

Nichts als die mathematische Wahrheit

HOLGER STEPHAN

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
10. Mai 2014

Anregungen zu folgenden Fragen

- ▶ Wie erlangt man mathematische Erkenntnisse?
- ▶ Ist das Experiment die Quelle physikalischer Erkenntnis?
- ▶ Hat sich die Natur an die Mathematik zu halten?
- ▶ Beschreibt die Mathematik die Natur nur näherungsweise?
- ▶ Hat die (mathematische) Erkenntnis Grenzen?

Wie stellen wir fest, daß eine Aussage wahr ist?

- ▶ Beispiel: Augenscheinlichkeit liefert Wahrheit.
Überprüfung der Aussagen anhand unmittelbarer Erfahrung.
Der Wahrheitsgehalt hängt ab von Raum und Zeit.
- ▶ Weitere Möglichkeit, die Wahrheit zu ermitteln:
Der mathematischer Beweis.
- ▶ Beispiel: Satz des ... Pythagoras.

Der Satz des Pythagoras

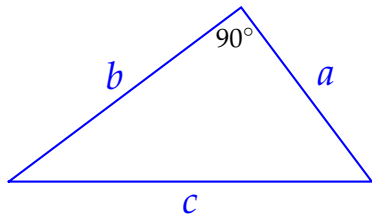
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

In Formeln:

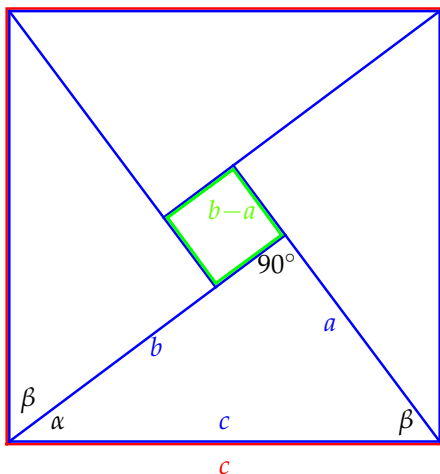
Katheten a und b

Hypotenuse c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Beweis des Satzes des Pythagoras



$$F_{\square} = 4 \cdot F_{\triangle} + F_{\square}$$

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b-a)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Beweis ist Folge aus
"Offensichtlichem":

- ▶ Winkelsumme im \triangle
- ▶ Flächeninhalt des \square
- ▶ Flächeninhalt ist additiv
- ▶ Binomische Formel

Der mathematische Beweis

- ▶ Der (zum Teil steinige) Weg zur mathematische Wahrheit
 - ▶ Man hat eine Vermutung (Behauptung).
 - ▶ Man sucht die tieferen Ursachen der Vermutung (Voraussetzungen).
 - ▶ Man sucht eine logische Schlußkette von den Voraussetzungen zur Behauptung. Das ist der mathematischen Beweis.
- ▶ Eigenschaften der mathematische Wahrheit
 - ▶ Jeder kann jeden Beweis jederzeit überprüfen.
 - ▶ Der Wahrheitsgehalt ist unabhängig von Raum und Zeit.
 - ▶ In der Mathematik gibt es keine Lügner.
 - ▶ In der Mathematik gibt es keine "Meinungen".
 - ▶ Die Wahrheit ist absolut (unveränderbar und ewig).

Galileo Galilei und der freie Fall

- ▶ Aristoteles:
Doppelt so schwere Körper fallen doppelt so schnell.
- ▶ Galilei (Benedetti): Alle Körper fallen gleich schnell.
- ▶ Der Beweis ist rein logisch, keine Experimente sind nötig.
- ▶ Beweis enthalten im Buch von Galileo Galilei:

“Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend”

Das perpetuum mobile

- ▶ Gibt es ein perpetuum mobile?
- ▶ Vermutung: Es gibt keins.
- ▶ Beweis der Nichtexistenz einer Sache durch Beobachtung?
- ▶ Woher stammt unser Wissen? Der Energieerhaltungssatz (mathematisch unter idealen Bedingungen hergeleitet)

