Dabei sei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  ein in  $L^2$  orthonormiertes vollständiges Fundamentalsystem. (Ein geeignetes die Randbedingungen erfüllendes System ist z.B.  $\cos \lambda_i X \cos \mu_k Y$ , wobei  $\lambda_i$  die Wurzeln der Gleichung  $\frac{D}{V_0} \lambda = \cot \lambda$  und  $\mu_k = \frac{k\pi}{W}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  ist.) Geht man mit dem Ansatz (17) in (1) ein, so ergibt sich das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(p_{nt} + (g(p_n) - \alpha) S(1 + R), \varphi_\nu) - D(\Delta p_n, \varphi_\nu) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n \quad (18)$$

für die Funktionen  $a_\nu(t)$ . Setzt man  $\varphi_1(X, Y) = \check{p}(X, Y)$ , so hat man die Anfangsbedingungen

$$a_\nu(0) = \delta_{1\nu} \quad (19)$$

zu stellen. Wegen der Orthonormiertheit der  $\varphi_\nu$  ist dann

$$\|p_n\|^2 = \sum_{\nu=1}^n a_\nu^2(t). \quad (20)$$

Den Ausdruck  $(\Delta p_n, \varphi_\nu)$  in (18) formen wir mit Hilfe der Randbedingungen wie folgt um:

$$\begin{aligned} (\Delta p_n, \varphi_\nu) &= \int_0^W \int_0^L \left( \frac{\partial^2 p_n}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial Y^2} \right) \varphi_\nu dX dY = \\ &= - \int_0^W \int_0^L \frac{\partial p_n}{\partial X} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial X} dX dY - V_0 \int_0^W p_n \varphi_\nu |_{x=L} dY \\ &= - \int_0^W \int_0^L \frac{\partial p_n}{\partial Y} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial Y} dX dY = \\ &= - (\text{grad } p_n, \text{grad } \varphi_\nu) - V_0 \int_0^W p_n \varphi_\nu |_{x=L} dY. \end{aligned} \quad (21)$$

Um die Lösbarkeit von (18), (19) für beliebiges  $n$  zu sichern, reicht es aus nachzuweisen, daß alle  $a_\nu$  für endliches  $t$  endlich sind. Wegen (20) und der über  $g(p)$  getroffenen Voraussetzungen braucht man nur zu zeigen, daß  $\|p_n\|$  für endliches  $t$

endlich ist. Um dies zu beweisen, multiplizieren wir (18) mit  $a_\nu(t)$  und summieren über  $\nu$  von 1 bis  $n$ . Dies liefert

$$\begin{aligned} (p_{nt}, p_n) + ((g(p_n) - \alpha)S(1 + R), p_n) + D \|\text{grad } p_n\|^2 + \\ + V_0 \int_0^W p_n^2|_{X=L} dY = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Man hat für beliebiges  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} |(g(p_n), p_n)| &\leq \frac{\epsilon}{2} \|p_n\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^W \int_0^L g(p_n)^2 dX dY \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|p_n\|^2 + \frac{LW}{2\epsilon} g_0^2, \end{aligned}$$

wobei  $g_0$  die obere Grenze von  $g$  bezeichnet. Daher gewinnt man aus (22) eine Ungleichung der Form

$$\frac{d}{dt} \|p_n\|^2 \leq A + B \|p_n\|^2 \quad (23)$$

mit positivem  $A$  und  $B$ , aus der für  $p_n$  die a priori Abschätzung

$$\|p_n\|^2 \leq e^{\int_0^t B dt} \left( \|\tilde{p}\|^2 + \int_0^t A dt \right) \quad (24)$$

folgt. Es interessiert die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die Folge der Näherungslösungen bei unbegrenzt wachsendem  $n$  konvergiert und gegen eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems (1), (3), (5) strebt. Um die Konvergenzfrage zu untersuchen, benötigen wir weitere in  $n$  gleichmäßige a priori Abschätzungen der Näherungslösung. Mit (24) folgt aus (22)

$$\int_0^t \left\{ \|\text{grad } p_n\|^2 + V_0 \int_0^W p_n^2 dY \right\} dt \leq C e^{\int_0^t B dt} \left\{ \|\tilde{p}\|^2 + \int_0^t A dt \right\}.$$

