

Chaos und ŠARKOVSKIĀS Anordnung der natürlichen Zahlen*

ALEXANDER MIELKE

Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Die Theorie der Dynamischen Systeme geht zurück auf die bahnbrechenden Arbeiten von H. POINCARÉ im ausgehenden 19. Jahrhundert. Er hat damals die vom schwedischen König Oscar II. gestellte Preisfrage “Ist das Sonnensystem stabil?” untersucht. Auch wenn er die Antwort nicht endgültig gegeben hat, so hat er doch damals schon chaotisches Verhalten erahnt. Allerdings schlummerte dieses Gebiet noch weitere 60 Jahre, bis es durch S. SMALE wieder neuen Schwung bekam. Daraus entstand ein bis heute aktuelles mathematisches Forschungsgebiet, das viele Anwendungen hat. Eine spannende Beschreibung dieser Entwicklungen findet sich in [DH96].

Hierbei tritt die grundlegende Frage auf, in welchem Sinne ein rein deterministisches System zufälliges, chaotisches Verhalten aufweisen kann. Wir wollen hier eine der vielen möglichen Antworten studieren, wobei wir uns von der Einfachheit und der Anschaulichkeit leiten lassen und nur die einfachsten nichttrivialen Fälle betrachten.

Der Zustand unseres dynamischen Systems sei durch eine reelle Variable x im Intervall $[0, 1]$ charakterisiert. Mittels einer Abbildung f des Intervalls in sich lässt sich aus x der Zustand im nächsten Zeitschritt als $f(x)$ berechnen. Durch die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ lässt sich die gesamte Zukunft vorausberechnen; es liegt also ein deterministisches System vor. Dennoch kann die Dynamik (d.h. die Folge x_0, x_1, x_2, \dots) sehr kompliziertes Verhalten aufweisen. Triviales Verhalten ergibt sich, wenn sich die Zustände einem festen Grenzwert annähern. Interessanter ist allerdings ist Fall, wenn sich ein periodisches oder gar chaotisches Verhalten einstellt.

Wir wollen hier diese Begriffe an ganz einfachen Modellen untersuchen, und zwar einerseits an stetigen Abbildungen eines Intervalls in sich selbst und andererseits an einem vereinfachten Modell des so genannten LORENZ-Attraktors, der als Modell zur Wetterbeschreibung vorgeschlagen wurde. Dabei wird es von Bedeutung sein, dass das Auftreten von bestimmten periodischen Zuständen in direktem Zusammenhang steht mit dem Auftreten von Chaos. Dies wird durch den Titel “*Period three implies chaos*” der Veröffentlichung [LY75] plakativ gemacht. Schon vorher hat A. ŠARKOVSKIĀ [Sa64] ein wesentlich detaillierteres Ergebnis bewiesen, das unter anderem besagt, dass aus der Existenz einer periodischen Lösung mit ungerader Periode bereits die Existenz periodischer Lösungen zu allen geraden Perioden und auch die Existenz chaotischer Lösungen folgt.

Wir zeigen hier, dass diese Zusammenhänge mittels einfacher mathematischer Hilfsmittel geführt werden können, die bereits in der Oberstufe des Gymnasiums zur Verfügung stehen. Dazu gehören der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, etwas Kombinatorik in endlichen, gerichteten Graphen und, falls vorhanden, ein wenig Matrizentheorie.

*Dieser Vortrag wurde auf dem “5. Forum zur Begabtenförderung in Mathematik, 3.–5. April 2003 in Stuttgart” gehalten und basiert teilweise auf [Mi90]. Erweiterte Textfassung vom 21. Oktober 2003

1. Periodische Orbits für Intervallabbildungen

Ein dynamisches System ist durch eine Zustandsmenge X und eine Abbildung f gegeben. Die diskrete Zeit wird durch die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ repräsentiert. Die rein deterministische Dynamik entsteht dadurch, dass sich der Zustand $x_{n+1} \in X$ des Systems zur Zeit $n+1$ durch f aus dem Zustand x_n zur Zeit n eindeutig ergibt:

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = \dots = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{(n+1)\text{-fach}}(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Der Zustand ist also für alle Zeiten durch den Anfangszustand $x_0 \in X$ festgelegt.

Hier betrachten wir nur den Fall, dass X ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Durch eine affine Transformation können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Intervall das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist. Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen liefert unser erstes Ergebnis.

Theorem 1 Jedes stetige $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt x , d.h., $x = f(x)$.

