Was sind Zahlen?

Paradoxa mit reellen Zahlen.

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

25. Tag der Mathematik
30. April 2022, Freie Universität Berlin

Was sind Zahlen?

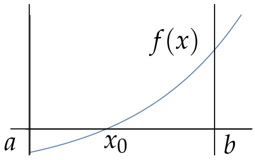
- Zahlen sind abstrakte mathematische Objekte,
  mit denen man rechnen kann.
- Was bedeutet rechnen?
  Rechnen bedeutet addieren und multiplizieren
  unter Beachtung von Rechengesetzen:
  Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz
- Weitere Gesetze, die wichtig aber oft unterschätzt werden:
  - $a < b, b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$
  - $a = b, b = c \quad \Longrightarrow \quad a = c$ (Was bedeutet Gleichheit?)

Zahlenbereichserweiterungen

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$.
  Gleichung $a + x = b$ nicht lösbar. $\Longrightarrow$ ganze Zahlen $\mathbb{Z}$.
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$.
  Gleichung $a \cdot x = b$ nicht lösbar $\Longrightarrow$ gebrochene Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Warum reichen die gebrochenen Zahlen nicht aus?
  Gebrochenen Zahlen sind dicht, aber lückenhaft.
  $x^2 = 2$ nicht lösbar. Braucht man dazu alle reellen Zahlen?
- algebraische Zahlen: Lösungen von Gleichungen der Form
  $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.
- weitere Zahlen: $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$
  einige spezielle, “abzählbar viele” Zahlen
- $x^2 = -1 \Longrightarrow$ komplexe Zahlen (sehr wichtig!)
- **Warum reelle Zahlen?**

Warum brauchen wir reelle Zahlen?

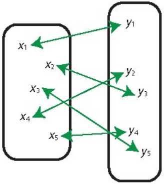
Wir wollen, dass jede Gleichung lösbar ist.
$f(a) < 0, f(b) > 0 \Longrightarrow \exists x_0$ mit $f(x_0) = 0$.
Zumindest für jede stetige Funktion f.



- Wir wollen, dass jeder Punkt auf der Geraden eine Zahl ist.
- Identifizierung von Zahlen und Punkten.
- Prinzipiell andere "Erzeugung". (z.B. Dedekindsche Schnitte)
  Darstellung als unendlicher Dezimalbruch: Punkt $\longleftrightarrow$ Zahl
- Folgerungen: Stetige Funktionen (ε, δ–Zeugs)
- Frage: Wie viele neue Zahlen sind dazugekommen?

Wie viele Zahlen gibt es?

- Mächtigkeit = Anzahl der Elemente einer Menge
- Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge?
- $\mathbb{N}$ abzählbar viele natürliche Zahlen.
- Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine eineindeutige Abbildung gibt. Wenn nicht, ist eine Menge mächtiger.



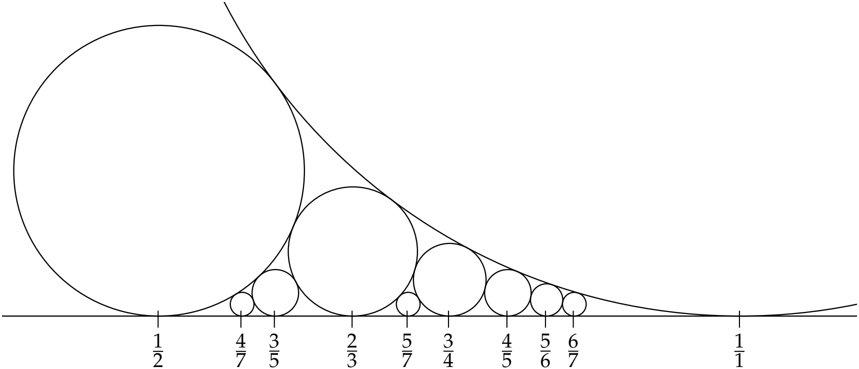
eineindeutige Funktion (umkehrbar)

- $\{1, 2, ...\} \longleftrightarrow \{0, 1, 2, ...\}$, $n \longleftrightarrow n + 1$
- $\{1, 2, 3, 4, ...\} \longleftrightarrow \{1, 4, 9, 16, ...\}$, $n \longleftrightarrow n^2$
- $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$?