Indem man (18) nach der Zeit differenziert und nach Multiplikation mit  $\frac{da_\nu}{dt}$  über  $\nu$  summiert, bekommt man Abschätzungen für  $\|p_{nt}\|^2$  und

$$\int_0^t \left\{ \|\text{grad } p_{nt}\|^2 + V_0 \|p_{nt}\|_{L^2(0,W)}^2 \right\} dt.$$

Dabei macht man Gebrauch von der Beschränktheit der Ableitung  $g'(p)$  und davon, daß sich die Anfangswerte von  $p_{nt}$  mit Hilfe von (1) bestimmen lassen. Infolge der in  $n$  gleichmäßigen a priori Abschätzungen der Galerkinschen Näherungslösungen läßt sich aus der Folge  $\{p_n\}$  eine Teilfolge  $\{p_{n_k}\}$  so auswählen, daß  $\{p_{n_k}\}$  und  $\{p_{n_k t}\}$  in  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = (0, L) \times (0, W)$  bzw.  $\{\text{grad } p_{n_k}\}$  und  $\{\text{grad } p_{n_k t}\}$  in  $L^2(Q_T)$ ,  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  für beliebiges  $T > 0$  gegen Grenzfunktionen  $p$  und  $p_t$  bzw.  $\text{grad } p$  und  $\text{grad } p_t$  schwach konvergieren. Es gilt der *Satz*: Sind die Anfangsdaten und ihre ersten Ableitungen quadratisch integrierbar und ist der Rand so beschaffen, daß man den Gaußschen Satz anwenden kann, so hat das Rand-Anfangswertproblem (1), (3), (5) eine Lösung, für die die gleichen a priori Abschätzungen gelten, wie für die Galerkinschen Näherungen.

*Beweis.* Wegen der unter den genannten Voraussetzungen gültigen Abschätzungen (24) f. ist die Folge der Galerkinschen Näherungen nebst ihren in diesen

Abschätzungen auftretenden Ableitungen in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(Q_T)$  schwach kompakt. Daher existieren konvergente Teilfolgen. Für die Grenzfunktion  $p(X, Y, t)$  gelten die gleichen a priori Abschätzungen wie für die Näherungslösungen. Man verifiziert, daß die Grenzfunktion Lösung des Rand-Anfangswertproblems ist.

### 5. STATIONÄRES PROBLEM FÜR $p$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$D \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \right\} - (g - \alpha)S(1 + R) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{K}{\rho C_p} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right\} - \frac{1}{\rho C_p h} \frac{K_r(T - T_c)}{H} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial X} = 0 \text{ für } X = 0, \quad D \frac{\partial p}{\partial X} = -V_0 p \text{ für } X = L, \quad (27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \text{ für } Y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \text{ für } Y = W,$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \text{ für } X = 0, \quad K \frac{\partial T}{\partial X} = V_0 p \text{ für } X = L, \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \text{ für } Y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = -\frac{T - T_c}{W_L} \text{ für } Y = W.$$

In

$$((g(p) - \alpha)S(1 + R), \phi) - D(\Delta p, \phi) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{\rho C_p h} \left( \frac{K_r(T - T_c)}{H}, \varphi \right) - \frac{K}{\rho C_p} (\Delta T, \varphi) = 0 \quad (30)$$

für beliebiges  $\phi \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi \in W_2^1(\Omega)$  werden  $p$  und  $T$  dann als Elemente dieser Hilberträume gesucht; man benutzt zum Existenznachweis einer Lösung das Fixpunktprinzip. Auch im stationären Fall kann (25), (27) unabhängig von den übrigen Gleichungen betrachtet werden. Indem wir von

$$D(\Delta p, \phi) = -D(\text{grad } p, \text{grad } \phi) - V_0 \int_0^W p\phi|_{X=L} dY$$

Gebrauch machen, haben wir

$$((g(p) - \alpha)S(1 + R), \phi) + D(\text{grad } p, \text{grad } \phi) + V_0 \int_0^W p\phi|_{X=L} dY = 0.$$

Für  $\phi = p$  erhalten wir daraus

$$D\|\text{grad } p\|^2 + V_0\|p\|_{L^2(0,W)}^2 = -((g(p) - \alpha)S(1 + R), p).$$

