

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

im Forschungsverbund Berlin e.V.

Asymptotische Input–Output–Linearisierung und Störgrößenkompensation in nichtlinearen Reaktionssystemen

Wolfdietrich Müller

submitted: 20th July 1994

Weierstraß–Institut
für Angewandte Analysis
und Stochastik
Mohrenstraße 39
D – 10117 Berlin
Germany

Preprint No. 110
Berlin 1994

1991 Mathematics Subject Classification. 93D15, 93A13, 93A25, 93B07, 93B11, 93B18, 93B29, 93B30, 93C10, 93C15, 93C73, 93C83, 93C95; 92E20.

Key words and phrases. Chemical process control, continuously stirred tank reactor (CSTR), exact input–output linearization, asymptotic input–output linearization, nonlinear observer, disturbance attenuation.

Edited by
Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)
Mohrenstraße 39
D — 10117 Berlin
Germany

Fax: + 49 30 2004975
e-mail (X.400): c=de;a=d400;p=iaas-berlin;s=preprint
e-mail (Internet): preprint@iaas-berlin.d400.de

Asymptotische Input–Output–Linearisierung und Störgrößenkompensation in nichtlinearen Reaktionssystemen

Wolfdietrich Müller

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin

Abstract. Entsprechend einem von E.D. Gilles und Mitarbeitern am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart vorgeschlagenen Konzept wird eine reproduzierbare Qualität der Endprodukte in komplexen verfahrenstechnischen Produktionsprozessen mit Hilfe einer Prozeßführung gewährleistet, die in einer hierarchischen Struktur nach zentral vorgegebenen Kriterien durch lokale Feedback–Steuerungen in den Teilprozessen eine Linearisierung des Input–Output–Verhaltens der Teilprozesse erzwingt. Da in der Regel nicht alle Zustandsgrößen einer Messung zugänglich sind, kann diese Strategie nur asymptotisch realisiert werden, und zwar mit Hilfe eines Beobachters, der Schätzungen für die nicht meßbaren Zustandsgrößen berechnet. Neue, von H.W. Knobloch und Mitarbeitern an der Universität Würzburg gewonnene Ergebnisse zur Theorie nichtlinearer Beobachter gestatten nun einerseits größere Freiheiten bei der Konstruktion des Beobachters und bieten andererseits zusätzlich die Möglichkeit, gewisse Klassen von Störtermen in den Prozeßgleichungen zu identifizieren und damit ihrem Einfluß entgegenzuwirken. An Hand eines konkreten Modellproblems aus der chemischen Verfahrenstechnik, einer exothermen Folgereaktion $A \rightarrow B \rightarrow C$ in einem kontinuierlich durchflossenen Rührkesselreaktor, werden die verschiedenen Möglichkeiten dieses Zugangs im Detail diskutiert sowie Strategien zur effektiven Konstruktion der nichtlinearen Beobachter vorgeschlagen.

AMS subject classification: 93D15; 93A13, 93A25, 93B07, 93B11, 93B18, 93B29, 93B30, 93C10, 93C15, 93C73, 93C83, 93C95; 92E20

1 Einführung

In der chemischen Verfahrenstechnik haben in den letzten Jahren Fragen der Sicherung einer reproduzierbaren Qualität eine große Bedeutung gewonnen [6]. Zur Steuerung komplexer Reaktionssysteme werden hierarchisch strukturierte Prozeßführungskonzepte vorgeschlagen, bei denen eine übergeordnete Koordinationsebene aus globalen Kriterien abgeleitete Qualitätskennziffern für die Einzelprozesse vorgibt, während auf der unteren, prozeßnahen Ebene durch geeignete lokale Regelungen ein diesen vorgegebenen Kennziffern entsprechendes Sollverhalten der einzelnen Prozeßstufen realisiert werden muß. Im Rahmen eines solchen Konzepts steuert die Koordinationsebene den "Qualitätsstrom" durch die Gesamtanlage; ein wesentliches Ziel beim Entwurf der lokalen Regelungen für die Einzelprozesse ist es daher, zu erreichen, daß das Übertragungsverhalten der (in der Regel hochgradig nichtlinearen) Einzelprozesse bezüglich dieses Qualitätsstromes möglichst einfach wird. Hilfsmittel hierzu bieten die Methoden der nichtlinearen Kontrolltheorie [9]:

Unter relativ allgemeinen Voraussetzungen ist es möglich, durch Einführung einer (statischen oder dynamischen) Zustands-Rückkopplung die Dynamik des Teilprozesses so zu verändern, daß sein Input-Output-Verhalten bezüglich des Qualitätsstromes linear wird und daß ein durch die Koordinationsebene vorgegebenes Sollverhalten exakt realisiert werden kann.

Leider ist dieses theoretisch sehr schöne Ergebnis für eine praktische Lösung des Steuerungsproblems noch nicht ausreichend: Erstens ist der aktuelle Zustand eines realen Prozesses meist nicht vollständig bekannt, denn in der Regel sind nicht alle Komponenten des Zustandsvektors einer Messung zugänglich; zweitens muß immer damit gerechnet werden, daß durch von außen einwirkende Störungen das Verhalten des realen Prozesses von dem des mathematischen Modells abweicht.

Dem ersten dieser beiden Probleme, der Tatsache, daß nicht alle Zustandskomponenten einer Messung zugänglich sind und daß somit die zur Realisierung einer Zustands-Rückkopplung erforderlichen Informationen nicht vollständig zur Verfügung stehen, begegnet man mit der Konstruktion eines sogenannten "Beobachters". Dieser berechnet Schätzungen für die nicht direkt meßbaren Zustandskomponenten, die unter gewissen Voraussetzungen mit wachsender Zeit gegen die wahren Werte dieser Komponenten konvergieren; damit kann dann die gewünschte Zustands-Rückkopplung zumindest asymptotisch realisiert werden. Es sind eine Vielzahl von Methoden zur Konstruktion derartiger Beobachter bekannt (siehe etwa den VDI-Fortschrittsbericht [1]), dabei wird der Beobachterentwurf oft rechnergestützt unter Verwendung von Computer-Algebra- und "symbolic computation"-Systemen durchgeführt. So verwendet das am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart entwickelte System MACNON [2] die Routinen des Systems MACSYMA, während die an der University of California in Davis/CA entwickelte "Nonlinear Systems Toolbox" [12] das System MATLAB benutzt.

Ein mathematisch streng begründeter Zugang zur Konstruktion nichtlinearer Beobachter auf der Basis der Theorie der Integralmannigfaltigkeiten wurde in den letzten Jahren von H. W. Knobloch und Mitarbeitern an der Universität Würzburg entwickelt; eine zusammenfassende Darstellung findet sich in den Kapiteln 3 und 4 des DMV-Ergebnisberichtes [11]. Hierbei wurden für gewisse Klassen von Systemen konkrete hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß für ganze Scharen von Lösungen der nichtlinearen Prozeßgleichungen die durch den Beobachter berechneten Schätzungen für die einer Messung nicht zugänglichen Zustandskomponenten gegen die richtigen Werte konvergieren.

Darüber hinaus gestattet der in [11] gegebene Zugang auch die Gewinnung von Aussagen zum zweiten der beiden oben angesprochenen Probleme, nämlich dem der Unterdrückung des Einflusses unbekannter, von außen auf das System einwirkender Störungen. Hierbei werden Situationen betrachtet, wo die dynamische Struktur der Störungen bekannt ist, d. h., es wird angenommen, daß die Störgrößen ebenfalls Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, des sogenannten Exo-Systems, sind. Unbekannt hingegen sind die Anfangswerte und damit die gesamten zeitlichen Verläufe der Störgrößen in der jeweiligen konkreten Realisierung des Prozesses. Auf den nichtlinearen Beobachter kommen damit zwei zusätzliche Aufgaben zu: er muß die Störungen identifizieren und gleichzeitig ihre Auswirkungen kompensieren.

Ziel der vorliegenden Untersuchungen war es, anhand eines konkreten — in Abstimmung mit der Arbeitsgruppe von Professor Gilles am Institut für Systemdynamik und

Regelungstechnik der Universität Stuttgart ausgewählten — Beispielproblems aus der chemischen Verfahrenstechnik die Leistungsfähigkeit dieses Zugangs aufzuzeigen. Betrachtet wurde eine exotherme Folgereaktion $A \rightarrow B \rightarrow C$ in einem kontinuierlich durchflossenen Rührkesselreaktor. Die mathematische Beschreibung des Reaktionssystems wurde dem Preprint [7] entnommen, ebenso die Zahlenwerte für die im System auftretenden chemischen und physikalischen Konstanten und sonstigen Parameter, und auch die Szenarien einiger der Simulationsrechnungen, über die im folgenden detaillierter berichtet wird, orientieren sich an Daten aus [7].

Der Bericht ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 wird zunächst eine allgemeine Klasse nichtlinearer Steuerungssysteme n -ter Ordnung eingeführt und dann das Gleichungssystem des Rührkesselreaktors — als Beispielproblem für die weiteren Untersuchungen — vollständig beschrieben. In den folgenden Abschnitten wird dann jeweils die Vorgehensweise zunächst für das allgemeine System n -ter Ordnung erläutert und anschließend für das konkrete Beispielproblem diskutiert und mit Hilfe der Resultate verschiedenartiger Simulationsrechnungen illustriert. Dabei behandelt Abschnitt 3 die exakte Input-Output-Linearisierung durch Zustands-Rückkopplung, Abschnitt 4 die asymptotische Input-Output-Linearisierung unter Verwendung eines nichtlinearen Beobachters auf der Basis des in [11] beschriebenen Zugangs und Abschnitt 5 die auf diesem Zugang beruhenden Möglichkeiten der zusätzlichen Störgrößenkompensation. Zu einigen der aufgeführten Simulationsrechnungen wurde das Programmsystem dstool [8] benutzt, bei anderen wurde zur numerischen Integration der Systemgleichungen die Subroutine I2SSE1, ein Programm zur Lösung eines steifen expliziten Differentialgleichungssystems mit einem modifizierten Gear-Verfahren, aus dem Programmpaket NUMATH-2 verwendet, Teile der Fortran-Programme wurden mit Hilfe des "symbolic computation"-Systems Maple V [4] erzeugt.

2 Das Steuerungssystem

2.1. Als mathematische Beschreibung eines Teilprozesses betrachten wir zunächst — mit der in [7] gewählten Bezeichnungsweise — ein nichtlineares SISO-Steuerungssystem (SISO = single input single output) der Gestalt

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad w = q(x). \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet x den n -dimensionalen Zustand des Systems, u die skalare Steuerung, y den skalaren einer Messung zugänglichen Systemausgang und w den ebenfalls skalaren zu regelnden System-Output. (Im Kontext der Prozeßführung zur Sicherung einer reproduzierbaren Qualität eines komplexen Gesamtprozesses ist w in der Regel ein Maß für die Qualität des durch (2.1) beschriebenen Teilprozesses.) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $h, q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ werden als hinreichend glatt vorausgesetzt. Gesucht wird eine nichtlineare statische oder dynamische Rückführung der Meßgröße y , die zusätzlich von einem neu einzuführenden Steuer-Input v abhängt, derart, daß für das geregelte System das Input-Output-Verhalten $w = w(v)$ linear wird.

Neben (2.1) betrachten wir, in Anlehnung an die in [7] gewählte Vorgehensweise, das Prozeßmodell

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{u}, \quad \hat{y} = h(\hat{x}), \quad \hat{w} = q(\hat{x}). \quad (2.2)$$

Während man davon auszugehen hatte, daß im System (2.1) zwar die Werte der Meßgröße y , nicht aber die des vollen Systemzustandes x bekannt waren, kann man annehmen, daß (etwa im Sinne einer Echtzeit-Simulation) die Werte der Zustandsgröße \hat{x} zu jedem Zeitpunkt bekannt sind. Damit macht es Sinn, für das System (2.2) eine Zustandsrückführung zu konstruieren, die eine *exakte* Linearisierung des Input-Output-Verhaltens bewirkt.

Eine wesentliche Rolle hierbei spielt der Begriff des relativen Grades, der wie folgt definiert ist [9]: Das System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad w = q(x) \quad (2.3)$$

besitzt im Punkt x^0 den *relativen Grad* r , wenn gilt: $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} q(x^0) \neq 0$, $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k q(x) = 0$ für $k < r - 1$ und $x \in U(x^0)$; dabei bezeichnet $U(x^0)$ eine Umgebung des Punktes x^0 und $\mathcal{L}_f q(x)$ die Lie-Ableitung der skalaren Funktion $q(x)$ längs des Vektorfeldes $f(x)$: $\mathcal{L}_f q(x) = (\text{grad } q(x), f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} f_i(x)$, $\mathcal{L}_f^k q(x) = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{k-1} q(x))$, $\mathcal{L}_f^0 q(x) = q(x)$. Im folgenden werden wir wiederholt die Abkürzungen

$$\sigma_i(x) = \mathcal{L}_f^{i-1} q(x), \quad \alpha_i(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{i-1} q(x) \quad (2.4)$$

verwenden. Eine Input-Output-Linearisierung des Systems durch Zustands-Rückführung ist nur in Bereichen des Zustandsraumes möglich, in denen das System einen relativen Grad besitzt.

2.2. Als konkreter Repräsentant der Systemklasse (2.1) wird im folgenden ein spezielles System aus der chemischen Verfahrenstechnik betrachtet, das die Kinetik einer exothermen Folgereaktion $A \rightarrow B \rightarrow C$ in einem kontinuierlich durchflossenen Rührkesselreaktor beschreibt [7]: Die ablaufenden Reaktionen sind dabei alle von erster Ordnung, alle drei Stoffe A, B, C haben dieselbe molare Masse, und die Gesamtmasse m im Reaktor bleibt konstant. Mit der Kühltemperatur als Steuergröße soll der Massenbruch des Stoffes B , der als Ausgangsgröße nicht online meßbar ist, über die Messung der Reaktortemperatur geregelt werden. Die normierten Modellgleichungen (2.2) des Reaktors lauten

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{1E} - \hat{x}_1) - \kappa_1 \hat{x}_1 \exp\left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3}\right)\right) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{2E} - \hat{x}_2) + \kappa_1 \hat{x}_1 \exp\left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3}\right)\right) - \kappa_2 \hat{x}_2 \exp\left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3}\right)\right) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{3E} - \hat{x}_3) - \beta \hat{x}_3 + \kappa_1 \lambda_1 \hat{x}_1 \exp\left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3}\right)\right) + \kappa_2 \lambda_2 \hat{x}_2 \exp\left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3}\right)\right) + \beta \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}_3 \\ \hat{w} &= \hat{x}_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei sind \hat{x}_1, \hat{x}_2 die Massenbrüche der Stoffe A, B , \hat{x}_3 die dimensionslose Temperatur und \hat{u} die dimensionslose Kühltemperatur. Die Normierung erfolgt mit der Temperatur T_S am stationären Punkt. Die Verweilzeit τ , die dimensionslosen Aktivierungsenergien η_1, η_2 bzw. die Reaktionsgeschwindigkeiten κ_1, κ_2 und der Wärmeübergangskoeffizient β sind konstante Parameter. Die Reaktionsenthalpien gehen in λ_1, λ_2 ein. Die Zustandsvariablen des Zuflusses sind mit dem Index E gekennzeichnet.

Tabelle 1. Zusammenstellung der Simulationsdaten

Prozeßmodellparameter:	$\kappa_1 = 0.02781 \left[\frac{1}{s} \right]$
	$\kappa_2 = 0.00059 \left[\frac{1}{s} \right]$
	$\eta_1 = 26.6319$
	$\eta_2 = 29.2951$
	$\lambda_1 = 0.19974$
	$\lambda_2 = 0.13316$
	$\beta = 0.0045 \left[\frac{1}{s} \right]$
	$\tau = 100 \text{ [s]}$
Zufluß:	$\hat{x}_E^T = [1.0 \ 0.0 \ 0.93212]$
Stationäre Temperatur:	$T_S = 375.49 \text{ [K]}$
Stationärer Punkt des Modells:	$\hat{x}_S^T = [0.26444 \ 0.69466 \ 1.0]$
	$\hat{u}_S = 0.81227$
Anfangsbedingungen des Modells:	$\hat{x}_0^T = [0.26444 \ 0.69466 \ 1.0]$
Anfangsbedingungen des Prozesses:	$\underline{x}_0^T = [0.15 \ 0.6 \ 1.0]$
Lineares Referenzmodell:	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.03780 & 0.0 & -0.19590 \\ 0.02781 & -0.01059 & 0.18391 \\ 0.00555 & 0.000078 & 0.02622 \end{bmatrix}$
	$\tilde{b}^T = [0.0 \ 0.0 \ 0.0045]$
	$\tilde{c}^T = [0.0 \ 1.0 \ 0.0]$
Sprunghöhe der Stellgröße v :	$\Delta v = -0.05$

Tabelle 1 enthält eine Zusammenstellung der in [7] verwendeten Simulationsdaten; diese Daten wurden — überall, wo nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird — auch den im folgenden beschriebenen Simulationsrechnungen zugrundegelegt. Die Festlegung des stationären Punktes (\hat{x}_S, \hat{u}_S) ergibt sich dabei eindeutig aus der Fixierung der stationären Temperatur T_S : wegen der Normierung $\hat{x}_{3S} = 1$ erhält man $\hat{x}_{1S}, \hat{x}_{2S}, \hat{u}_S$ als Lösung des linearen Systems

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{1E} - \hat{x}_1) - \kappa_1 \hat{x}_1 \\ 0 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{2E} - \hat{x}_2) + \kappa_1 \hat{x}_1 - \kappa_2 \hat{x}_2 \\ 0 &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{3E} - \hat{x}_3) - \beta \hat{x}_3 + \kappa_1 \lambda_1 \hat{x}_1 + \kappa_2 \lambda_2 \hat{x}_2 + \beta \hat{u}_S. \end{aligned}$$

Der relative Grad des Systems (2.5) bezüglich w läßt sich leicht bestimmen: wegen $g(\hat{x}) = (0, 0, \beta)^T$ und $q(\hat{x}) = \hat{x}_2$ erhält man für die in (2.4) eingeführten Größen $\alpha_1(\hat{x}) = 0$ und

$$\alpha_2(\hat{x}) = \frac{\beta}{\hat{x}_3^2} \left[\kappa_1 \eta_1 \hat{x}_1 \exp \left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3} \right) \right) - \kappa_2 \eta_2 \hat{x}_2 \exp \left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_3} \right) \right) \right], \quad (2.6)$$

speziell

$$\alpha_2(\hat{x}_S) = \beta(\kappa_1\eta_1\hat{x}_{1S} - \kappa_2\eta_2\hat{x}_{2S}); \quad (2.7)$$

mit den Zahlenwerten von Tab. 1 ergibt sich $\alpha_2(\hat{x}_S) = 0.000827 > 0$, damit hat das System im Punkt \hat{x}_S — und aus Stetigkeitsgründen auch in einer gewissen Umgebung dieses Punktes — den relativen Grad $r = 2$.