Beweis: Die stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - x$ erfüllt $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Der Zwischenwertsatz besagt, dass g wenigstens eine Nullstelle $x \in [0, 1]$ besitzt. Jede dieser Nullstellen ist ein Fixpunkt von f . ■

Da wir aber das Verhalten der Folge $x_n = f^n(x_0)$ betrachten wollen, interessieren wir uns auch für die Iterierten $f^n = f \circ \dots \circ f$, die wiederum stetige Funktionen von $[0, 1]$ in sich sind. Oft zeigt sich, dass f^n wesentlich mehr Fixpunkte hat als f .

Definition 2 Ein Punkt $x \in [0, 1]$ heißt **periodischer Punkt** für f mit **verallgemeinerter Periode** m , falls $f^m(x) = x$. Wir sagen, dass x die **Periode** (genauer: *minimale Periode*) k hat, falls $f^k(x) = x$ und $f^n(x) \neq x$ für $n = 1, \dots, k-1$ gilt. Wir nennen dann die Menge $O_k = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\} \subset [0, 1]$ einen **Orbit** mit Periode k .

Da ein periodischer Orbit mit Periode k aus genau k verschiedenen Punkten besteht, kann aus der Anzahl der Fixpunkte von f^k und der Anzahl der Fixpunkte von f^n für alle Teiler n von k die Anzahl der periodischen Orbits errechnet werden. Wir betrachten dazu das Beispiel $f_\mu : x \mapsto \mu x(1-x)$ mit $\mu = 3.9$, siehe Abb. 1.

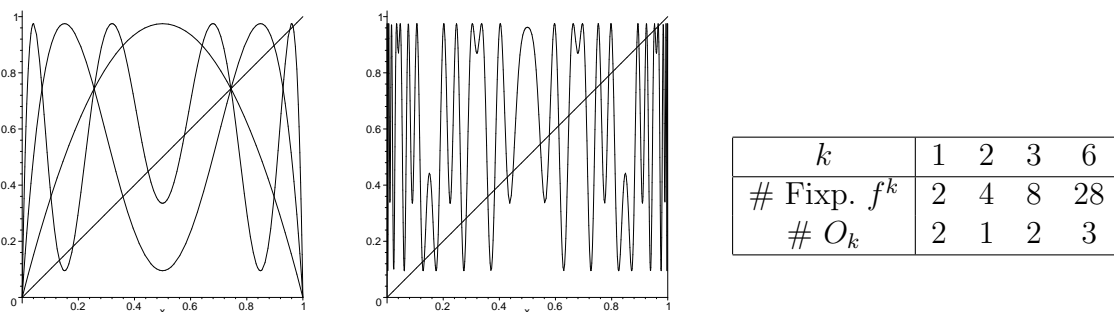


Abbildung 1: Intervallabbildung $f = f_{3.9} : x \mapsto 3.9x(1-x)$. Links: f, f^2, f^3 ; Mitte: f^6 .

Dabei sind Fixpunkte natürlich einfach als Schnittpunkte des Graphen mit der Winkelhalbierenden gegeben. Die Anzahl der Fixpunkte ist in obiger Tabelle angegeben. Für $k = 1$ gibt es zwei Fixpunkte, die zwei einelementige Orbits darstellen. Für f^2 erhalten

wir vier Fixpunkte, von denen zwei die Fixpunkte von f sind und die anderen beiden einen Orbit mit Periode 2 bilden. Entsprechend bilden die acht Fixpunkte von f^3 zwei echte Orbits der Periode 3 sowie die beiden Fixpunkte von f . Für $k = 6$ erhalten wir 28 Fixpunkte, von denen zwei Fixpunkte von f sind, zwei einen Orbit der Periode 2 bilden und sechs die zwei Orbits der Periode 3 sind. Es bleiben also $28 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 18$ Punkte übrig, um Orbits der (minimalen) Periode 6 zu bilden. Also sind es drei solche Orbits. Im Allgemeinen berechnet sich die Anzahl der periodischen Orbits wie folgt. Nennen wir F_k die Anzahl der Fixpunkte von f^k und N_k die Anzahl der Orbits mit Periode k , so kann N_k aus den F_m mit $m \leq k$ berechnet werden. Es gilt $N_1 = F_1$ und

$$N_k = \frac{1}{k} \left(F_k - \sum_{m \text{ teilt } k} m N_m \right) \quad \text{für } k \geq 2.$$

Es ergibt sich sogar eine Rechenkontrolle, da das Ergebnis stets ganzzahlig sein muss.