Die rechte Seite läßt sich abschätzen, wir erhalten

$$D\|\text{grad } p\|^2 + V_0\|p\|_{L^2(0,W)}^2 \leq (g_0 + \alpha)S(1 + R)\|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da der durch  $g$  definierte Operator vollstetig ist, reicht es nach einer Folgerung aus dem Leray-Schauderschen Fixpunktsatz aus nachzuweisen, daß mögliche Lösungen gleichmäßig beschränkt sind. Die Annahme unbeschränkter Lösungen kann mit Hilfe der vorstehenden Ungleichung leicht zum Widerspruch geführt werden. Um die Frage zu klären, unter welchen Bedingungen die Lösung des stationären Problems eindeutig bestimmt ist, nehmen wir an,  $p^*$  und  $p^{**}$  seien verschiedene Lösungen des Randwertproblems (25), (27). Wir setzen  $p = p^* - p^{**}$ ; durch Subtraktion kommen wir auf

$$D\|\text{grad } p\|^2 + V_0\|p\|_{L^2(0,W)}^2 = -((g(p^*) - g(p^{**}))S(1+R), p) =: \omega.$$

Wegen  $|\omega| \leq S(1+R)g'_0\|p\|^2 \leq S(1+R)g'_0C_\Omega\|\text{grad } p\|^2$  kann es für

$$S(1+R)g'_0C_\Omega < D \quad (31)$$

nur eine Lösung geben (hinreichende Bedingung).

## 6. INSTATIONÄRES PROBLEM FÜR $T$

Nachdem nun  $p$  als bekannt gelten kann, wenden wir uns  $T$  zu. Das Rand-Anfangswertproblem (2), (4), (6) kann ebenfalls mit dem Galerkinverfahren behandelt werden. Man benötigt zunächst eine Funktion  $\vartheta(X, Y, t)$ , welche die inhomogenen Randbedingungen erfüllt. Setzt man dann

$$T(X, Y, t) = \vartheta(X, Y, t) + \tau(X, Y, t),$$

so muß man verlangen, daß  $\tau(X, Y, t)$  die zugehörigen homogenen Randbedingungen erfüllt. Nach Wahl eines geeigneten  $\vartheta(X, Y, t)$  kann also zur Bestimmung von  $\tau(X, Y, t)$  das Galerkinverfahren dienen. Die Näherungslösung setzen wir in der Form

$$\tau_n(X, Y, t) = \sum_{\nu=1}^n b_\nu(t)\psi_\nu(X, Y) \quad (32)$$

an; dabei seien die  $\psi_\nu, \nu = 1, 2, \dots$  ein vollständiges in  $L^2$  orthonormiertes Fundamentalsystem. Gehen wir mit (32) in (2) ein, so ergibt sich das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\left( T_{nt} + \frac{1}{\rho C_p h} \frac{K_r(T_n - T_0)}{H}, \psi_\nu \right) - \frac{K}{\rho C_p} (\Delta T_n, \psi_\nu) - (J_{te} V_j + m \rho_c J^2, \psi_\nu) = 0, \quad (33)$$

dabei ist  $T_n = \vartheta + \tau_n$  und gesucht sind die  $b_\nu(t), \nu = 1, 2, \dots$ . Setzt man  $\psi_1(X, Y) = \tilde{\tau}(X, Y) = \tilde{T}(X, Y) - \vartheta(X, Y, 0)$ , so hat man dazu die Anfangsbedingungen

$$b_\nu(0) = \delta_{1\nu} \quad (34)$$

zu stellen. Wegen der Orthonormiertheit der  $\psi_\nu$  gilt

$$\|\tau_n\|^2 = \sum_{\nu=1}^n b_\nu^2(t).$$

Den Ausdruck  $(\Delta T_n \psi_\nu)$  in (33) formen wir unter Berücksichtigung der Randbedingungen um:

$$\begin{aligned} (\Delta T_n, \psi_\nu) = & -(\text{grad } T_n, \text{grad } \psi_\nu) + \frac{V_0}{K} \int_0^W p \psi_\nu|_{X=L} dY \\ & - \frac{1}{W_L} \int_0^L (T_n - T_c) \psi_\nu|_{Y=W} dX. \end{aligned}$$