Allgemein läßt sich die Bedingung $\alpha_2 \neq 0$ geometrisch wie folgt veranschaulichen: Im (x_1, x_2, x_3) -Zustandsraum — von dem wegen der Bedeutung der eingehenden Größen nur der Bereich

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 > 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1 \quad (2.8)$$

relevant ist — wird die Fläche $\alpha_2(x) = 0$ gegeben durch

$$x_2 = \gamma(x_3)x_1 \quad \text{mit} \quad \gamma(x_3) = \frac{\kappa_1\eta_1}{\kappa_2\eta_2} \exp(\eta_1 - \eta_2) \left(1 - \frac{1}{x_3}\right), \quad (2.9)$$

in jeder Ebene $x_3 = \text{const}$ beschreibt (2.9) eine Gerade durch den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ mit positivem Anstieg $\gamma(x_3) > 0$. Für $x_3 \rightarrow 0$ nähert sich die Gerade im Fall $\eta_1 < \eta_2$ der x_2 -Achse, im Fall $\eta_1 > \eta_2$ der x_1 -Achse; in beiden Fällen schwenkt sie mit wachsendem x_3 monoton in Richtung der Grenzlage mit Anstieg $\gamma_\infty = \frac{\kappa_1\eta_1}{\kappa_2\eta_2} \exp(\eta_1 - \eta_2)$. In der durch Tab. 1 gegebenen Situation ist $\eta_1 < \eta_2$ und $\gamma_\infty = 2.988$; die Fläche $\alpha_2(x) = 0$ ist folglich eine Schraubenfläche durch die x_3 -Achse, die für $x_3 = 0$ die x_2 -Achse enthält und sich für wachsendes x_3 der Ebene $x_2 = 2.988x_1$ nähert. Das Gebiet $\alpha_2(x) > 0$, das auch den stationären Arbeitspunkt \hat{x}_S enthält, liegt "rechts" von dieser Schraubenfläche (es besteht aus den Punkten mit $x_2 < \gamma(x_3)x_1$), und die Fläche bildet, wie wir sehen werden, eine natürliche Barriere, über die hinaus das Verfahren der exakten Input-Output-Linearisierung nicht angewendet werden kann.

3 Exakte Input-Output-Linearisierung

3.1. Das Verfahren zur exakten Linearisierung des Input-Output-Verhaltens eines Systems (2.3) mit relativem Grad r ist wohlbekannt [9]: Man führt die Funktion $q(x)$ und ihre ersten $r - 1$ Lie-Ableitungen als neue Koordinaten ein, $z_i = \sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, r$ (vgl. (2.4)). In diesen neuen Koordinaten haben die ersten r Gleichungen des Systems (2.3) die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= \sigma_{r+1}(x) + \alpha_r(x)u. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Setzt man nun

$$\sigma_{r+1}(x) + \alpha_r(x)u = v, \quad (3.2)$$

wobei v einen beliebig vorgebbaren neuen System-Input bezeichnet, und beachtet, daß $z_1 = w$ ist, so sieht man, daß (3.1) kurz in der Form

$$w^{(r)} = v$$

geschrieben werden kann. Damit ist der gewünschte lineare Zusammenhang zwischen Input v und Output w hergestellt: man erhält w aus v durch r -maliges Integrieren. In allen Punkten x , wo (2.3) den relativen Grad r hat, ist nach Definition $\alpha_r(x) \neq 0$, (3.2) kann dort also nach u aufgelöst werden:

$$u = \frac{1}{\alpha_r(x)} [-\sigma_{r+1}(x) + v]. \quad (3.3)$$

Dies ist die gesuchte Zustandsrückführung, die die exakte Input-Output-Linearisierung des Systems (2.3) bewirkt — hier übrigens dargestellt als Funktion der "alten" Zustandskoordinaten x . Und tatsächlich ist es bei konkreten Anwendungen in der Regel nicht erforderlich, die Darstellung des Systems in den neuen Koordinaten $z_i = z_i(x)$ explizit auszurechnen; es genügt, (3.3) in (2.3) einzusetzen. Man hat lediglich noch zu überprüfen, ob die Nulldynamik, d. h. die (von v unabhängige) Dynamik in der durch $w \equiv 0$ beschriebenen $(n-r)$ -dimensionalen Lösungsmannigfaltigkeit im n -dimensionalen Zustandsraum, asymptotisch stabil ist [9].

Auf dem gleichen Wege kann man erreichen, daß das Input-Output-Verhalten eines Prozeßmodells

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{u}, \quad \hat{w} = q(\hat{x}) \quad (3.4)$$

(das so transformiert wurde, daß es für $\hat{u} = 0$ den stationären Punkt $\hat{x} = 0$, $\hat{w} = 0$ besitzt) mit dem eines beliebig vorgegebenen linearen Referenzmodells

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bv, \quad \tilde{w} = c^T \tilde{x} \quad (3.5)$$

mit relativem Grad $\bar{r} \geq r$ übereinstimmt: analog zu (3.1) erhält man die transformierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 \\ &\dots \\ \dot{\hat{z}}_r &= \hat{\sigma}_{r+1}(\hat{x}) + \hat{\alpha}_r(\hat{x})\hat{u} \end{aligned} \quad (3.6)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 \\ &\dots \\ \dot{\tilde{z}}_r &= \tilde{\sigma}_{r+1}(\tilde{x}) + \tilde{\alpha}_r v; \end{aligned} \quad (3.7)$$

dabei ist

$$\hat{\sigma}_i(\hat{x}) = \mathcal{L}_f^{i-1} q(\hat{x}), \quad \hat{\alpha}_i(\hat{x}) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{i-1} q(\hat{x}) \quad (3.8)$$

und

$$\tilde{\sigma}_i(\tilde{x}) = c^T A^{i-1} \tilde{x}, \quad \tilde{\alpha}_i = c^T A^{i-1} b. \quad (3.9)$$

Erzwingt man hier

$$\hat{\sigma}_{r+1}(\hat{x}) + \hat{\alpha}_r(\hat{x})\hat{u} \stackrel{!}{=} \tilde{\sigma}_{r+1}(\tilde{x}) + \tilde{\alpha}_r v \quad (3.10)$$

für alle $t \geq 0$ (das heißt, setzt man

$$\hat{u} = \frac{1}{\hat{\alpha}_r(\hat{x})} [-\hat{\sigma}_{r+1}(\hat{x}) + \bar{\sigma}_{r+1}(\tilde{x}) + \bar{\alpha}_r v] \quad (3.11)$$

und stimmt außerdem die Anfangswerte der Trajektorien $\hat{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$ richtig aufeinander ab), so gilt $\hat{w}(t) = \tilde{w}(t)$ für alle $t \geq 0$, das lineare Input-Output-Verhalten $\tilde{w}(v)$ von (3.5) überträgt sich auf $\hat{w}(v)$. Im Gegensatz zur statischen Zustandsrückführung (3.3) ist (3.11) eine *dynamische* Zustandsrückführung: der Term $\bar{\sigma}_{r+1}(\tilde{x})$ ergibt sich gemäß (3.9) aus dem Zustand \tilde{x} des linearen Referenzmodells, der folglich während der Simulationsrechnung für das Prozeßmodell (3.4) laufend mit berechnet werden muß.

In [7] wird gezeigt, wie an dieser Stelle der Rechenaufwand reduziert werden kann: Durch Vergleich der Beobachtbarkeitsnormalformen der Systeme (3.4) und (3.5) wird ein System von nur $n - r$ linearen Differentialgleichungen gewonnen, das (statt des vollen n -dimensionalen Systems (3.5)) zusammen mit (3.4) gelöst werden muß, um die Größe $\bar{\sigma}_{r+1}(\tilde{x})$ in (3.11) zu bestimmen.

3.2. Will man das eben beschriebene Verfahren der Anpassung des Input-Output-Verhaltens an ein lineares Referenzmodell für das Prozeßmodell (2.5) des Rührkesselreaktors durchführen, so ist es zunächst erforderlich, durch die Koordinatentransformation

$$\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{x}_S, \quad \hat{v} = \hat{u} - \hat{u}_S \quad (3.12)$$

zu einem System überzugehen, das den Punkt $\hat{\xi} = 0$, $\hat{v} = 0$ als Gleichgewichtspunkt besitzt. Dieses System hat die Gestalt

$$\dot{\hat{\xi}} = f(\hat{\xi}) + b\hat{v}, \quad \hat{w} = \hat{\xi}_2 \quad (3.13)$$

mit $f(\hat{\xi}) = (f_1(\hat{\xi}), f_2(\hat{\xi}), f_3(\hat{\xi}))^T$, $b = (0, 0, \beta)^T$ und

$$\begin{aligned} f_1(\hat{\xi}) &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{1E} - \hat{x}_{1S} - \hat{\xi}_1) - \kappa_1 (\hat{x}_{1S} + \hat{\xi}_1) \exp \left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3} \right) \right), \\ f_2(\hat{\xi}) &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{2E} - \hat{x}_{2S} - \hat{\xi}_2) + \kappa_1 (\hat{x}_{1S} + \hat{\xi}_1) \exp \left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3} \right) \right) \\ &\quad - \kappa_2 (\hat{x}_{2S} + \hat{\xi}_2) \exp \left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3} \right) \right), \\ f_3(\hat{\xi}) &= \frac{1}{\tau} (\hat{x}_{3E} - \hat{x}_{3S} - \hat{\xi}_3) - \beta (\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3) + \kappa_1 \lambda_1 (\hat{x}_S + \hat{\xi}_1) \exp \left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3} \right) \right) \\ &\quad + \kappa_2 \lambda_2 (\hat{x}_{2S} + \hat{\xi}_2) \exp \left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3} \right) \right) + \beta \hat{u}_S. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Für die einfache Input-Output-Linearisierung gemäß (3.3) ist dann

$$\hat{v} = \frac{1}{\hat{\alpha}_2(\hat{\xi})} [-\hat{\sigma}_3(\hat{\xi}) + v] \quad (3.15)$$

zu setzen. Mit den abkürzenden Bezeichnungen $a_{2j}(\hat{\xi}) = \partial f_2(\hat{\xi})/\partial \hat{\xi}_j$ ($j = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} a_{21}(\hat{\xi}) &= \kappa_1 \exp\left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3}\right)\right), \\ a_{22}(\hat{\xi}) &= -\frac{1}{\tau} - \kappa_2 \exp\left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3}\right)\right), \\ a_{23}(\hat{\xi}) &= \frac{1}{(\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3)^2} \left[\kappa_1 \eta_1 (\hat{x}_{1S} + \hat{\xi}_1) \exp\left(\eta_1 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_2 \eta_2 (\hat{x}_{2S} + \hat{\xi}_2) \exp\left(\eta_2 \left(1 - \frac{1}{\hat{x}_{3S} + \hat{\xi}_3}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

ist hier (vgl. (2.6) und (3.12))

$$\hat{\alpha}_2(\hat{\xi}) = \beta a_{23}(\hat{\xi}) \quad (3.17)$$

und (vgl. (3.8) für $\hat{w} = q(\hat{\xi}) = \hat{\xi}_2$)

$$\hat{\sigma}_3(\hat{\xi}) = a_{21}(\hat{\xi})f_1(\hat{\xi}) + a_{22}(\hat{\xi})f_2(\hat{\xi}) + a_{23}(\hat{\xi})f_3(\hat{\xi}). \quad (3.18)$$

Setzt man (3.15) mit diesen Werten in (3.13) ein, so entsteht das System

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= f_1(\hat{\xi}) \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\hat{\xi}) \\ \dot{\xi}_3 &= \frac{1}{a_{23}(\hat{\xi})} [-a_{21}(\hat{\xi})f_1(\hat{\xi}) - a_{22}(\hat{\xi})f_2(\hat{\xi}) + v] \end{aligned} \quad (3.19)$$

(dieses System hängt nicht von f_3 ab!). Die Nulldynamik von (3.19) ergibt sich für $v = 0$ und $\hat{\xi}_2 \equiv 0$, das heißt, sie verläuft in der durch

$$\hat{\xi}_2 = 0, \quad f_2(\hat{\xi}) = 0 \quad (3.20)$$

beschriebenen eindimensionalen Mannigfaltigkeit. Durch (3.20) wird eindeutig eine (nicht-lineare) Funktion $\hat{\xi}_3 = \hat{\xi}_3(\hat{\xi}_1)$ mit $\hat{\xi}_3(0) = 0$ definiert; setzt man diese in die erste Gleichung von (3.19) ein, so erhält man für die Nulldynamik die Gleichung

$$\dot{\hat{\xi}}_1 = f_1(\hat{\xi}_1, 0, \hat{\xi}_3(\hat{\xi}_1)).$$

Man rechnet leicht nach, daß diese Gleichung die Gestalt

$$\dot{\hat{\xi}}_1 = \lambda_0 \hat{\xi}_1 + O(\hat{\xi}_1^2)$$

mit

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\tau} - \kappa_1 \left(1 - \frac{\kappa_1 \eta_1 x_{1S}}{\kappa_1 \eta_1 x_{1S} - \kappa_2 \eta_2 x_{2S}}\right) \quad (3.21)$$

hat. Die Nulldynamik ist also stabil, solange $\lambda_0 < 0$ gilt; mit den Zahlen aus Tab. 1 erhält man

$$\lambda_0 = -0.00819. \quad (3.22)$$

Die Linearisierung des ungesteuerten Systems (3.13) im stationären Punkt $\hat{\xi} = 0$ hat die Gestalt

$$\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{A} \tilde{\xi} + b \hat{v} \quad (3.23)$$

mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} - \kappa_1 & 0 & -\kappa_1 \eta_1 x_{1S} \\ \kappa_1 & -\frac{1}{\tau} - \kappa_2 & \kappa_1 \eta_1 x_{1S} - \kappa_2 \eta_2 x_{2S} \\ \lambda_1 \kappa_1 & \lambda_2 \kappa_2 & -\frac{1}{\tau} - \beta + \lambda_1 \kappa_1 \eta_1 x_{1S} + \lambda_2 \kappa_2 \eta_2 x_{2S} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Setzt man die in Tab. 1 gegebenen Zahlenwerte ein, so entsteht gerade die ebenfalls in Tab. 1 angeführte Matrix \tilde{A} . Die Eigenwerte dieser Matrix berechnen sich zu

$$\lambda_1 = -0.01105, \quad \lambda_{2,3} = -0.00556 \pm 0.00711i, \quad (3.25)$$

die Nulllösung des Systems (3.23) mit $\hat{v} \equiv 0$ ist also asymptotisch stabil. (Damit sind, nach bekannten Sätzen über Stabilität nach der ersten Näherung, auch die Nulllösung des nichtlinearen Systems (3.13) mit $\hat{v} \equiv 0$ und der stationäre Punkt $\hat{x} = \hat{x}_S$ des Systems (2.5) bei Anwendung der konstanten Steuerung $\hat{u}(t) \equiv \hat{u}_S$ lokal asymptotisch stabil.)

Es bietet sich daher an, (3.23) als lineares Referenzmodell für (3.13) zu verwenden. (3.23) hat bezüglich $\tilde{w} = \tilde{\xi}_2$ den relativen Grad $\tilde{r} = 2$, denn mit $\tilde{c}^T = (0, 1, 0)$, $\tilde{b}^T = (0, 0, \beta)$ ergibt sich $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{c}^T \tilde{b} = 0$, $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{c}^T \tilde{A} \tilde{b} = \beta(\kappa_1 \eta_1 x_{1S} - \kappa_2 \eta_2 x_{2S}) > 0$ (vgl. (2.7)). Es gilt also $\tilde{r} = r = 2$ in einer Umgebung von $\hat{\xi} = 0$. Die zugehörige Zustandsrückführung für (3.13) ergibt sich aus (3.11) zu

$$\hat{v} = \hat{v}(\hat{\xi}, \tilde{\sigma}_3^*, v) = \frac{1}{\hat{\alpha}_2(\hat{x})} [-\hat{\sigma}_3(\hat{x}) + \tilde{\sigma}_3^* + \tilde{\alpha}_2 v]. \quad (3.26)$$

Hierbei ist wieder $\hat{\alpha}_2(\hat{x})$ durch (3.17), $\hat{\sigma}_3(\hat{x})$ durch (3.18) gegeben. Der Term $\tilde{\sigma}_3^*$ steht für $\tilde{\sigma}_3(\tilde{\xi}(t)) = \tilde{c}^T \tilde{A}^2 \tilde{\xi}(t)$, er kann entweder aus dem jeweils aktuellen Wert der Zustandsgröße $\tilde{\xi}(t)$ des mitzusimulierenden Referenzmodells (3.23) berechnet oder aber, nach dem in [7] gegebenen Rezept, aus einer zusätzlichen skalaren Differentialgleichung berechnet werden. Diese Differentialgleichung hat die Gestalt

$$\dot{\tilde{\sigma}}_3^* = -[a_1 \tilde{\sigma}_1^* + a_2 \tilde{\sigma}_2^* + a_3 \tilde{\sigma}_3^*] + \tilde{\alpha}_3 v, \quad (3.27)$$

dabei bezeichnen a_1, a_2, a_3 die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Matrix \tilde{A} ,

$$\det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_1, \quad (3.28)$$

und für $\tilde{\sigma}_1^*, \tilde{\sigma}_2^*$ sind die entsprechenden Werte $\hat{\sigma}_1(\hat{\xi}), \hat{\sigma}_2(\hat{\xi})$, genommen im jeweils aktuellen Punkt der Trajektorie $\hat{\xi}(t)$ des nichtlinearen Modellsystems (3.13), einzusetzen; damit erhält (3.27) die Form

$$\dot{\tilde{\sigma}}_3^* = -[a_1 \hat{\xi}_2 + a_2 f_2(\hat{\xi}) + a_3 \tilde{\sigma}_3^*] + \tilde{\alpha}_3 v. \quad (3.29)$$

Für die Herleitung dieser Gleichung sei auf [7] verwiesen. Die dort angegebene Festlegung für den Anfangswert, $\tilde{\sigma}_3^*(0) = 0$, ist naheliegend, aber nicht zwingend: Auch für andere $\tilde{\sigma}_3^*$ -Anfangswerte wird ein für alle Zeiten t exaktes Folgeverhalten $\hat{w}(t) = \tilde{w}(t)$, d. h. $\hat{\xi}_2(t) = \tilde{\xi}_2(t)$, realisiert, allerdings zu einer jeweils anderen Trajektorie $\tilde{\xi}(t)$ des Referenzsystems. Die Forderung $\hat{w}(t) = \tilde{w}(t)$ für $t \geq 0$ impliziert $\tilde{\sigma}_1(0) = \hat{\sigma}_1(0)$, also

$$\tilde{\xi}_2(0) = \hat{\xi}_2(0), \quad (3.30)$$

und $\bar{\sigma}_2(0) = \hat{\sigma}_2(0)$, also (vgl. (3.23), (3.14))

$$\kappa_1 \tilde{\xi}_1(0) - \left(\frac{1}{\tau} + \kappa_2\right) \tilde{\xi}_2(0) + (\kappa_1 \eta_1 x_{1S} - \kappa_2 \eta_2 x_{2S}) \tilde{\xi}_3(0) = f_2(\hat{\xi}(0)); \quad (3.31)$$

exaktes Folgeverhalten der Trajektorie $\hat{\xi}(t)$ wird immer dann realisiert, wenn der Anfangspunkt $\tilde{\xi}(0)$ der Trajektorie des linearen Referenzsystems den Bedingungen (3.30), (3.31) genügt. Es kann also etwa $\tilde{\xi}_1(0)$ beliebig gewählt und das zugehörige $\tilde{\xi}_3(0)$ aus (3.31) bestimmt werden. Der zugehörige Anfangswert $\bar{\sigma}_3^*(0)$ ergibt sich jeweils zu

$$\bar{\sigma}_3^*(0) = \kappa_1 f_1(\tilde{\xi}(0)) - \left(\frac{1}{\tau} + \kappa_2\right) f_2(\tilde{\xi}(0)) + (\kappa_1 \eta_1 x_{1S} - \kappa_2 \eta_2 x_{2S}) f_3(\tilde{\xi}(0)), \quad (3.32)$$

dies ist der Wert der Lie-Ableitung von $\bar{\sigma}_2(\xi)$ bezüglich des nichtlinearen Vektorfeldes f im jeweiligen Punkt $\tilde{\xi}(0)$.