Es gibt abzählbar viele gebrochene Zahlen

- Wir nummerieren die gebrochene Zahlen
- Darstellung als gemeinen Bruch: $r = p/q$ (nicht Dezimalbruch!)
- erste Zahlen: $0 = \mathbf{\frac{0}{1}}, 1 = \mathbf{\frac{1}{1}}$
- Neue Addition von Brüchen: $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mache $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
- nächste Zahlen: $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$
- nächste Zahlen: $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \mathbf{\frac{2}{3}}$
- nächste Zahlen: $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{4}}, \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{2}{5}}, \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{3}{5}}, \frac{2}{3} \oplus \frac{1}{1} = \mathbf{\frac{3}{4}}$
- Automatisch erhält man alle Brüche genau einmal!
- Addition $\oplus$ heisst *Mediant* oder *Chuquet-Mittel*.

Fordkreise



Zu einer rationalen Zahl a/b sei der Fordkreis $K(a/b)$ der Kreis der Ebene mit dem Mittelpunkt $(a/b, 1/(2b^2))$ und dem Radius $1/(2b^2)$

Wie viele reelle Zahlen gibt es in $[0,1]$?

- Darstellung als unendlicher Dezimalbruch: Punkt $\longleftrightarrow$ Zahl
- z.B. im Dualsystem $x = 0.011000101110... \in [0,1]$
- Jede Position ist eine natürliche Zahl.
  Wir merken uns die Positionen der Einsen.
- $x = 0.011000101110... \longleftrightarrow A = \{2,3,7,9,10,11,...\} \subset \mathbb{N}$
  Jeder Teilmenge der natürlichen Zahlen
  entspricht eine Dualzahldarstellung.
- Wie viele Teilmengen der natürlichen Zahlen gibt es?
  Gibt es abzählbar viele Teilmengen?

Die Menge aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X

Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen. Sehr viele! $X = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(X) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$

Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Menge ihrer Teilmengen.
Gibt es eine eineindeutige Zuordnung $X \longleftrightarrow \mathcal{P}(X)$? **Nein!**

Beweis (indirekt):

Angenommen $X \ni x \longleftrightarrow A_x \in \mathcal{P}(X)$.
2 Möglichkeiten: $x \in A_x$ oder $x \notin A_x$.
Es sei $B = \{x | x \notin A_x\} \in \mathcal{P}(X)$. $\overline{B} = X \setminus B \in \mathcal{P}(X)$
Es sei $y \longleftrightarrow B$ also $B = A_y$.
Frage: $y \in B$ oder $y \in \overline{B}$?
$y \in B \Longrightarrow y \notin B$, $y \notin B \Longrightarrow y \in B$. Widerspruch! $\square$

$\Longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X!

Besonderheiten der reellen Zahlen

- Eine Menge und die Menge ihrer Teilmengen sind völlig verschiedene Dinge!
- Reelle Zahlen sind überabzählbar viele.
  Die Mächtigkeit heisst *Kontinuum*.
- Der Wunsch, jedem Punkt eine Zahl zuzuordnen, hat die Menge der Zahlen extrem erweitert.
  Wir können sie nicht mal mehr abzählen.
- Warum ist es ein Unterschied,
  ob es überabzählbar viele Punkte
  oder überabzählbar viele Zahlen gibt?
  - Zahlen betrachten wir isoliert, konkret, diskret.
  - Ein Kontinuum betrachten wir als geometrisches Objekt oder als Bewegung.

Gleichheit und Ungleichheit reeller Zahlen

- Beispiel 1: $x = \sqrt{5}^{\sqrt{29}}$, $y = \sqrt{149}^{\sqrt{3}}$. Frage $x = y$?
  $x = 76.21392...$
  $y = 76.21395...$
- Beispiel 2: $x = \sqrt{2} - 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Frage $x = y$?
  $x = 0,41421\ldots$
  $y = 0,41421\ldots$
  Beweis, dass $x = y$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

- Beispiel 2: $x = \tan 7.5^\circ, \quad y = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2?$ $\quad x = y?$
  $x = y = 0.131652497...$ **Hausaufgabe**

Gleichheit und Ungleichheit reeller Zahlen

- Ungleichheit lässt sich mit dem Computer algorithmisch beweisen.
- Der Beweis von Gleichheit erfordert Kreativität.
- Alle Gleichungen lösen zu können, war ein Trugschluss.
  Wir können keine Probe machen!
  Numerische Lösung bedeutet Lösung in endlichen Dezimalbrüchen.
- Analog: Beweis von Gleichheit von Punkten im Dreieck.
  Punkte müssen als gleich definiert werden, z.B. Abstand $= 0$.

Reelle Zahlen und Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit beim Würfeln ist 1/6.

- Wahrscheinlichkeit beim Dodekaedern ist 1/12.