Indem wir dies in (33) berücksichtigen, mit  $b_\nu(t)$  multiplizieren und über  $\nu$  von 1 bis  $n$  summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} (T_{nt}, \tau_n) + \frac{1}{\rho C_p h} \frac{K_r}{H} (T_n, \tau_n) - \frac{1}{\rho C_p h} (T_c, \tau_n) + \frac{K}{\rho C_p} (\text{grad } T_n, \text{grad } \tau_n) + \\ \frac{K}{\rho C_p} \left\{ \frac{1}{W_L} \int_0^L T_n \tau_n|_{Y=W} dX - \frac{1}{W} \int_0^L T_c \tau_n|_{Y=W} dX - \frac{V_0}{K} \int_0^W p \tau_n|_{X=L} dY \right\} \quad (35) \\ - (J_{te} V_j + m \rho_c J^2, \tau_n) = 0. \end{aligned}$$

Man gewinnt aus (35) eine Ungleichung der Form

$$\|\tau_n\|^2 \leq e^{\int_0^t B dt} \left( \|\tilde{\tau}\|^3 + \int_0^t A dt \right).$$

Damit liegen zur Bestimmung von  $T$  die gleichen Verhältnisse wie bei  $p$  vor und man kann wie dort verfahren. Auch das stationäre Problem kann für  $T$  wie für  $p$  behandelt werden. Bezüglich der Einzigkeit ergeben sich wegen der Linearität keine zusätzlichen Bedingungen.

## 7. BEZIEHUNG ZWISCHEN STATIONÄREM UND INSTATIONÄREM PROBLEM

Danach entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen für  $t \rightarrow \infty$  die Lösung des instationären Problems gegen die des stationären strebt. Dazu bildet man die Differenz zwischen der instationären und der stationären Lösung; integriert und schätzt ab.

Es sei  $p'(X, Y, t)$  eine Lösung des instationären Problems, ihr Anfangswert sei  $\tilde{p}(X, Y)$ ;  $p''(X, Y)$  sei eine Lösung des zugehörigen stationären Problems. Für die Differenz  $p = p' - p''$  gilt dann für beliebiges  $\phi$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \{ p_t \phi + D \text{grad } p \text{grad } \phi + (g(p') - g(p'')) S(1 + R) \phi \} dX dY dt \\ + V_0 \int_0^t \int_0^W p \phi|_{X=L} dY dt = 0. \end{aligned}$$

Setzt man  $\phi = p$ , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p\|^2 + D \|\text{grad } p\|^2 + V_0 \|p\|_{L^2(0, W)}^2 \\ = -((g(p') - g(p'')) S(1 + R), p). \end{aligned}$$

Wegen

$$|((g(p') - g(p'')) S(1 + R), p)| \leq g'_0 S(1 + R) \|p\|^2$$

mit  $g'_0 = \sup \left| \frac{\partial g}{\partial p} \right|$  und  $\|\text{grad } p\|^2 \geq \frac{1}{C} \|p\|^2$  mit einer nur vom Gebiet abhängigen Konstanten  $C$  erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p\|^2 + \left( \frac{D}{C} - g'_0 S(1 + R) \right) \|p\|^2 \leq 0.$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\gamma = \frac{D}{C} - g'_0 S(1 + R)$$

folgt

$$\frac{d}{dt} \left( e^{2\gamma t} \|p\|^2 \right) \leq 0$$

oder

$$\|p\|^2 \leq \|\tilde{p} - p''\|^2 e^{-2\gamma t}.$$

Es gilt also der *Satz*:

Unter der Voraussetzung  $\gamma > 0$  strebt die instationäre Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen die stationäre.

Wir erinnern daran, daß die Lösung des stationären Problems für  $\gamma > 0$  eindeutig bestimmt ist. Große Werte von  $D$  und kleine Werte von  $C$ ,  $g'_0$ ,  $S$  und  $R$  wirken sich auf die Stabilität eines *DH* Lasers also günstig aus oder in Worten ausgedrückt: Ein *DH* Laser ist stabil, wenn die Ladungsträgerdiffusion stark, das Gebiet klein, der Anstieg des gains mit der Ladungsträgerkonzentration gering, die Laserflußdichte nicht allzu groß und das Reflexionsvermögen der Spiegelfacetten klein ausfällt.