Da aber, wie am Ende von Abschnitt 2 schon erwähnt, das Verfahren der exakten Input-Output-Linearisierung überhaupt nur arbeitet, solange die Trajektorie des nichtlinearen Systems vollständig im "Gebiet $\alpha_2(x) < 0$ " verläuft, kann diese zusätzliche Freiheit gelegentlich von Nutzen sein.

Wir illustrieren dies anhand einer genaueren Analyse des input-output-linearisierten Systems. Dieses besteht aus dem Prozeßmodell (3.13), (3.14), der Rückführungsgleichung (3.26) und der zusätzlichen Differentialgleichung (3.29), hat also insgesamt die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= f_1(\hat{\xi}) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= f_2(\hat{\xi}) \\ \dot{\hat{\xi}}_3 &= f_3(\hat{\xi}) + \frac{\beta}{\hat{\alpha}_2(\hat{\xi})} [-\hat{\sigma}_3(\hat{\xi}) + \bar{\sigma}_3^* + \bar{\alpha}_2 v] \\ \dot{\bar{\sigma}}_3^* &= -[a_1 \hat{\xi}_2 + a_2 f_2(\hat{\xi}) + a_3 \bar{\sigma}_3^*] + \bar{\alpha}_3 v \end{aligned} \quad (3.33)$$

(wobei f_1, f_2 in (3.14), $\hat{\alpha}_2$ in (3.17), $\hat{\sigma}_3$ in (3.18), a_1, a_2, a_3 in (3.28) und $\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ in (3.9) erklärt wurden. Übrigens gilt wegen (3.18), (3.16) die schon in (3.19) benutzte Identität

$$f_3(\hat{\xi}) + \frac{\beta}{\hat{\alpha}_2(\hat{\xi})} [-\hat{\sigma}_3(\hat{\xi})] = \frac{1}{a_{23}(\hat{\xi})} [-a_{21}(\hat{\xi}) f_1(\hat{\xi}) - a_{22}(\hat{\xi}) f_2(\hat{\xi})],$$

das heißt, auch System (3.33) ist unabhängig von der speziellen Gestalt von $f_3(\hat{\xi})$! Dabei nehmen wir im folgenden an, daß alle eingehenden Parameter die in Tab. 1 gegebenen Werte haben.

In [7] wurde die Reaktion des Systems (3.33) auf einen sprungförmigen Verlauf der in (3.26) eingeführten Steuergröße v ,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ v = \text{const} & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

untersucht. Wir betrachten diese Situation etwas genauer. Für $t \rightarrow \infty$ strebt das System gegen einen stationären Zustand $(\hat{\xi}_T, \bar{\sigma}_{3T}^*)$ (dessen Lage von der Größe des Sprunges v

abhängt). Wegen der Stationarität dieses Punktes gilt $\dot{\tilde{\sigma}}_{3T}^* = 0$ und $f_2(\hat{\xi}_T) = 0$, damit reduziert sich Gleichung (3.29) auf

$$0 = -[a_1 \hat{\xi}_{2T} + a_3 \tilde{\sigma}_{3T}^*] + \tilde{\alpha}_3 v. \quad (3.35)$$

Andererseits strebt auch das lineare Referenzmodell $\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{A} \tilde{\xi} + b v$ gegen einen stationären Punkt $\tilde{\xi}_T$, es gilt $\tilde{\xi}_T = -\tilde{A}^{-1} b v$ und speziell $\tilde{\xi}_{2T} = ((a_3 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)/a_1) v$ (mit den Größen $\tilde{\alpha}_i$ aus (3.9) und a_j aus (3.28)). Wegen der exakten Modellfolge haben wir $\hat{\xi}_{2T} = \tilde{\xi}_{2T}$, also

$$\hat{\xi}_{2T} = \frac{a_3 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3}{a_1} v, \quad (3.36)$$

und damit erhalten wir aus (3.35)

$$\tilde{\sigma}_{3T}^* = -\tilde{\alpha}_2 v. \quad (3.37)$$

Wegen $0 \leq \hat{x}_2 \leq 1$ und (3.12) muß $-\hat{x}_{2S} \leq \hat{\xi}_2 \leq 1 - \hat{x}_{2S}$ gelten, damit ergibt sich als erste Einschränkung für v

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \quad (3.38)$$

mit

$$v_{\min} = -\frac{a_1}{a_3 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3} \hat{x}_{2S}, \quad v_{\max} = \frac{a_1}{a_3 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3} (1 - \hat{x}_{2S}).$$

Mit den Zahlen aus Tab. 1 bekommen wir für (3.36), (3.37)

$$\hat{\xi}_{2T} = 7.4896 v, \quad \tilde{\sigma}_{3T}^* = -0.000827 v$$

und für (3.38)

$$-0.09275 \leq v \leq 0.04078. \quad (3.39)$$

Die Werte $\hat{\xi}_{1T}$, $\hat{\xi}_{3T}$ hängen nichtlinear von v ab und können nur näherungsweise numerisch berechnet werden. Ein gutes Hilfsmittel hierzu ist das Simulationssystem dstool [8]: neben zahlreichen anderen Optionen bietet dstool die Möglichkeit, nach Eingabe der Systemgleichungen einfach durch "Anklicken" eines Menüknopfes nach stationären Lösungen zu suchen. Die Suche zeigte: Zusätzlich zu der erwarteten stabilen Gleichgewichtslage ($\hat{\xi}_T, \tilde{\sigma}_{3T}^*$) besitzt das System (3.33) noch einen Sattelpunkt ($\hat{\xi}_U, \tilde{\sigma}_{3U}^*$) mit $\hat{\xi}_{2U} = \hat{\xi}_{2T}$, $\tilde{\sigma}_{3U}^* = \tilde{\sigma}_{3T}^*$ (gemäß (3.36), (3.37)), aber $\hat{\xi}_{1U} < \hat{\xi}_{1T}$, $\hat{\xi}_{3U} > \hat{\xi}_{3T}$, speziell für $v = 0$ neben ($\hat{\xi}_T, \tilde{\sigma}_{3T}^*$) = (0, 0, 0, 0) den Punkt ($\hat{\xi}_U, \tilde{\sigma}_{3U}^*$) = (-0.1966, 0, 0.0638, 0).

Es zeigte sich weiter, daß diese beiden stationären Punkte nicht für alle Werte v aus dem Intervall (3.38) existieren. Wir veranschaulichen die Ergebnisse im \hat{x} -Zustandsraum, d. h., wir nehmen die Transformation (3.12) zurück: $\hat{x} = \hat{\xi} + \hat{x}_S$. Relevant ist dort der Bereich (2.8). Abb. 1 zeigt die Lage der stationären Punkte in der (\hat{x}_1, \hat{x}_2) -Phasenebene und gleichzeitig in einer (\hat{x}_3, \hat{x}_2) -Ebene. Für $v = 0$ gilt $\hat{x}_T = \hat{x}_S$, $\hat{x}_U = \hat{x}_S + \hat{\xi}_U$. Für negative v -Werte aus (3.38) gibt es keine Probleme, für $v \rightarrow v_{\min}$ gilt $\hat{x}_T \rightarrow (1, 0, 0)$, $\hat{x}_U \rightarrow (0, 0, +\infty)$. Geht man hingegen von $v = 0$ in Richtung positiver v -Werte, so sieht man, daß die Punkte \hat{x}_T und \hat{x}_U sich einander mehr und mehr nähern und für $v \approx 0.007899$ zusammenfallen und zu einer Singularität höherer Ordnung (saddle-node) verschmelzen. Für $v > 0.0079$ gelang es nicht, stationäre Punkte des Systems (3.33) im Bereich (2.8) zu finden. Diese Tatsache hat übrigens nichts mit der am Ende von Abschnitt 2 angesprochenen

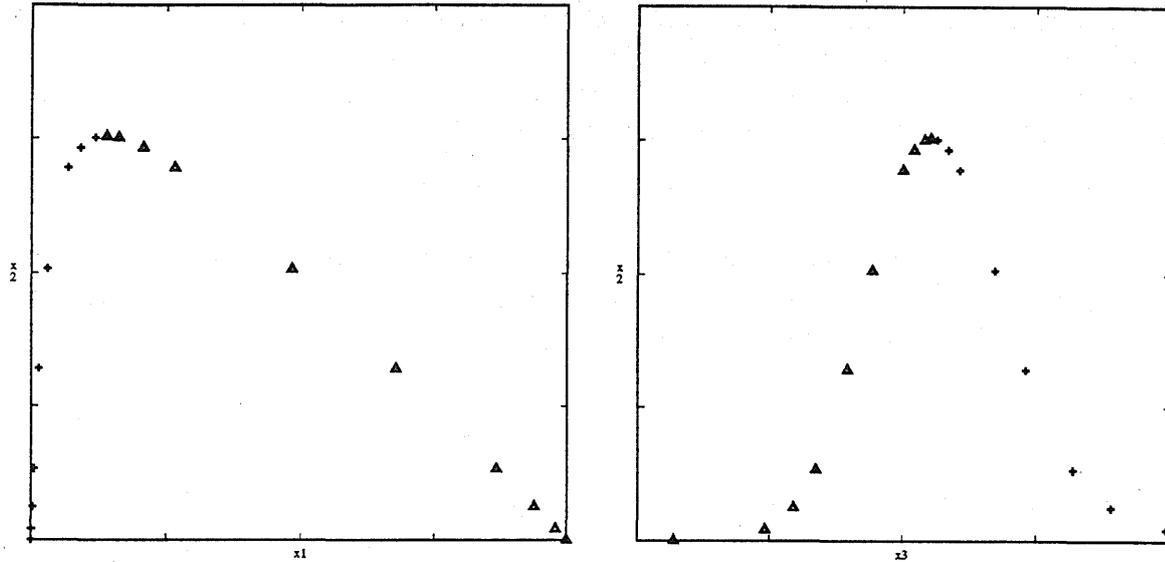


Abb. 1. Stationäre Punkte (stabile Gleichgewichtslage \hat{x}_T : Dreieck; Sattelpunkt \hat{x}_U : Kreuz) für (von unten nach oben) $v = -0.0927, -0.09, -0.0845, -0.075, -0.05, -0.025, 0, 0.005, 0.0075, 0.007899$.
 Teilbild a: (x_1, x_2) -Ebene, $x_1 = 0 \dots 1, x_2 = 0 \dots 1$.
 Teilbild b: (x_3, x_2) -Ebene, $x_3 = 0.7 \dots 1.3, x_2 = 0 \dots 1$.

Beschränkung auf den Teilbereich $\alpha_2(x) > 0$ zu tun: alle gefundenen stationären Punkte, auch der für $v = 0.007899$ sich ergebende Punkt $\hat{x}_T = \hat{x}_U = (0.1389, 0.7538, 1.0312)$, liegen echt im Innern dieses Teilbereiches.

Der Versuch, die Systemantwort auf einen Steuergrößensprung v zu berechnen, kann also offenbar nur für v -Werte aus dem Bereich

$$-0.09275 \leq v \leq 0.007899 \quad (3.40)$$

erfolgreich sein. Tatsächlich ist aber auch die Existenz einer stabilen Gleichgewichtslage $(\hat{x}_T, \bar{\sigma}_{3T}^*)$ noch nicht hinreichend für ihre Erreichbarkeit vom Punkt $(\hat{x}_S, 0)$ aus mit Hilfe einer Steuerung der Form (3.34). Testrechnungen zeigen: Nur für

$$-0.07547535 \leq v \leq 0.007899 \quad (3.41)$$

erreicht die vom Punkt $(\hat{x}_S, 0)$ ausgehende Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ den Punkt $(\hat{x}_T, \bar{\sigma}_{3T}^*)$. Für $v = -0.07547536$ hingegen berührt die Trajektorie zum Zeitpunkt $t = 256.5$ die Fläche $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) = 0$, und an dieser Stelle bricht die Simulationsrechnung zusammen. (Aus (3.26) sieht man, daß aus einem konstanten Steuer-Input v eine für $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) \rightarrow 0$ unbeschränkt anwachsende Steuerungseinwirkung \hat{v} im System (3.13) resultiert. Insofern ist, wie schon am Ende von Abschnitt 2 bemerkt, die Fläche $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) = 0$ die natürliche Grenze für die Anwendbarkeit des Verfahrens der exakten Input-Output-Linearisierung. Für $v = -0.07457535$ nähert sich übrigens die Trajektorie dieser Grenze bis auf einen Minimalabstand $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) = 3.3 \cdot 10^{-10}$ zur Zeit $t = 256.9$ und entfernt sich dann wieder von ihr, im Startpunkt ist $\hat{\alpha}_2(\hat{x}_S) = 8.27 \cdot 10^{-4}$, im Zielpunkt $\hat{\alpha}_2(\hat{x}_T) = 1.88 \cdot 10^{-4}$.)

Es ist müßig, darüber zu diskutieren, wie "sicher" die letzten Ziffern der unteren

Schranke für v in (3.41) sind; ein anderes Integrationsverfahren brächte andere Ziffern. Entscheidend ist die Tatsache, daß eine solche Schranke offenbar existiert.

Weitere Testrechnungen zeigen aber, daß man diese Schranke doch überschreiten kann, wenn man nicht im Punkt $(\hat{x}_S, 0)$, sondern in einem Punkt (\hat{x}_S, σ) mit geeignet gewähltem $\sigma \neq 0$ startet. Als optimal erweist sich die Wahl $\sigma = \bar{\sigma}_{3T}^*$; für

$$-0.084530 \leq v \leq 0.007899 \quad (3.42)$$

erreicht die vom Punkt $(\hat{x}_S, \bar{\sigma}_{3S}^*)$ ausgehende Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ den Punkt $(\hat{x}_T, \bar{\sigma}_{3T}^*)$. Für $v = -0.084531$ bricht die Simulationsrechnung zum Zeitpunkt $t = 424.05$ zusammen, weil die Trajektorie die Fläche $\hat{\alpha}_2(\hat{x}) = 0$ erreicht hat.

Abb. 2.

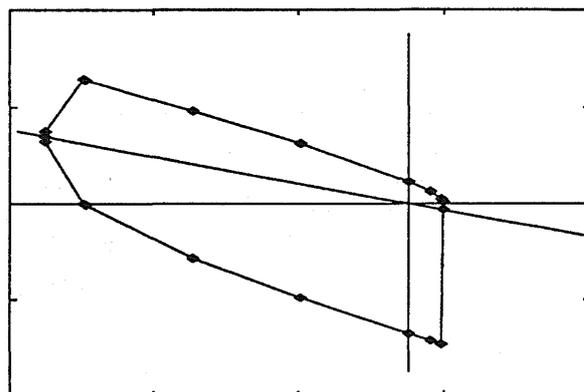
Approximation des Gebiets (3.43):

horizontal: $v = -0.0927 \dots 0.04078$

(vgl. (3.39)),

vertikal: $\sigma = -0.0002 \dots 0.0002$.

Die markierten Punkte (sie entsprechen den v -Werten aus Abb. 1) wurden berechnet und durch einen Polygonzug verbunden. Die schräge Gerade ist die Gerade $\sigma = \bar{\sigma}_{3T}^*(v)$ (vgl. (3.37)).



Für $v = -0.084531$ gelang es nicht, einen σ -Wert zu finden, für den eine durchgehende Trajektorie existiert. Dagegen gibt es offenbar für jedes v aus (3.42) Zahlen $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ derart, daß jede Trajektorie, die in einem Punkt (\hat{x}_S, σ) mit

$$\sigma_{\min}(v) \leq \sigma \leq \sigma_{\max}(v) \quad (3.43)$$

startet, den Punkt $(\hat{x}_T, \bar{\sigma}_{3T}^*)$ erreicht. In Abb. 2 wurde das Gebiet dieser zulässigen σ -Punkte näherungsweise durch ein Polygon approximiert.