2. Überdeckungsgraphen und symbolische Dynamik

Wir können nun einen periodischen Orbit in der Form

$$O_k = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\} \quad \text{mit } 0 < y_0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < 1$$

schreiben, wobei $y_j = x_{\pi(j)}$ gilt und $\pi : \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ eine Permutation ist. Um aus der Existenz eines periodischen Orbits die Existenz weiterer periodischer Orbits schließen zu können, gehen wir wie folgt vor: Wir zerlegen das Intervall $[y_1, y_k]$ in die $k-1$ Teilintervalle

$$I_1 = [y_0, y_1], \quad I_2 = [y_1, y_2], \quad \dots, \quad I_{k-1} = [y_{k-2}, y_{k-1}].$$

Da die beiden Randpunkte des Teilintervalls I_j wieder auf zwei verschiedene Punkte des Orbits O_k abgebildet werden, überdeckt das Bild $f(I_j)$ wieder vollständig ein oder mehrere benachbarte Teilintervalle. Wir können daher einen Überdeckungsgraphen konstruieren, dessen Ecken genau die Teilintervalle I_1, \dots, I_{k-1} bilden und der genau m gerichtete Kanten von I_j nach I_n hat, wenn $f(I_j)$ das Intervall I_n genau m -mal überdeckt. Hierbei bedeutet m -fache Überdeckung von I_n durch I_j , dass I_j m Teilintervalle hat, deren Inneres paarweise disjunkt ist und deren Bild jeweils ganz I_n ist.

Wir nennen eine Folge $(I_{j_k})_{k=0, \dots, m}$ von Intervallen einen (erlaubten) **Pfad** im Überdeckungsgraphen, wenn für $k = 0, \dots, m-1$ ein Pfeil von I_{j_k} zu $I_{j_{k+1}}$ führt.

Entscheidend für die Existenz von periodischen Orbits für die Abbildung f sind nun die periodischen Pfade im Überdeckungsgraphen. Um das Abzählen der Pfade im Graphen etwas zu systematisieren, empfiehlt es sich, den Überdeckungsgraphen durch eine Matrix $A[f]$ mit $k-1$ Spalten und Zeilen darzustellen, wobei $A[f]_{n,j} = m \in \mathbb{N}$ gilt. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die zwei Beispiele in Abb. 2. Der Fall (a) zeigt einen Orbit der Periode 3 mit $x_0 = f^3(x_0) < x_1 = f(x_0) < x_2 = f^2(x_0)$. Damit wird $I_1 = [x_0, x_1]$ und $I_2 = [x_1, x_2]$ und der Einfachheit halber wurde angenommen, dass die Abbildung auf diesen Intervallen affin linear ist. Offensichtlich gilt nun $f(I_1) = I_2$ und $f(I_2) = [x_0, x_2] = I_1 \cup I_2$. Also überdeckt I_1 nur I_2 , während I_2 sich selbst und I_1 überdeckt. Der Überdeckungsgraph enthält also drei Pfeile und die Überdeckungsmatrix dreimal den Eintrag 1 und eine 0.

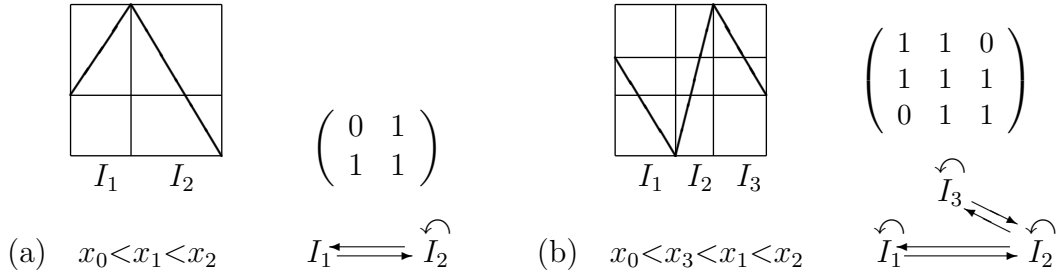


Abbildung 2: (a) Periode-3-Orbit, (b) Periode-4-Orbit

Der Fall (b) stellt einen Orbit der Periode 4 dar, der $x_0 = f^4(x_0) < x_3 = f^3(x_0) < x_1 = f(x_0) < x_2 = f^2(x_0)$ erfüllt. Auch hier wurde der Graph wieder als stückweise linear angenommen. Nun gilt $f(I_1) = I_1 \cup I_2$, $f(I_2) = [x_0, x_2] = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, und $f(I_3) = I_2 \cup I_3$.