- Wahrscheinlichkeit beim Isokaedern ist 1/20.

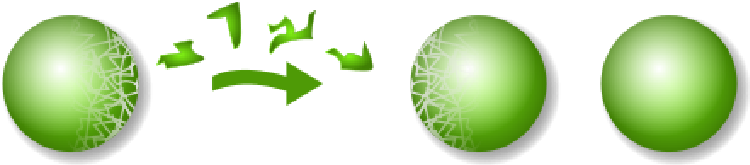
- Wahrscheinlichkeit beim Kugeln ist 0?

Reelle Zahlen und Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit = 0, aber das Ereignis ist möglich.
- Jedem Punkt eine Wahrscheinlichkeit zuordnen
- Unendlich viele Kugeln in einer Urne, jede hat eine Nummer 1,2,... und die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$. Summe ist 1.
- Ist es möglich, jedem Punkt auf der Kugel eine Wahrscheinlichkeit > 0 zuzuordnen? Nein!
  Theorem: Wenn die Summe einer Menge positiver Zahlen endlich ist, können es nur abzählbar viele Zahlen sein.

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Kugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden, aus denen sich zwei Kugeln jeweils von der Größe des Originals zusammensetzen lassen (Beweis mit Auswahlaxiom).



Dieses Paradoxon demonstriert:

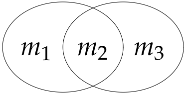
- Eine Kugel ist keine "Punktmenge".
- Mathematisches Volumen $\neq$ intuitives Volumen

Etwas Geschichte. Das Jahr der Zahlen

- Seit Urzeiten werden Zahlen erfolgreich angewendet.
- 2. Hälfte des 19.Jh. Ziel: Axiomatik des Zahlbegriffs.
- 1887 “das Jahr der Zahlen”
  - Helmholtz. Zählen und Messen. (Zahlen = physikalische Größen)
  - Dedekind. Was sind Zahlen. (Dedekindscher Schnitt; ε, δ-Begriffe)
  - Husserl. Über den Begriff der Zahl.
  - Kronecker. Über den Zahlbegriff.
- 1889 natürliche Zahlen (Peanoschen Axiome)

Reelle Zahlen als Meßergebnisse

- Helmholtz: Reelle Zahlen sind Meßergebnisse.
  Ein Meßinstrument ist ein Gerät, das “unendlich” exakt ist.
- Wir vergleichen mit einer Balkenwaage die Massen dreier Kugeln m_1, m_2 und m_3.
- Ergebnis: $m_1 = m_2$, $m_2 = m_3$. Folgt daraus $m_1 = m_3$?
- Nicht unbedingt: Bei Meßgenauigkeit von 0.5g: $m_1 \neq m_3$
  $m_1 = 5.1g,\ m_2 = 5.5g,\ m_3 = 5.9g.$
- Besser: Interpretation von Meßergebnissen
  als “Enthaltensein in offenen Mengen”.



$$m_1 = m_2,\ m_2 = m_3 \not\Longrightarrow m_1 = m_3$$

Zustände. Topologie. Offene Mengen. Stetige Funktionen

- Was sind physikalische Zustände?
  - Wir messen einen diskreten Wert, z.B. Würfel: 5
  - Wir messen eine Masse: 1.234 g
  - Warum können wir mit diesem Wert etwas anfangen?
  - Weil ähnliche Werte ähnliche Zustände bedeuten.
- Teilgebiet der Mathematik: Topologie
- Es seien $\mathcal{O}$ die Menge der offenen Mengen auf $[0, 1]$.
- Offenen Mengen sind alle offenen Intervalle und beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte davon.
- Es seien $\mathcal{O}$ die Menge der offenen Mengen auf $[0, 1]$.
  Definition: Eine Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ heisst stetig, wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ für alle $U \in \mathcal{O}$. In Worten:
  ... wenn das Urbild jeder offenen Menge eine offene Menge ist.
  ... wenn ähnliche $f(x)$ ähnliche x bedeuten.

Ausbildung am WIAS

- Beobachtung (empirische Feststellung):
  Nicht jeder Schüler, der gut in Mathe ist, will studieren.
- Das WIAS bildet Lehrlinge (Azubis) zum

  Mathematisch-technischen Softwareentwickler (MATSE)

  aus.
- Dreijährige duale Ausbildung:
  1 Woche Berufsschule, 2 Wochen Arbeit am WIAS
- Im Herbst beginnt die Bewerbungsphase für den neuen Ausbildungszyklus 2023-2026.
- Betrifft Schüler, die jetzt in der 11. Klasse sind.