Abb. 3 zeigt für $v = -0.05$, Abb. 4 für $v = -0.0845$ jeweils den zeitlichen Verlauf einiger möglicher Übergangstrajektorien aus dem Bereich (3.43). Dabei sind die Kurven $\hat{x}_2(t)$ Trajektorien eines linearen Systems (sie sind nach Konstruktion identisch mit den \tilde{x}_2 -Komponenten gewisser Trajektorien $\tilde{x}(t)$ des Systems (3.23)), während die Bilder für die Verläufe $\hat{x}_3(t)$ deutlich erkennen lassen, daß hier nichtlineare Zusammenhänge zugrundeliegen, und auch das "Abreißen" der Schar bei weiterer Vergrößerung oder Verkleinerung des Parameters σ plausibel machen.

4 Asymptotische Input-Output-Linearisierung

4.1. Wie schon in der Einführung bemerkt wurde, kann das Verfahren der exakten Linearisierung auf den realen nichtlinearen Prozeß (2.1) nicht angewendet werden, weil nicht alle Komponenten der Zustandsgröße x einer Messung zugänglich sind und nur der

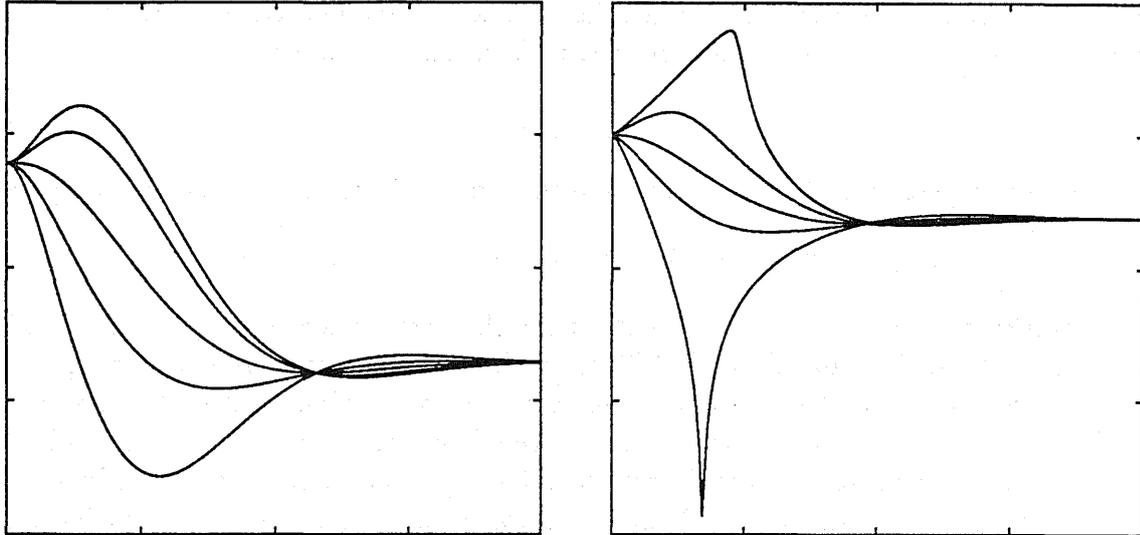


Abb. 3. Übergangstrajektorien für $v = -0.05$
für (von oben nach unten) $\bar{\sigma}_3^* = 9.689-5, 8.0-5, 4.137-5 (= \bar{\sigma}_{3T}^*(-0.05)), 0.0, -5.724-5$.
Teilbild a: $x_2(t), t = 0 \dots 1000, x_2 = 0 \dots 1$; Teilbild b: $x_3(t), t = 0 \dots 1000, x_3 = 0.7 \dots 1.1$.

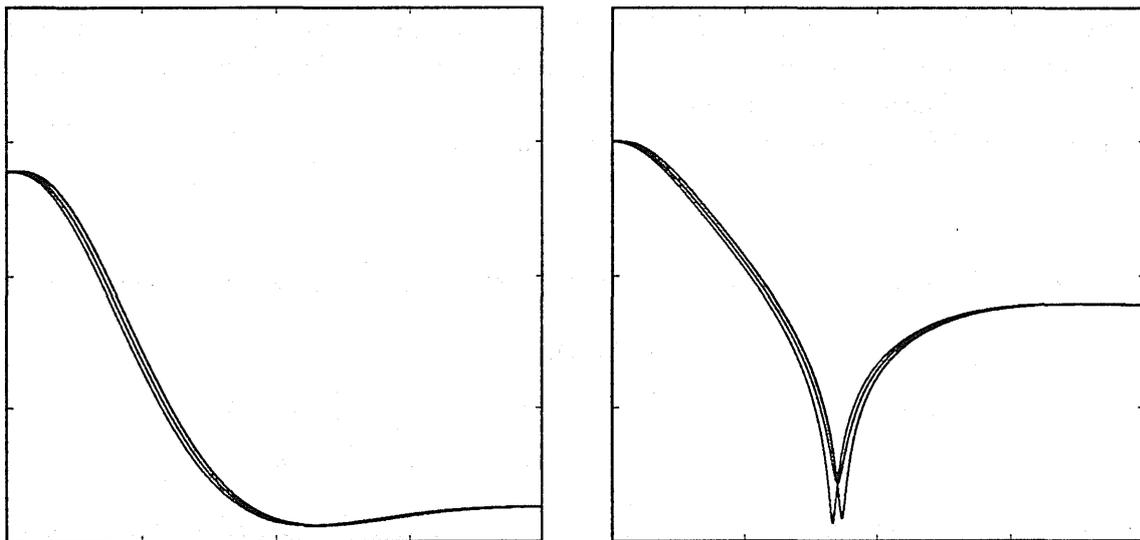


Abb. 4. Übergangstrajektorien für $v = -0.0845$
für (von oben nach unten) $\bar{\sigma}_3^* = 7.5-5, 6.99-5 (= \bar{\sigma}_{3T}^*(-0.0845)), 6.5-5$.
Teilbild a: $x_2(t), t = 0 \dots 1000, x_2 = 0 \dots 1$; Teilbild b: $x_3(t), t = 0 \dots 1000, x_3 = 0.7 \dots 1.1$.

Wert der skalaren Meßgröße $y = h(x)$ zu jedem Zeitpunkt bekannt ist. Zusätzlich zu (2.1) wird daher das nichtlineare Prozeßmodell (2.2) betrachtet und in geeigneter Weise als "Beobachter" an das System (2.1) angekoppelt. Wir zitieren hier den in [11] beschriebenen Zugang, zunächst noch ohne Berücksichtigung externer Störungen (diese werden wir in Abschnitt 5 in die Betrachtungen einbeziehen).

Sei $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von zulässigen Anfangswerten und X_∞ eine Menge von Zielwerten für das Prozeßmodell (2.2). Es wird angenommen, daß ein (statisches oder dynamisches, möglicherweise zeitabhängiges) Rückführungsgesetz

$$\hat{u} = \hat{u}(t, \hat{x}, v) \quad (4.1)$$

bekannt ist, derart, daß für das durch Einsetzen von (4.1) in (2.2) entstehende System

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{u}(t, \hat{x}, v), \quad \hat{y} = h(\hat{x}), \quad \hat{w} = q(\hat{x}) \quad (4.2)$$

jede Trajektorie $\hat{x} = \hat{x}(t, \hat{x}_0)$ mit $\hat{x}_0 \in X_0$ die Zielmenge erreicht (d. h., $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t, \hat{x}_0) \in X_\infty$) und daß dabei für das System (4.2) die exakte Input-Output-Linearisierung (lineare Abhängigkeit für $\hat{w} = \hat{w}(v)$ bzw. Modellfolge mit linearem Modell (3.23)) realisiert wird.

Dieses Rückführungsgesetz wird auch in die Gleichung des realen Prozesses (2.1) eingesetzt, und gleichzeitig wird das Systemmodell (4.3), ergänzt durch einen additiven Korrekturterm, der die Differenz der Meßgrößen von Prozeß und Modell berücksichtigt, als nichtlinearer Beobachter hinzugefügt, d. h., es wird das gekoppelte System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\hat{u}(t, \hat{x}, v) \\ \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{u}(t, \hat{x}, v) + K(t, \hat{x})(h(\hat{x}) - h(x)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

betrachtet; dabei wird zugelassen, daß die "Verstärkungsmatrix" K (im hier betrachteten Fall eines skalaren Systemausgangs $h(x)$ ist K ein Vektor) möglicherweise von t und vom Zustand \hat{x} des Beobachters abhängt.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Differenz der Zustandsgrößen,

$$\Delta = \hat{x} - x, \quad (4.4)$$

anstelle von \hat{x} als neue zweite Variable eingeführt, (4.3) erhält damit die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\hat{u}(t, x + \Delta, v) \\ \dot{\Delta} &= f(x + \Delta) - f(x) + (g(x + \Delta) - g(x))\hat{u}(t, x + \Delta, v) \\ &\quad + K(t, x + \Delta)(h(x + \Delta) - h(x)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dies ist ein (im allgemeinen nichtautonomes) System im \mathbb{R}^{2n} , es besitzt den Unterraum

$$\Delta \equiv 0 \quad (4.6)$$

als n -dimensionale Integralmannigfaltigkeit; die Dynamik in dieser Mannigfaltigkeit wird beschrieben durch

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\hat{u}(t, x, v), \quad (4.7)$$

also gerade durch die (gesuchte) exakte Input-Output-Linearisierung des nichtlinearen Prozesses (2.1).

Zur Ausnutzung dieses Sachverhaltes werden in [11] zunächst verschiedene Resultate über Integralmannigfaltigkeiten bereitgestellt und anschließend daraus Aussagen über Systeme vom Typ (4.5) abgeleitet. Wir skizzieren hier grob die für diesen Bericht relevanten Ergebnisse und verweisen für Details auf [11], Chapter 4 und Appendix B.

Betrachtet wird ein Differentialgleichungssystem der Gestalt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(t, x, y) \\ \dot{y} &= G(t, x, y)\end{aligned}\tag{4.8}$$

(die hier benutzten Symbole haben mit den bisher eingeführten nichts zu tun!). Mit Hilfe einer glatten Abbildung $x \mapsto s(x)$ wird eine Menge von Anfangswerten definiert,

$$M_0 = \{(x_0, y_0) : y_0 = s(x_0), x_0 \in W_0\},\tag{4.9}$$

es wird die Menge der Lösungen von (4.8) mit Anfangswerten in M_0 betrachtet, und es werden Bedingungen angegeben, die sichern, daß diese Menge eine schlichte Integralmannigfaltigkeit ist und mit Hilfe einer glatten Abbildung $(t, x) \mapsto S(t, x)$ dargestellt werden kann,

$$M = \{(x, y, t) : y = S(t, x), x = x(t, x_0, y_0), (x_0, y_0) \in M_0\},\tag{4.10}$$

sowie daß M exponentiell attraktiv ist und asymptotische Phase besitzt. Dazu wird zu (4.8) das System der linearisierten Variationsgleichungen längs einer in M verlaufenden Trajektorie $p(t) = p(t, x_0, y_0) = (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$, $(x_0, y_0) \in M_0$, betrachtet,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F_x(t, p(t))\xi + F_y(t, p(t))\eta, \\ \dot{\eta} &= G_x(t, p(t))\xi + G_y(t, p(t))\eta,\end{aligned}\tag{4.11}$$

und es wird gefordert, daß Konstanten $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \bar{F}, \bar{G}, \bar{S}$ existieren, mit denen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

(V1) Die Fundamentalmatrixlösung $\Phi(t, \tau)$ des Teilsystems

$$\dot{\xi} = F_x(t, p(t))\xi\tag{4.12}$$

genügt der Abschätzung

$$|\Phi(t, \tau)| \leq \gamma_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \tau;\tag{4.13}$$

(V2) Die Fundamentalmatrixlösung $\Psi(t, \tau)$ des Teilsystems

$$\dot{\eta} = G_y(t, p(t))\eta\tag{4.14}$$

genügt der Abschätzung

$$|\Psi(t, \tau)| \leq \gamma_2 e^{-\beta(t-\tau)} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq t;\tag{4.15}$$

(V3) Es gilt $\|F_y(t, p(t))\| \leq \bar{F}$, $\|G_x(t, p(t))\| \leq \bar{G}$ für $t \geq 0$, $(x_0, y_0) \in M_0$;

(V4) Es gilt $\|s_x(x)\| \leq \bar{S}$ für $x \in W_0$.

Genügen diese Konstanten dann zusätzlich den Ungleichungen

$$\beta > \alpha, \quad \beta > 0 \quad (4.16)$$

und

$$\gamma_1^2 \gamma_2 \frac{2\bar{F}}{\beta - \alpha} \left[\frac{2\bar{G}}{\beta - \alpha} + \bar{S} \right] < 1, \quad (4.17)$$

dann ist die durch (4.10) beschriebene Integralmannigfaltigkeit exponentiell attraktiv (d. h., für den Abstand einer in einer Umgebung der Mannigfaltigkeit startenden Lösung $p(t)$ zu M , $\delta(t) = \text{dist}(p(t), M)$, gilt eine Abschätzung der Form

$$|\delta(t)| \leq \gamma_0 |\delta(0)| e^{-\beta' t} \quad (4.18)$$

mit $\beta' > 0$) und besitzt asymptotische Phase (d. h., zu jeder in einer Umgebung der Mannigfaltigkeit startenden Lösung $p(t)$, $p(0) \notin M_0$, gibt es eine "asymptotisch gleiche" Lösung auf der Mannigfaltigkeit, $\tilde{p}(t) \subset M$, derart, daß auch für den Abstand $\delta(t) = |p(t) - \tilde{p}(t)|$ eine Abschätzung der Form (4.18) gilt).

Betrachten wir nun diese Bedingungen im Falle der Input-Output-Linearisierung, also speziell für die Gleichungen (4.5), so sehen wir, daß die Integralmannigfaltigkeit M hier eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit (4.6) ist, nämlich die Menge aller Lösungen mit Anfangswerten in $M_0 = \{(x_0, \Delta_0) : x_0 \in W_0, \Delta_0 = 0\}$. Die Variationsgleichungen (4.11) sind also längs Lösungen $p(t) = (x(t), \Delta(t))$ mit $\Delta(t) \equiv 0$ zu untersuchen. Längs solcher Lösungen gilt aber in den Bezeichnungen von (4.11) $G_x \equiv 0$, das heißt, die Voraussetzung (V3) ist mit $\bar{G} = 0$ erfüllt. Außerdem ist hier $s(x) \equiv 0$, das heißt, (V4) ist mit $\bar{S} = 0$ erfüllt. Damit ist aber (4.17) trivialerweise immer erfüllt und (V3), (V4) werden gegenstandslos. Es bleiben die Forderungen (V1), (V2) und die Ungleichung (4.16), dabei haben die Gleichungen (4.12), (4.14) jetzt die Gestalt

$$\dot{\xi} = [(f + g \hat{u})_x]_{x=x(t)} \xi, \quad (4.19)$$

$$\dot{\eta} = [f_x + g_x \hat{u} + K(t, x) h_x]_{x=x(t)} \eta. \quad (4.20)$$

Besonders übersichtlich gestaltet sich die Situation in dem (auch beim Reaktorsystem (2.5) vorliegenden) Spezialfall $g(x) = b = \text{const}$. Dann ist $g_x \equiv 0$, und damit hängt das η -Teilsystem (4.20) nicht mehr von \hat{u} ab. Zu einer fest gewählten Rückführung \hat{u} gibt es dann sicher ein $\alpha \geq 0$ derart, daß die Fundamentalmatrixlösung $\Phi(t, \tau)$ des Systems

$$\dot{\xi} = [f_x + b \hat{u}_x]_{x=x(t)} \xi \quad (4.21)$$

gleichmäßig für alle Lösungen $x(t)$ mit $x_0 \in W_0$ die Abschätzung (4.13) erfüllt; man wähle dann ein β mit $\beta > \alpha$ und bestimme die Verstärkungsmatrix $K = K(t, x)$ so, daß die Fundamentalmatrixlösung $\Psi(t, \tau)$ des Systems

$$\dot{\eta} = [f_x + K(t, x) h_x]_{x=x(t)} \eta \quad (4.22)$$

gleichmäßig für alle Lösungen $x(t)$ mit $x_0 \in W_0$ der Abschätzung (4.15) genügt. Wenn dies gelingt, ist gesichert, daß die Mannigfaltigkeit M exponentiell attraktiv ist — und dies impliziert, daß die gewünschte Dynamik (4.7) der exakten Input-Output-Linearisierung

asymptotisch approximiert wird, sofern nur die Anfangsabweichung $|\Delta(0)|$ hinreichend klein ist.

4.2. Wir betrachten die Situation im Fall der Reaktorgleichungen (2.5). Aus der Forderung nach exakter Angleichung des Input-Output-Verhaltens des Prozeßmodells an das des linearen Systems (3.23), (3.24) ergab sich die dynamische Zustandsrückführung (3.26) mit (3.27) und damit insgesamt das System (3.33). Um das komplette System (4.3) aufzuschreiben, haben wir erstens auch in (2.5) zu neuen Koordinaten $\xi = x - x_S$ überzugehen, zweitens in (2.5) für die Steuerung den Term (3.26) einzusetzen, drittens die $\hat{\xi}_i$ -Gleichungen in (3.33) durch zusätzliche Korrekturterme $K_i(t, \hat{\xi})(h(\hat{\xi}) - h(\xi))$ zu ergänzen. Beachten wir hierbei, daß $h(\xi) = \xi_3$ gilt, so erhalten wir insgesamt das System

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= f_1(\xi) \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\xi) \\ \dot{\xi}_3 &= f_3(\xi) + \beta \hat{v}(\hat{\xi}, \bar{\sigma}_3^*, v) \\ \dot{\bar{\sigma}}_3^* &= -[a_1 \hat{\xi}_2 + a_2 f_2(\hat{\xi}) + a_3 \bar{\sigma}_3^*] + \bar{\alpha}_3 v \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= f_1(\hat{\xi}) + K_1(t, \hat{\xi})(\hat{\xi}_3 - \xi_3) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= f_2(\hat{\xi}) + K_2(t, \hat{\xi})(\hat{\xi}_3 - \xi_3) \\ \dot{\hat{\xi}}_3 &= f_3(\hat{\xi}) + \beta \hat{v}(\hat{\xi}, \bar{\sigma}_3^*, v) + K_3(t, \hat{\xi})(\hat{\xi}_3 - \xi_3) \end{aligned} \quad (4.23)$$

(wobei f_1, f_2, f_3 in (3.14), $\hat{v}(\hat{\xi}, \bar{\sigma}_3^*, v)$ in (3.26), a_1, a_2, a_3 in (3.28) und $\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ in (3.9) erklärt wurden). Analog zu (4.4) wird der Fehler

$$\Delta = \hat{\xi} - \xi \quad (4.24)$$

als neue zweite Variable eingeführt; im so entstehenden System der Form (4.5) ist dann die Gleichung für $\bar{\sigma}_3^*$ mit in den x -Anteil einzuordnen. Das System (4.21) ist folglich vierdimensional, es hat die Gestalt

$$\dot{\zeta} = (\bar{A}(\xi, \sigma))_{\xi=\xi(t), \sigma=\bar{\sigma}_3^*(t)} \zeta, \quad (4.25)$$

die Matrix $\bar{A}(\xi, \sigma)$ berechnet sich aus partiellen Ableitungen nach den ξ_j und nach σ ,

$$\bar{A}(\xi, \sigma) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} & 0 \\ (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_1} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_2} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_3} & \beta / \hat{\alpha}_2(\xi) \\ -a_2(f_2)_{\xi_1} & -a_1 - a_2(f_2)_{\xi_2} & -a_2(f_2)_{\xi_3} & -a_3 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Mit Hilfe eines Maple-Programms wurden die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Matrix $\bar{A}(x, \sigma)$, $x = \hat{x}_S + \xi$, in Abhängigkeit von x, σ analysiert. Es zeigte sich folgendes:

- Längs der Kurve

$$C = \{(x, \sigma) : x = \hat{x}_T(v), \sigma = \bar{\sigma}_{3T}^*(v), v \text{ aus (3.41)}\} \quad (4.27)$$

d. h. in den stationären Zielpunkten für konstante Steuerungen aus dem Intervall (3.41), sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ konstant und haben die Werte (3.25). (Dies entspricht der Tatsache, daß die Zustandsrückführung jeweils so ausgelegt wird, daß das Input-Output-Verhalten der durch die Werte (3.25) vorgegebenen Dynamik folgt.)