#### LITERATUR

1. N. Chinone, H. Nakashina, and R. Ito, *Long-term degradation of GaAs - Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As DH lasers due to facet erosion*, J. Appl. Phys. **48** (1977), 1160 - 1162.
2. C.H. Henry, P.M. Peroff, R.A. Logan, and F.R. Merritt, *Catastrophic damage of Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As double heterostructure laser material*, J. Appl. Phys. **50** (1979), 3721 - 3732.
3. Hong H. Lee, *Effects of lateral heat and carrier diffusion on thermal runaway of cw DH semiconductor lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics (1993), no. 29, 2619 - 2624.
4. K. Minishi, N. Chinone, H. Sato, and K. Aiki, *The effect of sputtered facet coating films on the suppression of self-sustained pulsations in the output of GaAlAs DH lasers during cw operation*, IEEE Journal of Quantum Electronics **QE-16** (1980), 728 - 734.
5. Jay S. Yoo, Hong H. Lee, and Peter Zory, *Temperature rise at mirror facet of cw semiconductor lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics **28** (1992), no. 3, 639 - 659.





**Recent publications of the  
Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik**

**Preprints 1994**

88. Reiner Lauterbach, Jan A. Sanders: Bifurcation analysis for spherically symmetric systems using invariant theory.
89. Milan Kučera: Stability of bifurcating periodic solutions of differential inequalities in  $\mathbb{R}^3$ .
90. Peter Knabner, Cornelius J. van Duijn, Sabine Hengst: An analysis of crystal dissolution fronts in flows through porous media Part I: Homogeneous charge distribution.
91. Werner Horn, Philippe Laurençot, Jürgen Sprekels: Global solutions to a Penrose–Fife phase–field model under flux boundary conditions for the inverse temperature.
92. Oleg V. Lepskii, Vladimir G. Spokoyny: Local adaptivity to inhomogeneous smoothness. 1. Resolution level.
93. Wolfgang Wagner: A functional law of large numbers for Boltzmann type stochastic particle systems.
94. Hermann Haaf: Existence of periodic travelling waves to reaction–diffusion equations with excitable–oscillatory kinetics.
95. Anton Bovier, Véronique Gayraud, Pierre Picco: Large deviation principles for the Hopfield model and the Kac–Hopfield model.
96. Wolfgang Wagner: Approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models.
97. Anton Bovier, Véronique Gayraud, Pierre Picco: Gibbs states of the Hopfield model with extensively many patterns.
98. Lev D. Pustyl'nikov, Jörg Schmeling: On some estimations of Weyl sums.
99. Michael H. Neumann: Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non–Gaussian time series.
100. Karmeshu, Henri Schurz: Effects of distributed delays on the stability of structures under seismic excitation and multiplicative noise.
101. Jörg Schmeling: Estimates of Weyl sums over subsequences of natural numbers.

102. Grigori N. Milstein, Michael V. Tret'yakov: Mean-square approximation for stochastic differential equations with small noises.
103. Valentin Konakov: On convergence rates of suprema in the presence of non-negligible trends.
104. Pierluigi Colli, Jürgen Sprekels: On a Penrose-Fife model with zero interfacial energy leading to a phase-field system of relaxed Stefan type.
105. Anton Bovier: Self-averaging in a class of generalized Hopfield models.
106. Andreas Rathsfeld: A wavelet algorithm for the solution of the double layer potential equation over polygonal boundaries.
107. Michael H. Neumann: Bootstrap confidence bands in nonparametric regression.
108. Henri Schurz: Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise.
109. Gottfried Bruckner: On the stabilization of trigonometric collocation methods for a class of ill-posed first kind equations.
110. Wolfdietrich Müller: Asymptotische Input-Output-Linearisierung und Störgrößenkompensation in nichtlinearen Reaktionssystemen.
111. Vladimir Maz'ya, Gunther Schmidt: On approximate approximations using Gaussian kernels.
112. Henri Schurz: A note on pathwise approximation of stationary Ornstein-Uhlenbeck processes with diagonalizable drift.
113. Peter Mathé: On the existence of unbiased Monte Carlo estimators.
114. Kathrin Bühring: A quadrature method for the hypersingular integral equation on an interval.
115. Gerhard Häckl, Klaus R. Schneider: Controllability near Takens-Bogdanov points.
116. Tatjana A. Averina, Sergey S. Artemiev, Henri Schurz: Simulation of stochastic auto-oscillating systems through variable stepsize algorithms with small noise.