Noch einmal: Freier Fall

- ▶ Die Mathematik sagt:
*Wenn die Geschwindigkeit nur von der Masse abhängt,
dann fallen alle Körper gleichschnell.*
- ▶ Idee für ein Experiment: Freier Fall im Vakuum.
Wenn es gelingt, solche Bedingungen zu schaffen, daß die
Geschwindigkeit nur von der Masse abhängt, dann kann sich
die Natur nicht anders verhalten als die Körper gleichschnell
fallen zu lassen. Überall, jederzeit.
- ▶ \implies Die Natur hat sich an die Mathematik zu halten.

Wir wollen eine Spielwürfel bauen

- ▶ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine Eins zu würfeln?
- ▶ Experimentell: 10000 Mal gewürfelt: 1638 Einsen.
- ▶ Grenzwert: $1638/10000 = 0.1638 \rightarrow 0.1667 = 1/6$?
- ▶ Der idealen Würfel: Alle Seiten gleichwahrscheinlich = $1/6$.
- ▶ Ist der ideale Würfel eine Näherung des realen oder umgekehrt?
- ▶ Um einen realen Würfel herzustellen, müssen wir den idealen Würfel verstehen und versuchen, ihm möglichst nahe zu kommen.
- ▶ Wenn die Wahrscheinlichkeit eines realen Würfels nicht genau $1/6$ ist, dann deshalb, weil wir dem Ideal nicht genügen konnten.

Grundlagenkrise der Mathematik (1903-1931)

- ▶ Immer mal wieder Krisen, z.B. irrationale Zahlen in der Antike
- ▶ Gödels Unvollständigkeitssätze (1931)
Erster Unvollständigkeitssatz:
Jedes ... formale Axiomensystem ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.
- ▶ Folge: Es gibt wahre Sätze, die man nicht beweisen kann.
- ▶ Heißt das, es gibt Grenzen der mathematischen Erkenntnis?
- ▶ Einfacheres Problem mit den selben Konsequenzen: ...

Das Barbier-Paradoxon

- ▶ Formales Axiomensystem:
Axiom 1: Der Barbier rasiert die und nur die, die sich nicht selbst rasieren.
- ▶ Frage: Wer rasiert den Barbier? Nicht beantwortbar:
 - ▶ Der Barbier rasiert sich selbst. – Weder wahr noch falsch.
 - ▶ Der Barbier rasiert sich nicht selbst. – Weder wahr noch falsch.
- ▶ Anderes formales Axiomensystem:
Axiom 1: Den Barbier rasiert der Nachbar.
Axiom 2: Bis auf sich selbst rasiert der Barbier alle, die sich nicht selbst rasieren.
- ▶ Frage: Wer rasiert den Barbier? Antwort: Der Nachbar.
- ▶ Erklärung: Das ursprüngliche formale System war zur Beantwortung der Frage ungeeignet.

Antwort auf die Fragen

- ▶ Wie erlangt man mathematische Erkenntnisse?
Durch logische Schlüsse (mathematischer Beweis).
- ▶ Ist das Experiment die Quelle physikalischer Erkenntnis?
Nein. Mathematische Beweise sind die Quelle physikalischer Erkenntnis. Das Experiment bestätigt/falsifiziert die Theorie.
- ▶ Beschreibt die Mathematik die Natur nur näherungsweise?
Nein. Die Erkenntnis der idealen mathematischen Wahrheit ist Voraussetzung für das kreative Handeln des Menschen.
- ▶ Hat sich die Natur an die Mathematik zu halten?
Jein. Der mathematische Beweis ist ein Abbild der Naturgesetze. Genau wie Augenscheinlichkeit ein Abbild der Realität ist.
- ▶ Hat die mathematische Erkenntnis Grenzen?
Nein, nicht das ich wüßte.
Auf jede Frage, geben Natur und Mathematik eine Antwort.