- Der Eigenwert λ_4 , der die Nulldynamik des Systems beschreibt, hat für $v = v_{\min} = -0.09275$ den Wert $\lambda_4 = -0.1$ und wächst mit wachsendem v monoton an, für $v = 0$ hat er den Wert (3.22), für $v \rightarrow 0.007899$ strebt $\lambda_4 \rightarrow 0$, damit ist die Grenze des Bereiches erreicht, für den das Verfahren der Input-Output-Linearisierung anwendbar ist.
- Für Punkte in einer "schlauchförmigen" Umgebung der Kurve C im x -Raum, d. h. für $|x - \hat{x}_T(v)| \leq \rho$ mit hinreichend kleinem ρ , bleiben die Eigenwerte in der Nachbarschaft dieser Werte.

Das bedeutet: Für Startwerte $(x, \tilde{\sigma}_3^*) \in C$ erfüllt die Fundamentalmatrixlösung des Systems (4.25) die Abschätzung (4.13) mit $\alpha = 0.01106$. Die zugehörigen Lösungen $(x(t), \tilde{\sigma}_3^*(t))$ sind stationär, die Koeffizientenmatrix in (4.25) ist also konstant. Für benachbarte Startwerte, die nicht auf C liegen, ist diese Matrix zeitlich veränderlich, damit wird die Gewinnung exakter Stabilitätsaussagen schwieriger; zusätzlich zu Abschätzungen für die Eigenwerte λ_i der Matrix $A(t) = \bar{A}(x(t), \tilde{\sigma}_3^*(t))$ für alle $t \geq 0$ benötigt man Aussagen darüber, daß $A(t)$ in gewissem Sinne langsam veränderlich ist. Hinreichende Zusatzbedingungen sind nach [10]

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|A'(t)\| \text{ hinreichend klein}$$

oder

$$\int_0^{\infty} \|A'(t)\| dt < \infty$$

oder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A'(s)\| ds = 0.$$

Längs Lösungen, die in einer hinreichend kleinen Umgebung von C verlaufen, sind aber aus Stetigkeitsgründen derartige Bedingungen sicher erfüllt. Man kann also sicher eine Menge von Startwerten

$$\tilde{W}_0 = \{(x_0, \sigma_0) : |x_{i0} - x_{iT}(v)| \leq \rho_i \ (i = 1, 2, 3), |\sigma_0 - \tilde{\sigma}_{3T}^*(v)| \leq \rho_4, v \text{ aus (3.41)}\}$$

so finden, daß die Fundamentalmatrixlösung des Systems (4.25) gleichmäßig für alle $(x_0, \sigma_0) \in \tilde{W}_0$ die Abschätzung (4.13) mit

$$\alpha = 0.0115 \tag{4.28}$$

erfüllt.

Das System (4.22) ist hier dreidimensional. Wegen $h(x) = x_3$ gilt $h_x^T = (0, 0, 1)$, das System (4.22) hat also die Gestalt

$$\dot{\eta} = (\bar{B}(\xi))_{\xi=\xi(t)} \eta \tag{4.29}$$

mit

$$\bar{B}(\xi) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} + K_1 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} + K_2 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} + K_3 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

und es steht die Aufgabe, die Koeffizienten K_1, K_2, K_3 (gegebenenfalls abhängig von t, ξ) so zu bestimmen, daß die Fundamentalmatrixlösung des Systems (4.29) gleichmäßig für alle Lösungen mit Startwerten $\xi_0 = x_0 - \hat{x}_S, x_0 \in W_0 = \{x_0 : |x_{i0} - x_{iT}(v)| \leq \rho; (i = 1, 2, 3), v \text{ aus (3.41)}\}$, eine Abschätzung (4.15) mit $\beta > \alpha$, also beispielsweise mit

$$\beta = 0.012 \quad (4.31)$$

erfüllt. Näherungsweise läßt sich diese Forderung dadurch erfüllen, daß man für ausgewählte ξ die Zahlen K_i nach der bekannten Ackermann-Formel (siehe etwa [1], Anhang B) so bestimmt, daß die Eigenwerte von $\bar{B}(\xi)$ vorgegebene Werte $\bar{\lambda}_i$ mit $\bar{\lambda}_i \leq \beta$ ($i = 1, 2, 3$) annehmen, speziell kann man

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} \leq -\beta \quad (4.32)$$

realisieren. Im Zusammenhang mit der (auch in [7] betrachteten) Aufgabe der Approximation der input-output-linearisierten Übergangs des Systems aus dem stationären Zustand x_S in einen neuen stationären Zustand x_T infolge einer Steuerung vom Typ (3.34) bieten sich hierzu drei verschiedene Strategien an:

- (a) man berechnet die Zahlen K_i einmalig im Punkt \hat{x}_S , dem Arbeitspunkt des Prozeßmodells vor Beginn der Steuerung (d. h. für $\xi = 0$), und verwendet diese Werte längs der gesamten Rechnung;
- (b) man bestimmt zu (3.34) den neuen stationären Arbeitspunkt \hat{x}_T des Prozeßmodells nach Ablauf der Steuerung, berechnet dort (d. h. für $\xi = \hat{\xi}_T = \hat{x}_T - \hat{x}_S$) die Zahlen K_i und verwendet diese Werte längs der gesamten Rechnung;
- (c) man nimmt die Zahlen K_i als zeitlich veränderlich an und bestimmt ihre Werte $K_i = K_i(\hat{\xi}(t))$ laufend im jeweils aktuellen Punkt $\hat{\xi}(t)$ der Trajektorie des Prozeßmodells.

Diese drei Strategien wurden bei der numerischen Simulation einer Vielzahl von Systemantworten auf Steuerungen vom Typ (3.34) getestet. Es zeigte sich, daß die Ergebnisse sich oft nicht signifikant unterschieden, daß aber — wie zu erwarten war — die Strategie (c) sich am flexibelsten erwies und beispielsweise Steuerungen in der Umgebung der in Abb. 4 dargestellten Trajektorien für $v = -0.0845$ überhaupt nur mit Hilfe der Strategie (c) zu realisieren waren. Für die nachfolgenden Rechnungen wurde daher ausschließlich diese Strategie benutzt; die dazu in jedem Zeitschritt erforderlichen zusätzlichen Rechnungen wurden mit Hilfe eines Unterprogramms ausgeführt, dessen Fortran-Code direkt durch das System Maple erzeugt wurde. Als Anfangsbedingung für das "korrigierte" Prozeßmodell in (4.23) — dessen Gleichungen sich von (3.33) durch die additiven Korrekturterme $K_i(\hat{\xi}_3 - \xi_3)$ unterscheiden — wurde dabei grundsätzlich der stationäre Arbeitspunkt $\hat{x}_0 = \hat{x}_S$, d. h. $\xi_0 = 0$, gewählt. Durch Vorgabe anderer Anfangsbedingungen $\xi_0 \neq 0$ für den realen Prozeß ergaben sich dann bei der numerischen Simulation unterschiedliche Trajektorien $\hat{\xi}(t), \xi(t)$, und das asymptotische Verhalten der Differenz $\hat{\xi}(t) - \xi(t)$ für $t \rightarrow \infty$ konnte analysiert werden.

In Tabelle 2 sind einige Werte solcher Vergleichsrechnungen für vier spezielle Trajektorien aufgelistet. Dabei ist Trajektorie 1 die auch in [7] berechnete Trajektorie zum Steuergrößensprung $v = -0.05$ mit $\hat{x}_0 = \hat{x}_S$ als Anfangsbedingung des Prozeßmodells und

$x_0 = (0.15, 0.6, 1.0)$ (vgl. Tabelle 1) als Anfangspunkt des realen Prozesses. Dies entspricht wegen (3.12) dem Wert $\xi_0 = (-0.114, -0.095, 0)$; Trajektorie 1 ist damit ein Beispiel für eine Rechnung mit "großer" Abweichung des realen Anfangswertes vom stationären Arbeitspunkt. Hingegen gehören die Trajektorien 2 – 4 im gleichen Kontext zu den Anfangsbedingungen $\xi_0 = (0.001, 0, 0)$, $\xi_0 = (0, 0.001, 0)$ bzw. $\xi_0 = (0, 0, 0.001)$ und sind damit als "Störungsrechnungen" in einer kleinen Umgebung des input-output-linearisierten Übergangs $\hat{x}_S \rightarrow \hat{x}_T$ zu interpretieren. Zu den aufgelisteten $\bar{\lambda}$ -Werten wurden jeweils gemäß Strategie (c) die Trajektorien von (4.23) berechnet und zum Zwecke einer vergleichenden Bewertung die Größen

$$\delta_1 = \int_0^{2000} |\xi_2(t) - \hat{\xi}_2(t)| dt, \quad \delta_2 = \int_0^{2000} |\xi_2(t) - \tilde{\xi}_2(t)| dt \quad (4.33)$$

bestimmt (es zeigte sich, daß Beiträge zu den Integralen für $t > 2000$ vernachlässigt werden konnten); δ_1 ist also ein Maß für die Abweichung zwischen realem Prozeß und nichtlinearem Prozeßmodell, δ_2 bewertet die Güte der Annäherung an die vorgegebene Übergangstrajektorie des linearen Modells (3.23). Ein "†" in der Tabelle bedeutet jeweils, daß die Rechnung vorzeitig abbrach, weil die Trajektorie die Fläche $\hat{\alpha}_2(\hat{\xi}) = 0$ erreichte.

Tabelle 2. Übergangstrajektorien zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
Anfangspunkte: Trajektorie 1: $\xi_0 = (-0.114, -0.095, 0)$, Trajektorie 2: $\xi_0 = (0.001, 0, 0)$,
Trajektorie 3: $\xi_0 = (0, 0.001, 0)$, Trajektorie 4: $\xi_0 = (0, 0, 0.001)$. Bewertung gemäß (4.33)

$\bar{\lambda}$	Trajektorie 1		Trajektorie 2		Trajektorie 3		Trajektorie 4	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
-0.007	†	†	5.76	5.78	0.294	0.304	33.95	33.97
-0.008	112.2	113.2	1.27	1.28	0.129	0.137	8.29	8.32
-0.009	35.7	53.8	0.38	0.51	0.096	0.109	2.27	3.20
-0.010	25.3	54.6	0.22	0.53	0.091	0.107	1.16	3.29
-0.011	21.2	52.5	0.16	0.50	0.089	0.105	0.74	3.10
-0.012	17.1	52.6	0.13	0.50	0.086	0.104	0.57	3.06
-0.013	15.1	55.4	0.13	0.52	0.083	0.104	0.56	3.14
-0.014	16.0	60.7	0.14	0.55	0.080	0.104	0.62	3.26
-0.015	19.5	68.1	0.15	0.59	0.077	0.105	0.76	3.41
-0.016	25.4	78.3	0.17	0.63	0.075	0.105	0.99	3.58
-0.017	35.1	93.1	0.20	0.67	0.072	0.106	1.24	3.78
-0.018	53.2	119.9	0.23	0.71	0.070	0.106	1.48	3.99
-0.019	†	†	0.27	0.75	0.067	0.107	1.71	4.24

Ein Blick auf die erhaltenen Werte zeigt zweierlei: Einerseits konvergiert das Verfahren offenbar sogar schon für gewisse $\bar{\lambda}$ -Werte mit $|\bar{\lambda}| < \alpha$ (vgl. (4.28), andererseits ist es — selbst für die Trajektorien der "Störungsrechnung" — durchaus nicht so, daß sich für wachsendes $|\bar{\lambda}| > \beta$ (vgl. (4.31)) das Konvergenzverhalten laufend verbessert. Vielmehr führt trotz Vergrößerung der Abklingrate das Überschwingen der Lösungen (das wohlbekannte "peaking phenomenon" [13]) dazu, daß sich die Bewertungsgrößen (4.33) schnell erheblich vergrößern bzw. daß bei größeren Abweichungen der Anfangswerte die Trajektorie aus dem Bereich $\hat{\alpha}_2(\hat{\xi}) > 0$ ausbricht. Als optimal erweisen sich $\bar{\lambda}$ -Werte in der Größenordnung von $\bar{\lambda} = -0.012 \dots -0.013$. (Trajektorie 3 illustriert den Ausnahmefall, wo — offenbar infolge der Tatsache, daß nur in ξ_2 -Richtung gestört wird — das "peaking

phenomenon" nicht auftritt. Hier führten Simulationsrechnungen mit größeren $\bar{\lambda}$ -Werten zu einer weiteren Verkleinerung von δ_1 , bis hin zu $\bar{\lambda} = 0$, wo sich $\delta_1 = 0.000042$ ergab. Allerdings ist für diesen $\bar{\lambda}$ -Wert das System schon extrem steif, der Feedback-Koeffizient K_2 hat im Startpunkt den Wert 459000. Für noch größere $\bar{\lambda}$ -Werte kapitulierte die Numerik des Integrationsprogramms.)

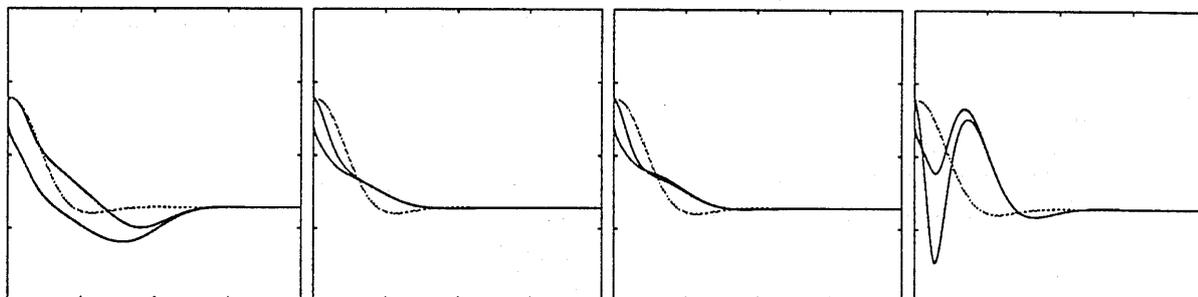


Abb. 5. Übergangstrajektorien zum Steuergrößensprung $v = -0.05$. Verlauf der Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)$. Startwerte: $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$. Horizontal: $t = 0 \dots 2000$, vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$.
(a) $\bar{\lambda} = -0.008$, (b) $\bar{\lambda} = -0.012$, (c) $\bar{\lambda} = -0.013$, (d) $\bar{\lambda} = -0.018$.

Abb. 5 illustriert die Situation für Trajektorie 1: Sie zeigt den Verlauf der Kurven $\xi_2(t)$, $\hat{\xi}_2(t)$ und $\tilde{\xi}_2(t)$ für $\bar{\lambda} = -0.008$ (schlechte Konvergenz wegen zu langsamen Abklingens der Fehler), $\bar{\lambda} = -0.012$ (gute Konvergenz, δ_2 minimal), $\bar{\lambda} = -0.013$ (gute Konvergenz, δ_1 minimal) und $\bar{\lambda} = -0.018$ (schlechte Konvergenz wegen Überschwingens). Allen vier Teilbildern ist gemeinsam, daß zunächst die Kurven $\xi_2(t)$, $\hat{\xi}_2(t)$ sich einander nähern und erst danach gemeinsam gegen die (in den vier Bildern identische) Kurve $\tilde{\xi}_2(t)$ streben.

Tabelle 3. Übergangstrajektorien zum Steuergrößensprung $v = -0.05$. Anfangspunkt $\xi_0 = (-0.114, -0.095, 0.1)$

$\bar{\lambda}$	δ_1	δ_2
-0.00910	†	†
-0.00920	85.6	100.4
-0.00930	72.8	88.0
-0.00940	63.6	86.7
-0.00950	56.5	91.7
-0.01000	40.0	99.0
-0.01100	41.1	108.9
-0.01200	110.7	112.7
-0.01205	138.7	200.0
-0.01210	†	†

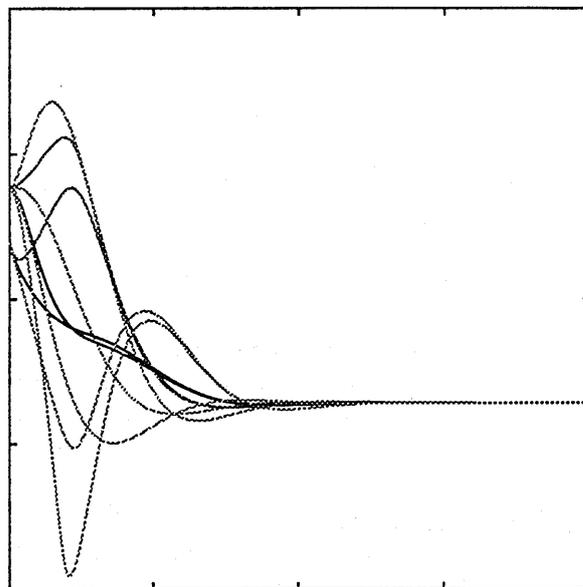
Tabelle 4. Übergangstrajektorien zum Steuergrößensprung $v = -0.0845$. Anfangspunkt $\xi_0 = (0.001, 0, 0)$

$\bar{\lambda}$	δ_1	δ_2
-0.01000	†	†
-0.01002	0.27	0.57
-0.01005	0.33	0.64
-0.01010	0.47	0.80
-0.01020	0.79	1.22
-0.01040	1.62	2.33
-0.01060	2.63	3.65
-0.01100	5.06	6.72
-0.01200	13.90	16.99
-0.01300	†	†

Die Sensitivität der Abhängigkeit von $\bar{\lambda}$ erhöht sich noch, wenn man in den Anfangswerten größere Abweichungen in x_3 -Richtung zuläßt (z. B. $\xi_3(0) = 0.1$, vgl. Tabelle 3) oder wenn man Übergänge mit größerem Steuergrößensprung betrachtet (z. B. $v = -0.0845$, Steuerung in der Umgebung der Referenztrajektorie von Abb. 4, vgl. Tabelle 4). Andererseits überträgt sich die am Ende von Abschnitt 3 diskutierte Freiheit in der Auswahl

der anzusteuernenden Referenztrajektorie durch geeignete Wahl des Anfangswertes $\bar{\sigma}_3^*(0)$ in natürlicher Weise auf das Problem der asymptotischen Modellfolge: Abb. 6 zeigt außer drei speziellen Übergangstrajektorien $\tilde{x}(t)$ aus Abb. 3 jeweils den Verlauf der zugehörigen Kurven $x(t)$, $\hat{x}(t)$ für $\bar{\lambda} = -0.013$ (der "mittlere" der drei Übergänge ist identisch mit dem aus Abb. 5c).

Abb. 6.
 Übergangstrajektorien
 zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 Verlauf der Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)$
 für $\bar{\sigma}_3^*(0) = 1.08-4, 4.137-5, -9.67-6$;
 $\bar{\lambda} = -0.013$.
 Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694, x_2(0) = 0.6$.
 Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
 vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$.



Das Bild zeigt, daß es hierbei nicht eigentlich darum geht, unterschiedliche Referenztrajektorien $\tilde{x}(t)$ zu approximieren (zunächst nähern sich jeweils $x(t)$ und $\hat{x}(t)$, die gemeinsame Annäherung an $\tilde{x}(t)$ erfolgt erst zu einer Zeit, wo die verschiedenen Trajektorien $\tilde{x}(t)$ ohnehin schon fast identisch sind), daß aber durch unterschiedliche Wahl von $\bar{\sigma}_3^*(0)$ der Verlauf der Kurven $x(t)$ und $\hat{x}(t)$ eben doch entscheidend beeinflußt werden kann.

5 Asymptotische Störgrößenkompensation

5.1. Wie schon in der Einführung erwähnt, gestattet der in Abschnitt 4 beschriebene Zugang zur asymptotischen Input-Output-Linearisierung eine Ausweitung auf Systeme, die zusätzlich von gewissen äußeren Störungen abhängen. In Anlehnung an [11] betrachten wir Systeme der Gestalt

$$\dot{x} = f(x, d) + g(x, d)u, \quad \dot{d} = s(d), \quad y = h(x, d), \quad w = q(x, d), \quad (5.1)$$

wo x, y, w die gleiche Bedeutung haben wie in (2.1) und wo $d \in \mathbb{R}^k$ eine zusätzliche Störgröße bezeichnet, deren dynamisches Verhalten durch die Gleichung

$$\dot{d} = s(d), \quad (5.2)$$

das sogenannte *Exosystem*, beschrieben wird. Dabei wird angenommen, daß das Exosystem den Punkt $d = 0$ als stabile Gleichgewichtslage besitzt und daß $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ eine

bezüglich des durch (5.2) definierten Flusses positiv invariante Umgebung dieses Punktes bezeichnet, und es wird vorausgesetzt, daß das System (5.1), betrachtet als System mit dem Zustand (x, d) und der Ausgangsgröße w , den wohldefinierten relativen Grad r besitzt.

Neben dem durch (5.1) beschriebenen realen Prozeß wird das Prozeßmodell

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{d}) + g(\hat{x}, \hat{d})\hat{u}, \quad \dot{\hat{d}} = s(\hat{d}), \quad \hat{y} = h(\hat{x}, \hat{d}), \quad \hat{w} = q(\hat{x}, \hat{d}) \quad (5.3)$$

betrachtet, und es wird angenommen, daß dafür ein (nun eventuell auch vom Wert der Störgröße \hat{d} abhängendes, statisches oder dynamisches) Rückführungsgesetz

$$\hat{u} = \hat{u}(t, \hat{x}, \hat{d}, v) \quad (5.4)$$

bekannt ist, derart, daß für das durch Einsetzen von (5.4) in (5.3) entstehende rückgekoppelte System jede Trajektorie $\hat{x} = \hat{x}(t, \hat{x}_0, \hat{d}_0)$, $\hat{d} = \hat{d}(t, \hat{d}_0)$ mit $\hat{x}_0 \in X_0$, $\hat{d}_0 \in \Omega$ eine gewünschte Zielmannigfaltigkeit (die hier als durch $\hat{x} = \pi(\hat{d})$ beschrieben angenommen wird) erreicht und daß hierbei die exakte Input-Output-Linearisierung (lineare Abhängigkeit für $\hat{w} = \hat{w}(v)$ bzw. exakte Modellfolge zu vorgegebenem linearem Modell) realisiert wird.

(5.1) und (5.3), (5.4) werden zu einem — zu (4.3) analogen — Gesamtsystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, d) + g(x, d)\hat{u}(t, \hat{x}, \hat{d}, v) \\ \dot{d} &= s(d) \\ \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, \hat{d}) + g(\hat{x}, \hat{d})\hat{u}(t, \hat{x}, \hat{d}, v) + K_1(t, \hat{x}, \hat{d})(h(\hat{x}, \hat{d}) - h(x, d)) \\ \dot{\hat{d}} &= s(\hat{d}) + K_2(t, \hat{x}, \hat{d})(h(\hat{x}, \hat{d}) - h(x, d)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

gekoppelt, dabei wird jetzt zugelassen, daß die Verstärkungsmatrizen K_1, K_2 von t , vom Zustand \hat{x} des Beobachters und vom Zustand \hat{d} des Störgrößenmodells abhängen.

Analog zu (4.4) werden die Differenzen

$$\Delta_1 = \hat{x} - x, \quad \Delta_2 = \hat{d} - d \quad (5.6)$$

als neue Variable eingeführt, (5.5) erhält damit die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, d) + g(x, d)\hat{U}, \quad \hat{U} = \hat{u}(t, x + \Delta_1, d + \Delta_2, v) \\ \dot{d} &= s(d) \\ \dot{\hat{x}} &= f(x + \Delta_1, d + \Delta_2) - f(x, d) + (g(x + \Delta_1, d + \Delta_2) - g(x, d))\hat{U} \\ &\quad + K_1(t, x + \Delta_1, d + \Delta_2)(h(x + \Delta_1, d + \Delta_2) - h(x, d)) \\ \dot{\hat{d}} &= s(\hat{d}) + K_2(t, x + \Delta_1, d + \Delta_2)(h(x + \Delta_1, d + \Delta_2) - h(x, d)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dieses System besitzt die $(n + k)$ -dimensionale Integralmannigfaltigkeit

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} \equiv 0. \quad (5.8)$$

Um mit Hilfe der in Abschnitt 4 beschriebenen Resultate aus der Theorie der Integralmannigfaltigkeiten Bedingungen für die exponentielle Attraktivität der Mannigfaltigkeit (5.8) zu erhalten, hat man (vgl. [5]) jetzt die Systeme

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} (f + g\hat{u})_x & (f + g\hat{u})_d \\ 0 & s_d \end{pmatrix} \xi \quad (5.9)$$

und

$$\dot{\eta} = \left[\begin{pmatrix} f_x + g_x \hat{u} & f_d + g_d \hat{u} \\ 0 & s_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1(t, x, d) \\ K_2(t, x, d) \end{pmatrix} (h_x, h_d) \right] \eta \quad (5.10)$$

längs Lösungen $x = x(t)$, $d = d(t)$ mit $x_0 \in W_0$, $d_0 \in \Omega$ zu untersuchen und für sie Abschätzungen der Form (4.13) bzw. (4.15) nachzuweisen.

5.2. Wir betrachten die Anwendung dieses Zugangs auf die Reaktorgleichungen (2.5). In den aus [7] übernommenen Gleichungen sind allerdings keine Störterme enthalten. Um also demonstrieren zu können, wie Störgrößen identifiziert und kompensiert werden können, mußten wir zunächst solche Größen zusätzlich in die Gleichungen aufnehmen. Derartige nachträgliche Manipulationen an vorgegebenen, naturwissenschaftlich relevanten Gleichungen sind im allgemeinen sicher fragwürdig, erschienen aber in der vorliegenden Situation legitim. Da es nicht sinnvoll erschien, physikalische oder chemische Konstanten in den Gleichungen zu "stören", wurden verschiedenartige Störungen in den Zuflußterm x_E "eingebaut". In einem ersten Szenarium wurde der Wert $x_{1E} = 1.0$ (vgl. Tab. 1) ersetzt durch

$$x_{1E} = x_{1R} \quad (5.11)$$

mit $x_{1R} \leq 1.0$ (dies würde bedeuten, daß die in den Reaktor einfließende Substanz nicht zu 100% aus dem Stoff *A* besteht, sondern — womöglich durch Rückstrom nach unvollständiger Trennung — auch Anteile des Stoffes *C* enthält). Dabei wurde zunächst angenommen, daß der Wert x_{1R} konstant, aber unbekannt ist:

$$x_{1R} = d_1 \quad (5.12)$$

mit dem "Exosystem"

$$\dot{d}_1 = 0. \quad (5.13)$$

Für die Simulationsrechnung bedeutet dies folgendes: Der (insgesamt unbekannte und nur über die Meßgröße ξ_3 zu beobachtende) reale Prozeß "kennt" natürlich den wahren Wert von x_{1R} , das heißt, die erste Gleichung in (4.23) lautet statt

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{\tau} (x_{1E} - x_{1S} - \xi_1) + \dots$$

jetzt

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{\tau} (d_1 - x_{1S} - \xi_1) + \dots \quad (5.14)$$

Hingegen ist im Prozeßmodell die Schätzung \hat{d}_1 einzusetzen,

$$\dot{\hat{\xi}}_1 = \frac{1}{\tau} (\hat{d}_1 - x_{1S} - \hat{\xi}_1) + \dots, \quad (5.15)$$

außerdem ist (4.23) durch die Exosystem-Gleichungen (5.13) und

$$\dot{\hat{d}}_1 = K_4(t, \hat{\xi}, \hat{d}) (\hat{\xi}_3 - \xi_3) \quad (5.16)$$

zu ergänzen. Die Größe $d_1(t)$ ist wegen (5.13) konstant (d. h., man kann auf eine "numerische Simulation" für (5.13) verzichten und von vornherein in (5.14) den Wert $d_1 = x_{1R}$

einsetzen). Für $\hat{d}_1(t)$ kann man den Anfangswert beliebig wählen (etwa $\hat{d}_1(0) = 1.0$), im Laufe der Simulationsrechnung muß sich

$$\hat{d}_1(t) \rightarrow x_{1R} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (5.17)$$

ergeben.

Strategien zur Berechnung der K_i erhält man aus der Betrachtung der Systeme (5.9), (5.10). Dabei hat (5.9) hier die Gestalt

$$\dot{\zeta} = (\bar{A}(\xi, \sigma, d))_{\xi=\xi(t), \sigma=\sigma_3^*(t), d=d(t)} \zeta, \quad (5.18)$$

mit

$$\bar{A}(\xi, \sigma, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} & 0 & 1/\tau \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} & 0 & 0 \\ (f_3 + \beta\hat{v})_{\xi_1} & (f_3 + \beta\hat{v})_{\xi_2} & (f_3 + \beta\hat{v})_{\xi_3} & \beta/\hat{\alpha}_2(\xi) & 0 \\ -a_2(f_2)_{\xi_1} & -a_1 - a_2(f_2)_{\xi_2} & -a_2(f_2)_{\xi_3} & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Die Matrix (5.19) hat die gleichen Eigenwerte wie (4.26) und außerdem den (aus (5.13) resultierenden) Eigenwert $\lambda_5 = 0$, die Abschätzung (4.28) für α kann also übernommen werden. Das System (5.10) wird hier vierdimensional, es hat die Gestalt

$$\dot{\eta} = (\bar{B}(\xi, d))_{\xi=\xi(t), d=d(t)} \eta \quad (5.20)$$

mit

$$\bar{B}(\xi, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} + K_1 & 1/\tau \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} + K_2 & 0 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} + K_3 & 0 \\ 0 & 0 & K_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Gemäß Strategie (c) kann man die Werte $K_i = K_i(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ im jeweils aktuellen Punkt $(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ der Trajektorie so bestimmen, daß die vier Eigenwerte der Matrix $\bar{B}(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ immer den gleichen vorgegebenen Wert $\bar{\lambda}$ haben. Testrechnungen analog zu den in Tabelle 2 dokumentierten, speziell für die "Trajektorie 1", hier aber zusätzlich für verschiedene Werte von x_{1R} , zeigten ein gegenüber dort nur geringfügig verändertes Verhalten der Bewertungsgrößen δ_1, δ_2 in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}$: δ_1 erreichte sein Minimum für $\bar{\lambda} = -0.013$ ($x_{1R} = 1.0$) bzw. $\bar{\lambda} = -0.014$ ($x_{1R} = 0.6$), δ_2 für $\bar{\lambda} = -0.015$ ($x_{1R} = 1.0$) bzw. $\bar{\lambda} = -0.018$ ($x_{1R} = 0.6$).

Abb. 7 zeigt Trajektorien, die mit $\bar{\lambda} = -0.013$ berechnet wurden, für die Parameterwerte $x_{1R} = 1.0, 0.75, 0.56$, und zwar sind im gleichen Diagramm oben die Kurven $\hat{d}_1(t)$ (die sich gemäß (5.17) auf den jeweiligen Wert x_{1R} einpegeln) und darunter die zugehörigen Kurven $x_2(t)$ und $\hat{x}_2(t)$ dargestellt. (Für $x_{1R} \leq 0.559$ bricht die Simulationsrechnung vorzeitig ab, weil die Trajektorie die Fläche $\alpha_2(x) = 0$ erreicht. Hingegen ist beispielsweise für $\bar{\lambda} = -0.015$ auch $x_{1R} = 0.55$ noch zulässig.)

Interessant ist, daß hier — bedingt durch die "Freigabe" des ursprünglich konstanten Parameters x_{1R} — auch im Spezialfall $x_{1R} = 1.0$ ein Übergang mit geringerem Fehler realisiert wird als in Tab. 2 aufgelistet (für $\bar{\lambda} = -0.013$ ist hier $\delta_1 = 11.32$, $\delta_2 = 34.81$). In Abb. 8 sind zur Illustration dieses Sachverhaltes noch einmal die zu $x_{1R} = 1.0$ gehörigen

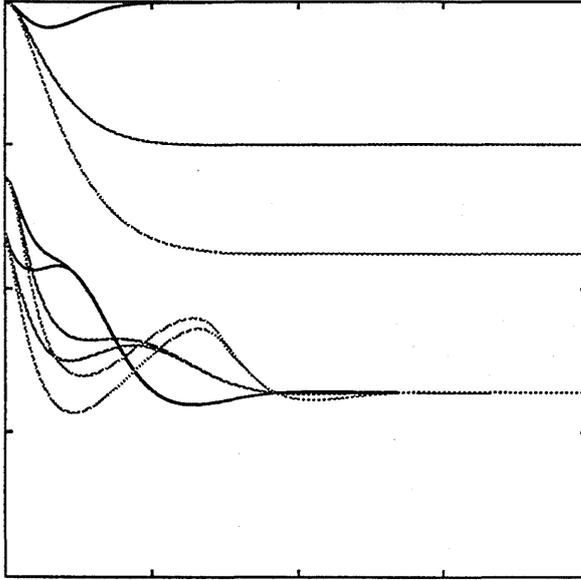


Abb. 7.
Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
Verlauf der Kurven $\hat{d}_1(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
für $x_{1R} = 1.0, 0.75, 0.56$, $\bar{\lambda} = -0.013$.
Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$.
Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$ und $d_1 = 0 \dots 1$.

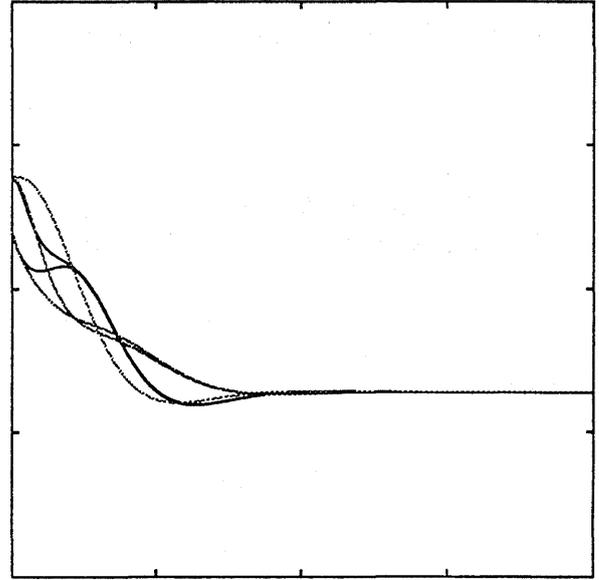


Abb. 8.
Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
Verlauf der Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
für $x_{1R} = 1.0$, $\bar{\lambda} = -0.013$ aus Abb. 7
und der Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)$
aus Abb. 5c.
Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$.

Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ aus Abb. 7 und die Kurven $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ aus Abb. 5c gemeinsam dargestellt.

In einem weiteren Szenario wurde der Wert $x_{1E} = 1.0$ unverändert gelassen, aber der Wert $x_{3E} = 0.93212$ (vgl. Tab. 1) ersetzt durch

$$x_{3E} = x_{3R}. \quad (5.22)$$

Dies bedeutet, daß die in den Reaktor einfließende Substanz nicht die in Tab. 1 angegebene Temperatur $T_E = x_{3E}T_S = 350^\circ\text{K}$, sondern eine davon abweichende Temperatur $T_E = x_{3R}T_S$ hat. Nimmt man wieder an, daß der Wert x_{3R} zwar unbekannt,

$$x_{3R} = d_1, \quad (5.23)$$

aber konstant ist, so hat das Exosystem wieder die Gestalt (5.13), und auch alle weiteren Überlegungen laufen nahezu synchron zum Szenario 1: Statt der Gleichungen für ξ_1 , $\hat{\xi}_1$ sind jetzt die Gleichungen für ξ_3 , $\hat{\xi}_3$ analog zu (5.14), (5.15) abzuändern, Gleichung (5.13) kann unverändert übernommen werden. Auch die Abschätzung (4.28) für α gilt unverändert. Die Matrix $\bar{B}(\xi, d)$ (vgl. (5.20)) ändert sich nur geringfügig, sie hat jetzt die

Gestalt

$$\bar{B}(\xi, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} + K_1 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} + K_2 & 0 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} + K_3 & 1/\tau \\ 0 & 0 & K_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Versucht man wieder, in gleicher Weise wie in Szenario 1, durch Testrechnungen einen optimalen $\bar{\lambda}$ -Wert für die Berechnung der Koeffizienten K_i nach der Ackermann-Formel zu finden, so zeigt es sich, daß hier die Situation relativ sensibel vom Wert von x_{3R} abhängt (wie ja auch schon in Abschnitt 4 die Zahlen δ_1, δ_2 empfindlicher auf eine x_3 -Änderung reagierten als auf eine x_1 -Änderung — vgl. die Spalten für Trajektorie 2 und Trajektorie 4 in Tab. 2 und insbesondere auch die Zahlen in Tab. 3!) Speziell für Trajektorie 1 erhält man zwar für $x_{3R} = x_{3E}$ ($= 0.93212$) fast die gleichen Zahlen wie in der entsprechenden Spalte von Tabelle 2, aber schon für $x_{3R} = 0.7$ schrumpft das Intervall der brauchbaren $\bar{\lambda}$ -Werte empfindlich zusammen, siehe Tabelle 5, und für $x_{3R} = 0.35$ führen nur noch $\bar{\lambda}$ -Werte aus dem Intervall $(-0.013, -0.01255)$ zu konvergenten Approximationen, vgl. Tabelle 6 und Abb. 9, wo außer der zu approximierenden Übergangstrajektorie $\tilde{x}_2(t)$ die Kurven $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ für $\bar{\lambda} = -0.0126, -0.0128, -0.013$ aufgetragen sind. Allerdings sind diese Übergänge (bei denen übrigens die x_1 -Komponente des modifizierten Prozeßmodells kurzzeitig den Bereich (2.8) verläßt, für $\bar{\lambda} = -0.0126$ hat sie ihr Maximum bei $\hat{x}_1(206) = 1.63$) ohnehin höchstens von akademischem Interesse: dem Wert $x_{3R} = 0.35$ entspricht eine Zuflußtemperatur $T_E = 131^\circ\text{K}$, also rund -142°C .

Tabelle 5. Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
Anfangspunkt $\xi_0 = (-0.114, -0.095, 0)$
 $x_{3R} = 0.7$

$\bar{\lambda}$	δ_1	δ_2
-0.0100	218.9	410.3
-0.0110	123.0	339.0
-0.0120	54.3	269.7
-0.0126	13.2	218.5
-0.0130	35.0	176.9
-0.0136	110.2	115.5
-0.0137	128.0	130.8
-0.0138	148.9	153.9
-0.0139	†	†

Tabelle 6. Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
Anfangspunkt $\xi_0 = (-0.114, -0.095, 0)$
 $x_{3R} = 0.35$

$\bar{\lambda}$	δ_1	δ_2
-0.01254	†	†
-0.01255	55.4	359.4
-0.01260	38.6	342.9
-0.01265	33.1	343.7
-0.01270	39.3	303.1
-0.01280	87.5	256.1
-0.01290	151.6	199.3
-0.01300	286.4	289.1
-0.01310	†	†

Abb. 10 zeigt die mit $\bar{\lambda} = -0.013$ berechneten Übergangstrajektorien $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ für die Parameterwerte $x_{3R} = 0.7, 0.93212 (= x_{3E}), 0.97$, dabei sind, wie in Abb. 7, gleichzeitig oben die zugehörigen Kurven $\hat{d}_1(t)$ mit eingetragen. Für $x_{3R} \geq 0.98$ bricht die Simulationsrechnung vorzeitig ab, weil die Trajektorie die Fläche $\alpha_2(x) = 0$ erreicht.

Um zu demonstrieren, daß dieser Zugang zur Störgrößenkompensation durchaus nicht auf die Identifikation konstanter Störungen beschränkt ist, wurde in einem dritten Szenario angenommen, daß der Wert x_{3R} periodisch (mit bekannter Periode ω , aber unbekannter Amplitude a und Phase θ) um einen (unbekannten) mittleren Wert x_{3M} schwankt,

$$x_{3R}(t) = x_{3M} + a \cos(\omega t + \theta). \quad (5.25)$$

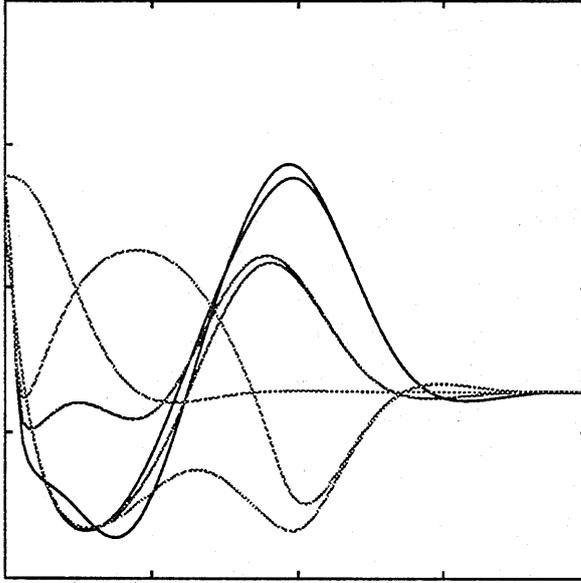


Abb. 9.
 Übergangstrajektorien
 zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 $x_{3R} = 0.35$.
 Verlauf der Kurven $\tilde{x}_1(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
 für $\bar{\lambda} = -0.0126, -0.0128, -0.013$.
 Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$.
 Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
 vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$.

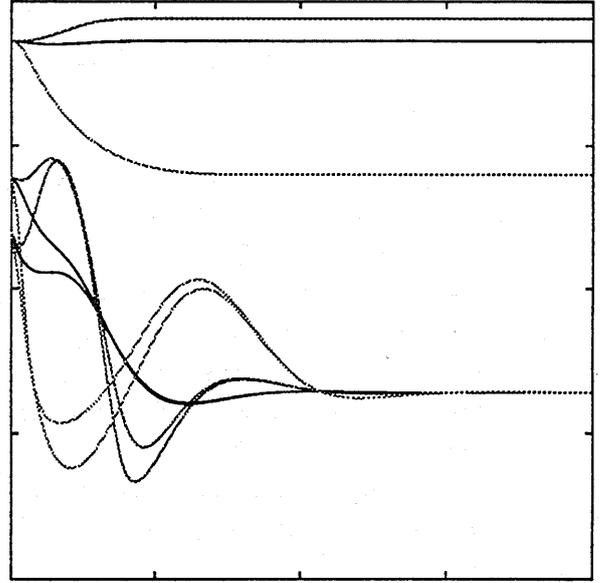


Abb. 10.
 Übergangstrajektorien
 zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 $\bar{\lambda} = -0.013$.
 Verlauf der Kurven $\hat{d}_1(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
 für $x_{3R} = 0.7, 0.93212, 0.97$
 Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$.
 Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
 vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$ und $d_1 = 0 \dots 1$.

Es ist dann

$$x_{3R} = d_1 + d_2, \quad (5.26)$$

und die Störungen d_1, d_2 werden beschrieben durch das Exosystem

$$\begin{aligned} \dot{d}_1 &= 0 \\ \dot{d}_2 &= \omega d_3 \\ \dot{d}_3 &= -\omega d_2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Damit wird das System (5.9) hier siebendimensional, es hat die Gestalt (5.18) mit der Matrix

$$\bar{A}(\xi, \sigma, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_1} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_2} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_3} & \beta / \hat{\alpha}_2(\xi) & 1/\tau & 1/\tau & 0 \\ -a_2(f_2)_{\xi_1} & -a_1 - a_2(f_2)_{\xi_2} & -a_2(f_2)_{\xi_3} & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Neben den Eigenwerten von (4.26) hat diese Matrix die drei zusätzlichen Eigenwerte $\lambda_5 = 0$, $\lambda_{6,7} = \pm i\omega$, somit kann auch hier die Abschätzung (4.28) übernommen werden. Das System (5.10) wird sechsdimensional, es hat die Gestalt (5.20) mit

$$\bar{B}(\xi, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} + K_1 & 0 & 0 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} + K_2 & 0 & 0 & 0 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} + K_3 & 1/\tau & 1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_5 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & K_6 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Wie bei den vorher betrachteten Szenarien kann man gemäß Strategie (c) die Werte für die Feedback-Koeffizienten $K_i(t) = K_i(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ zu einem geeignet gewählten Wert

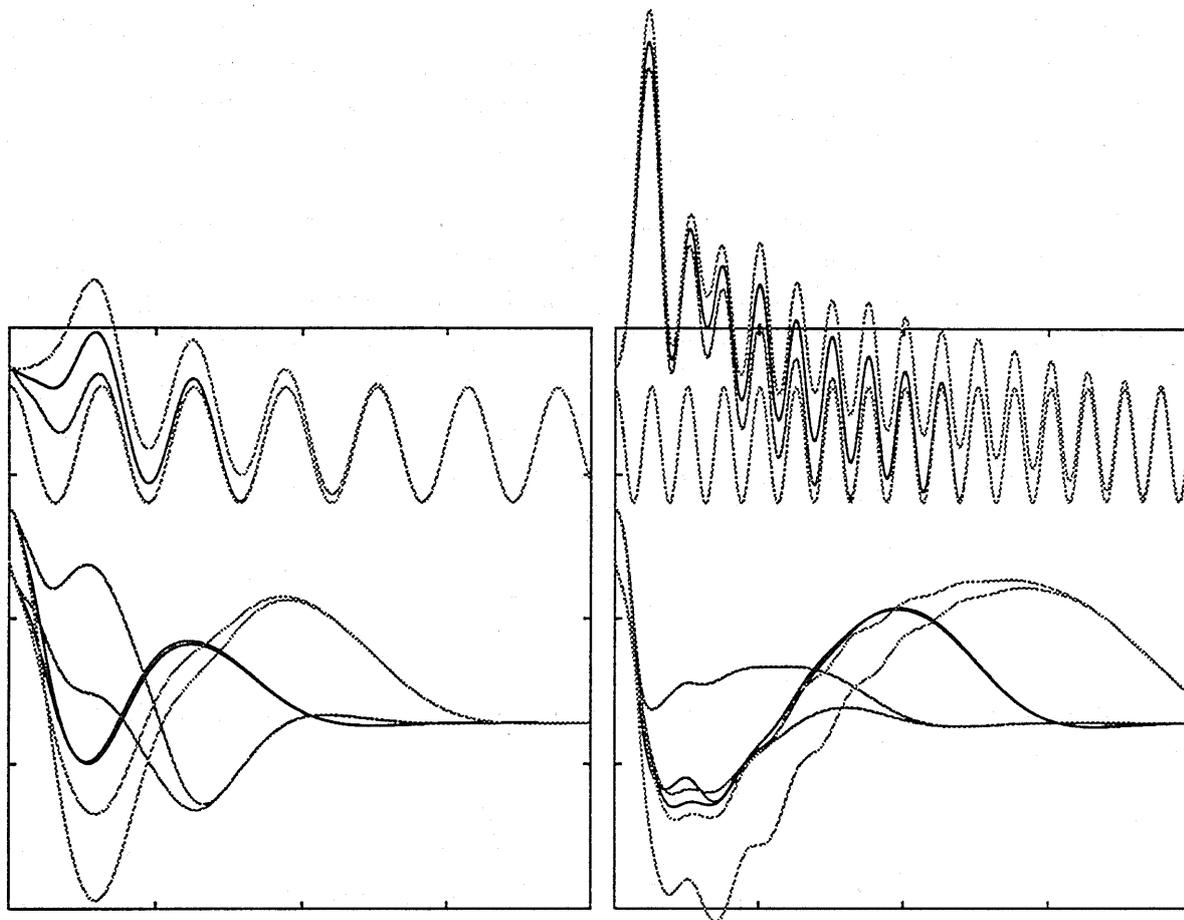


Abb. 11.
Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 $x_{3M} = 0.8$, $a = 0.1$, $\theta = 0$, $\omega = 0.02$.
Verlauf der Kurven $x_{3R}(t)$, $\hat{x}_{3R}(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
für $\bar{\lambda} = -0.013, -0.015, -0.018$.
Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$.
Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$ und $x_{3R} = 0 \dots 1$.

Abb. 12.
Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 $x_{3M} = 0.8$, $a = 0.1$, $\theta = 0$, $\omega = 0.05$.
Verlauf der Kurven $x_{3R}(t)$, $\hat{x}_{3R}(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
für $\bar{\lambda} = -0.016, -0.0171, -0.018$.
Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$.
Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$ und $x_{3R} = 0 \dots 1$.

$\bar{\lambda}$ nach der Ackermann-Formel berechnen. Dabei zeigt es sich, daß zusammen mit $\hat{\xi}(t)$ auch die Koeffizienten $K_i(t)$ für wachsendes t gegen stationäre Grenzwerte streben, d. h., daß sie in diesem Falle nicht explizit von den Störgrößen $\hat{d}(t)$ abhängen (die ihrerseits das ω -periodische Störregime (5.25) approximieren). Optimale $\bar{\lambda}$ -Werte können wieder durch Testrechnungen ermittelt werden, sie und auch die Sensitivität der Bewertungsgrößen hängen von den in (5.25) eingehenden Parametern x_{3M} , a , θ und ω ab. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen für $x_{3M} = 0.8$, $a = 0.1$, $\theta = 0$ die Übergangstrajektorien $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ und (darüber) die Störgrößen $x_{3R}(t)$ (periodisch!) und $\hat{x}_{3R}(t)$. In Abb. 11 ist $\omega = 0.02$ gewählt, die dargestellten Übergänge gehören zu den Werten $\bar{\lambda} = -0.013$ (langsame Konvergenz, großer Fehler), $\bar{\lambda} = -0.015$ (optimal) und $\bar{\lambda} = -0.018$ (schnelle Konvergenz, aber großer Fehler durch "peaking"). In Abb. 12 wurde die Frequenz der Störung auf $\omega = 0.05$ erhöht, die dargestellten Übergänge entsprechen den Werten $\bar{\lambda} = -0.016$, $\bar{\lambda} = -0.0171$ (optimal) und $\bar{\lambda} = -0.018$. Man erkennt, daß insbesondere die Approximation des schneller oszillierenden Störterms größere Schwierigkeiten bereitet. Für noch größere ω -Werte verkleinert sich das Intervall der brauchbaren $\bar{\lambda}$ -Werte weiter, gleichzeitig wächst der optimale $\bar{\lambda}$ -Wert an. Für $\omega = 0.07$ lag er bei $\bar{\lambda} = -0.0182$, für $\omega = 0.08$ bei $\bar{\lambda} = -0.0186$. Für $\omega = 0.1$ gelang es nicht, konvergente Übergänge zu realisieren.

Schließlich wurde als viertes Szenario der Fall einer periodischen Störung mit unbekannter Periode betrachtet. Es wurde angenommen, daß im Ansatz (5.25) die Amplitude a , die Phase θ und die Periode ω unbekannt sind (hingegen wurde, um die Situation nicht übermäßig zu komplizieren, der Mittelwert x_{3M} als bekannt angenommen). Es ist dann

$$x_{3R} = x_{3M} + d_2, \quad (5.30)$$

dabei wird die Störung d_2 erzeugt durch das nichtlineare Exosystem

$$\begin{aligned} \dot{d}_1 &= 0 \\ \dot{d}_2 &= d_1 d_3 \\ \dot{d}_3 &= -d_1 d_2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Damit wird, wie bei Szenario 3, das System (5.9) wieder siebendimensional, es hat hier die Gestalt (5.18) mit der Matrix

$$\bar{A}(\xi, \sigma, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_1} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_2} & (f_3 + \beta \hat{v})_{\xi_3} & \beta / \hat{\alpha}_2(\xi) & 0 & 1/\tau & 0 \\ -a_2(f_2)_{\xi_1} & -a_1 - a_2(f_2)_{\xi_2} & -a_2(f_2)_{\xi_3} & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Diese Matrix hat neben den Eigenwerten von (4.26) die drei zusätzlichen Eigenwerte $\lambda_5 = 0$, $\lambda_{6,7} = \pm i d_1$. Da λ_6 , λ_7 für jeden Wert von d_1 rein imaginär sind, kann auch hier die Abschätzung (4.28) übernommen werden. Das System (5.10) ist wieder sechsdimensional,

es hat die Gestalt (5.20) mit

$$\bar{B}(\xi, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} + K_1 & 0 & 0 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} + K_2 & 0 & 0 & 0 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} + K_3 & 0 & 1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_5 & d_3 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & K_6 & -d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Versucht man wieder, wie bei den vorher betrachteten Szenarien, Werte für die Feedback-Koeffizienten K_i nach der Ackermann-Formel zu berechnen, so stellt man fest, daß Strategie (c) hier ungeeignet ist: Das für $K_1 = \dots = K_6 = 0$ sich ergebende ungesteuerte System $\dot{\eta} = B_0 \eta$ mit

$$B_0 = B_0(\xi, d) = \begin{pmatrix} (f_1)_{\xi_1} & 0 & (f_1)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 \\ (f_2)_{\xi_1} & (f_2)_{\xi_2} & (f_2)_{\xi_3} & 0 & 0 & 0 \\ (f_3)_{\xi_1} & (f_3)_{\xi_2} & (f_3)_{\xi_3} & 0 & 1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

ist nicht mehr in jedem Punkt $(\xi, d) = (\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$, $t \geq 0$, der Trajektorie des Prozeßmodells vollständig beobachtbar. Für die Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix

$$Q_B = \begin{pmatrix} C \\ CB_0 \\ \vdots \\ CB_0^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

mit $C = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ ergibt sich (mit Maple [4]) ein Ausdruck der Gestalt

$$\det Q_B = -d_2 d_1^2 (c_1(\xi) + c_2(\xi) d_1^2 + c_3(\xi) d_1^4),$$

wobei die Werte der Koeffizienten $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$, $c_3(\xi)$ noch vom jeweils aktuellen Trajektorienpunkt $\xi = \hat{\xi}(t)$ abhängen. Die Determinante verschwindet folglich für $d_1 = 0$ (dies stört nicht übermäßig, weil eine periodische Störung mit der Periode $d_1 = \omega \neq 0$ approximiert werden soll) und für $d_2 = 0$ — und dies stört erheblich, weil die zu approximierende periodische Lösung die Gestalt $d_2(t) = a \cos(\omega t + \theta)$ hat und zu allen Zeitpunkten $t_k = t_0 + 2k\pi/\omega$, $k = 0, 1, \dots$, den Punkt $d_2 = 0$ erreicht. Die Ackermann-Formel ist nur in Punkten mit $\det Q_B \neq 0$ anwendbar. Sie liefert speziell für den Feedback-Koeffizienten K_6 einen Ausdruck der Form

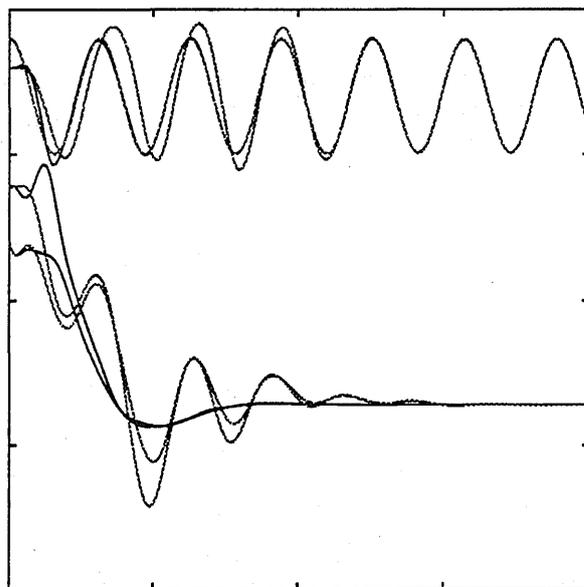
$$K_6(\xi, d) = - \frac{\bar{c}_1(\xi) + \bar{c}_2(\xi) d_1^2 + \bar{c}_3(\xi) d_1^4}{\det Q_B(\xi, d)},$$

das heißt, in einer Umgebung von $d_2 = 0$ ein lokales Verhalten der Gestalt $K_6 \approx \text{const}/d_2$ (Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $d_2 = 0$). Somit ist die Anwendung der Strategie (c) — laufende Neuberechnung der Werte $K_i = K_i(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ im jeweils aktuellen Punkt $(\hat{\xi}(t), \hat{d}(t))$ der Trajektorie des Prozeßmodells — hier nicht möglich.

Für Beispielrechnungen wurde daher auf Strategie (a) zurückgegriffen. Optimale $\bar{\lambda}$ -Werte wurden wieder durch Testrechnungen ermittelt. Es zeigte sich, daß, wie schon in Szenario 3, die Güte der Approximation wesentlich von den Werten der zu approximierenden Parameter a , θ , ω abhängt; zusätzlich hatte auch die Wahl der Startwerte $\hat{d}_1(0)$, $\hat{d}_2(0)$, $\hat{d}_3(0)$ für die Trajektorie im Exosystemmodell einen erheblichen Einfluß.

Abb. 13 zeigt, wie Abb. 11, Übergangstrajektorien zu einer periodischen Störung (5.25) mit $a = 0.1$, $\theta = 0$, $\omega = 0.02$. Dabei ist jedoch der Wert von ω im Prozeßmodell nicht bekannt und wird erst im Lauf der Rechnung ermittelt ($\hat{d}_1(t) \rightarrow \omega$ für $t \rightarrow \infty$), hingegen wird der Wert von x_{3M} hier als bekannt angenommen (der Übergang von $x_{3M} = 0.8$ in Abb. 11 zu $x_{3M} = 0.85$ in Abb. 13 diente nur dazu, Überschneidungen zwischen den \hat{x}_2 - und \hat{x}_{3R} -Kurven in Abb. 13 zu vermeiden, er ist auf den qualitativen Verlauf der Kurven ohne Einfluß). Abb. 13 zeigt die Trajektorien $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ und (oben) die Störgrößen $x_{3R}(t)$ (periodisch!) und $\hat{x}_{3R}(t)$, und zwar für $\bar{\lambda} = -0.016$ (langsame Annäherung von $\hat{x}_{3R}(t)$ an $x_{3R}(t)$, als Folge starkes Oszillieren von $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ gegen die — in der Abbildung nicht dargestellte — Trajektorie $\bar{x}_2(t)$ des linearen Modells) und für $\bar{\lambda} = -0.023$ (schnelle Annäherung von $\hat{x}_{3R}(t)$ an $x_{3R}(t)$, gute Konvergenz von $x_2(t)$ und $\hat{x}_2(t)$).

Abb. 13.
Übergangstrajektorien
zum Steuergrößensprung $v = -0.05$.
 $x_{3M} = 0.85$, $a = 0.1$, $\theta = 0$, $\omega = 0.02$.
Verlauf der Kurven
 $x_{3R}(t)$, $\hat{x}_{3R}(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$
für $\bar{\lambda} = -0.016, -0.023$,
Strategie (a).
Startwerte:
 $\hat{x}_2(0) = \bar{x}_2(0) = 0.694$, $x_2(0) = 0.6$,
 $\hat{d}_1(0) = 0.01$, $\hat{d}_2(0) = 0.05$, $\hat{d}_3(0) = 0$.
Horizontal: $t = 0 \dots 2000$,
vertikal: $x_2 = 0 \dots 1$ und $x_{3R} = 0 \dots 1$.



6 Schlußbemerkungen

Hauptanliegen der im vorliegenden Bericht dargestellten Rechnungen war es, die Leistungsfähigkeit der in [11] dargestellten Methoden zur Konstruktion nichtlinearer Beobachter und zur Störgrößenkompensation im Fall des konkreten Problems der asymptotischen Input-Output-Linearisierung des durch die Gleichungen (2.5) beschriebenen nichtlinearen chemischen Reaktionssystems zu untersuchen. Dazu wurden nacheinander, jeweils parallel für eine allgemeine Klasse nichtlinearer Steuerungssysteme n -ter Ordnung und für das konkrete System (2.5), die exakte Input-Output-Linearisierung durch

Zustandsrückführung, die asymptotische Input-Output-Linearisierung durch Output-Feedback und Verwendung eines nichtlinearen Beobachters sowie, im gleichen Kontext, die Identifikation und Kompensation von Störgrößen betrachtet. Bezüglich des Systems (2.5) ergab sich unter anderem folgendes:

— Der Zustandsraum des Systems (2.5) ist dreidimensional, relevant für die Beschreibung der Reaktorkinetik ist der Bereich (2.8). In den Punkten der Fläche $\alpha_2(x) = 0$ (vgl. (2.6)) ist der relative Grad des Systems nicht definiert, in allen Punkten x mit $\alpha_2(x) \neq 0$ hat das System (2.5) den wohldefinierten relativen Grad $r = 2$. Die geometrische Gestalt der Fläche $\alpha_2(x) = 0$ wird beschrieben.

— Der stationäre Arbeitspunkt \hat{x}_S des Systems (gemäß Tabelle 1) liegt im Bereich $\alpha_2(x) > 0$. Er ist bereits ohne zusätzliche Steuerung asymptotisch stabil. Ziel der Steuerung ist nicht eine Änderung der Stabilitätseigenschaften dieses Punktes, sondern vielmehr eine Änderung der nichtlinearen Systemdynamik dahingehend, daß in einer Umgebung von \hat{x}_S (bei lokal unverändertem Stabilitätsverhalten) die Zustandsgröße x_2 (der zu regelnde Output) *linear* von einem neu einzuführendem Input v abhängt — bzw. daß bei einer sprunghaften Änderung dieses Inputs der Übergang der x_2 -Komponente in den neuen stationären Wert längs einer (vorgegebenden) Trajektorie eines *linearen* Systems erfolgt. Die Trajektorie dieses Übergangs muß vollständig im Innern des Bereiches $\alpha_2(x) > 0$ verlaufen.

— Dieses Ziel, die "exakte Input-Output-Linearisierung", kann mit einer *Zustandsrückführung* erreicht werden, solange die Steuergröße v im Intervall (3.42) liegt. Es existiert jeweils eine einparametrische Schar von möglichen Übergangstrajektorien. Für Abschätzungen der zugehörigen Parameterwerte σ siehe Abb. 2. Die Wahl $\sigma = 0$ ist i.a. nicht optimal, gewisse Übergänge sind nur mit $\sigma \neq 0$ zu realisieren, da nur dann Übergangstrajektorien existieren, die vollständig im Innern des Bereiches $\alpha_2(x) > 0$ verlaufen.

— Ist wegen fehlender Kenntnis der Werte einzelner Zustandsgrößen eine Zustandsrückführung nicht möglich, so kann das angestrebte Ziel der Input-Output-Linearisierung mit den in [11] dargestellten Methoden *asymptotisch* realisiert werden, sofern die Abweichungen der Startwerte des Prozeßmodells von denen des realen Prozesses hinreichend klein sind.

— Was bedeutet "*hinreichend klein*" im Fall eines konkreten gegebenen Systems? Die in Abschnitt 4.1 zitierten Aussagen aus [11] basieren auf der Untersuchung der linearisierten Variationsgleichungen längs Lösungen in der Mannigfaltigkeit $\Delta = 0$. Sie gelten für gegebenenfalls "große" Mengen W_0 von Anfangswerten x_0 des realen Systems, aber nur für Trajektorien mit $|\Delta(0)| \leq \kappa$, κ "hinreichend klein". Für konkrete nichtlineare Systeme lassen sich Zahlenwerte für κ aus Schranken für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der eingehenden Nichtlinearitäten berechnen. In der Diplomarbeit von C. Braun [3] wurde dies im Fall eines speziellen zweidimensionalen Systems aus der mathematischen Ökonomie explizit durchgeführt. Wir haben hier auf derartige Rechnungen verzichtet. Was schon in [3] festgestellt wurde, gilt auch hier: Die in dieser Weise berechneten Werte für κ sind so klein, daß sie für praktische Anwendungen in der Regel nutzlos sind; Rechnungen zeigen aber, daß die in der angegebenen Weise konstruierten nichtlinearen Beobachter oft auch dann noch konvergente Approximationen liefern, wenn die Anfangsabweichungen $|\Delta(0)|$ um drei oder vier Zehnerpotenzen größer sind als die Schranke κ .

— So ergaben beispielsweise Testrechnungen, daß die zur Berechnung der "Trajekto-

rie 1" aus Tabelle 2 (mit Startwert $\xi(0) = (-0.114, -0.095, 0)$) benutzte Vorgehensweise (Strategie (c), $\bar{\lambda} = -0.012$, vgl. Abb. 5b) auch für Startwerte mit $\xi_1(0) \in (-0.3, +0.29)$ oder $\xi_2 \in (-0.7, +0.3)$ oder $\xi_3 \in (-0.14, +0.06)$, d.h. für einen großen Teil des anwendungsrelevanten Bereiches des ξ -Zustandsraumes, konvergente Approximationen liefert.

— Beschränkungen für $|\Delta(0)|$ ergeben sich bei System (2.5) insbesondere aus der Tatsache, daß die Trajektorien den Bereich $\alpha_2 > 0$ nicht verlassen dürfen. Dies impliziert insbesondere, daß — wie in den Abschnitten 4 und 5 schon mehrfach betont wurde — es in diesem Fall nicht sinnvoll ist, die Zahl β in (4.16) viel größer als α wählen zu wollen: Durch zunehmendes "peaking" bei betragsmäßig großen negativen Eigenwerten werden die Chancen, im Bereich $\alpha_2 > 0$ zu verbleiben, immer kleiner. (Bei dem in [3] betrachteten System spielten derartige Überlegungen keine Rolle, das dort betrachtete System hatte in allen Punkten des Zustandsraumes den relativen Grad $r = 2$.)

— Das bisher Gesagte gilt in fast gleicher Weise auch für Störgrößenidentifikation und -kompensation. Auch hier ergeben sich in der Regel große Bereiche für die zulässigen Anfangsabweichungen $|\Delta_2(0)|$ (z.B. $d_1(0) \in (0.56, 1.0)$ in Szenario 1, $d_1(0) \in (0.7, 0.97)$ in Szenario 2).

— Dabei kann die "Freigabe" von Systemparametern als zusätzliche Steuergrößen zu Übergangstrajektorien mit geringeren Fehlern führen, vgl. Abb. 8.

— Auch bei der Kompensation periodischer Störungen mit unbekannter Periode (Szenario 4) bleibt das Verfahren einsetzbar. Allerdings hängt hier die Größe der zulässigen Bereiche für $|\Delta_1(0)|$, $|\Delta_2(0)|$ stark von den Werten der eingehenden Parameter ab.

Literatur

- [1] J. Birk, Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 294, VDI-Verlag, Düsseldorf 1992.
- [2] J. Birk and M. Zeitz, Computer aided design analysis of nonlinear observation problems. In: M. Fliess (ed.), Proceedings of the Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, June 24–26, 1992, pp. 251–256.
- [3] C. Braun, Zur Konstruktion nichtlinearer Beobachter. Diplomarbeit, Universität Würzburg 1993.
- [4] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, B.L. Leong, M.B. Monagan, and S.M. Watt, Maple V Library Reference Manual. Springer-Verlag, New York 1992.
- [5] D. Flockerzi, Invariant manifolds in nonlinear control theory. Vortrag, Oberwolfach März 1992.
- [6] E.D. Gilles und M. Friedrich, Prozeßführung zur Sicherung reproduzierbarer Qualität in der verfahrenstechnischen Produktion. Chem.-Ing.-Techn. 63 (1991), 910–918.
- [7] E.D. Gilles, M. Storz und M. Friedrich, Asymptotisch exakte Linearisierung des Ein-/Ausgangsverhaltens nichtlinearer Systeme. Universität Stuttgart, Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, Preprint, 1992.

- [8] J. Guckenheimer, M.R. Myers, F.J. Wicklin, and P.A. Worfolk, *dstool: A dynamical system toolkit with an interactive graphical interface*. Center for Applied Mathematics, Cornell University, Ithaca NY, 1992.
- [9] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin 1989.
- [10] C.S. Kahane, On the stability of solutions of linear differential systems with slowly varying coefficients. *Czech. Math. J.* 42 (1992), 715–726.
- [11] H.W. Knobloch, A. Isidori, and D. Flockerzi, *Topics in control theory*. DMV Seminar, Band 22, Birkhäuser Verlag, Basel 1993.
- [12] A.J. Krener, *Nonlinear systems toolbox*. In: *International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, Regensburg, August 2–6, 1993. Akademie Verlag Berlin (to appear).
- [13] H.J. Sussmann and P.V. Kokotovic, The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control* 36 (1991), 424–440.

Recent publications of the Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Preprints 1994

81. Klaus Fleischmann, Jean-François Le Gall: A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion.
82. Anton Bovier, Jean-Michel Ghez: Remarks on the spectral properties of tight binding and Kronig-Penney models with substitution sequences.
83. Klaus Matthes, Rainer Siegmund-Schultze, Anton Wakolbinger: Recurrence of ancestral lines and offspring trees in time stationary branching populations.
84. Karmeshu, Henri Schurz: Moment evolution of the outflow-rate from nonlinear conceptual reservoirs.
85. Wolfdietrich Müller, Klaus R. Schneider: Feedback stabilization of nonlinear discrete-time systems.
86. Gennadii A. Leonov: A method of constructing of dynamical systems with bounded nonperiodic trajectories.
87. Gennadii A. Leonov: Pendulum with positive and negative dry friction. Continuum of homoclinic orbits.
88. Reiner Lauterbach, Jan A. Sanders: Bifurcation analysis for spherically symmetric systems using invariant theory.
89. Milan Kučera: Stability of bifurcating periodic solutions of differential inequalities in \mathbb{R}^3 .
90. Peter Knabner, Cornelius J. van Duijn, Sabine Hengst: An analysis of crystal dissolution fronts in flows through porous media Part I: Homogeneous charge distribution.
91. Werner Horn, Philippe Laurençot, Jürgen Sprekels: Global solutions to a Penrose-Fife phase-field model under flux boundary conditions for the inverse temperature.
92. Oleg V. Lepskii, Vladimir G. Spokoiny: Local adaptivity to inhomogeneous smoothness. 1. Resolution level.
93. Wolfgang Wagner: A functional law of large numbers for Boltzmann type stochastic particle systems.

94. Hermann Haaf: Existence of periodic travelling waves to reaction–diffusion equations with excitable–oscillatory kinetics.
95. Anton Bovier, Véronique Gayraud, Pierre Picco: Large deviation principles for the Hopfield model and the Kac–Hopfield model.
96. Wolfgang Wagner: Approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models.
97. Anton Bovier, Véronique Gayraud, Pierre Picco: Gibbs states of the Hopfield model with extensively many patterns.
98. Lev D. Pustyl’nikov, Jörg Schmeling: On some estimations of Weyl sums.
99. Michael H. Neumann: Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non–Gaussian time series.
100. Karmeshu, Henri Schurz: Effects of distributed delays on the stability of structures under seismic excitation and multiplicative noise.
101. Jörg Schmeling: Estimates of Weyl sums over subsequences of natural numbers.
102. Grigori N. Milstein, Michael V. Tret’yakov: Mean–square approximation for stochastic differential equations with small noises.
103. Valentin Konakov: On convergence rates of suprema in the presence of non–negligible trends.
104. Pierluigi Colli, Jürgen Sprekels: On a Penrose–Fife model with zero interfacial energy leading to a phase–field system of relaxed Stefan type.
105. Anton Bovier: Self–averaging in a class of generalized Hopfield models.
106. Andreas Rathsfield: A wavelet algorithm for the solution of the double layer potential equation over polygonal boundaries.
107. Michael H. Neumann: Bootstrap confidence bands in nonparametric regression.
108. Henri Schurz: Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise.
109. Gottfried Bruckner: On the stabilization of trigonometric collocation methods for a class of ill–posed first kind equations.