Um die Existenz periodischer Orbits mit Periode m nachzuweisen, müssen wir die Fixpunkte von f^m studieren. Im Überdeckungsgraphen entspricht dies einem Studium der geschlossenen Pfade der Länge m . Um dies einzusehen, benutzen wir folgende einfache Regel, die wiederum aus dem Zwischenwertsatz folgt: Für jeden Pfad der Länge m im gerichteten Graphen des Überdeckungsgraphen, der das Anfangsintervall I_j mit dem Endintervall I_n verbindet, gibt es ein Teilintervall J des Startintervalls I_j , so dass f^m das Endintervall I_n überdeckt. Außerdem gilt für jedes $x \in J \subset I_j$, dass die Folge $f^n(x)$ genau gemäß des gegebenen Pfades durch den Überdeckungsgraphen wandert. Das folgende Ergebnis erhalten wir, indem wir wiederum den Zwischenwertsatz anwenden.

Lemma 3 *Zu jedem geschlossenen Pfad $(I_{j_k})_{k=0, \dots, m}$ (d.h., $I_{j_0} = I_{j_m}$) im Überdeckungsgraphen gibt es einen Punkt $x \in I_{j_0}$ mit $f^k(x) \in I_{j_k}$ für $k = 1, \dots, m$ und $f^m(x) = x$.*

Wir sprechen hier auch von **symbolischer Dynamik**, da die gesamte Dynamik der stetigen Funktion reduziert wurde auf die Pfade durch den Überdeckungsgraphen, dessen Ecken I_1, \dots, I_n die erlaubten Symbole darstellen.

Wir werden im Abschnitt 4 sehen, wie in einem konkreten Beispiel zu einer gegebenen Symbolfolge tatsächlich ein konkretes x konstruiert werden kann.

3. Existenz vieler periodischer Orbits

Offensichtlich können zu verschiedenen Pfaden nicht die gleichen Orbits gehören. Also liefert die Anzahl der geschlossenen Pfade der Länge m im Überdeckungsgraphen eine untere Schranke für die periodischen Punkte mit verallgemeinerter Periode m . Um die Anzahl der Pfade systematisch abzuzählen, bietet sich die Überdeckungsmatrix von f^m an, d.h. $A[f^m]$. Das Diagonalelement $A[f^m]_{i,i}$ liefert genau die Anzahl der geschlossenen Pfade der Länge m , die in I_i starten.

Es zeigt sich nun, dass $A[f^m]$ durch $A[f]$ nach unten abgeschätzt werden kann.

Lemma 4 *Ist $A[f]$ die Überdeckungsmatrix zu f , dann gilt für die Überdeckungsmatrix $A[f^m]$ von f^m bezüglich der gleichen Intervalle die elementweise Abschätzung*

$$A[f^m] \geq (A[f])^m \quad (\text{Matrizenpotenz}), \quad \text{d.h., } A[f^m]_{i,k} \geq ((A[f])^m)_{i,k}.$$

Um dieses Ergebnis zu erhalten, zeigen wir zunächst, dass die Überdeckungsmatrix einer Komposition $f_2 \circ f_1$ von zwei stetigen Abbildungen $f_1 : I \rightarrow I$ und $f_2 : I \rightarrow I$ die Abschätzung $A[f_2 \circ f_1] \geq A[f_2] A[f_1]$ erfüllt. Tatsächlich ergibt sich hier die Matrizenmultiplikation in natürlicher Weise. Die Überdeckungen von I_n durch I_j mittels der Abbildung $f_2 \circ f_1$ ergeben sich (mindestens) dadurch, dass I_j mittels f_1 ein Intervall I_l überdeckt, das dann wiederum I_n mittels f_2 überdeckt. Dabei ist natürlich über alle l zu summieren und die Vielfachheiten sind zu berücksichtigen:

$$A[f_2 \circ f_1]_{n,j} \geq \sum_{l=1}^{k-1} A[f_2]_{n,l} A[f_1]_{l,j}.$$

Anschließend folgt die Abschätzung $A[f^m] \geq (A[f])^m$ per Induktion.

Wir können nun eine Abschätzung für die Anzahl periodischer Punkte angeben, indem wir die Anzahl der Selbstüberdeckungen der Teilintervalle I_j , $j = 1, \dots, k-1$, betrachten. Im Überdeckungsgraphen entspricht das genau den geschlossenen Pfaden.

Theorem 5 *Die Anzahl der Punkte in $[0, 1]$, die bezüglich f die verallgemeinerte Periode m haben, lässt sich nach unten abschätzen durch*

$$\text{Spur}(A[f^m]) \geq \text{Spur}(A[f]^m) = (A[f]^m)_{1,1} + (A[f]^m)_{2,2} + \dots + (A[f]^m)_{k-1,k-1}.$$

Wie oben angedeutet, lässt sich daraus die Anzahl der periodischen Orbits berechnen. Für die Beispiele aus Abb. 2 ergibt sich durch Berechnen der Matrizenpotenzen A^k und Verwendung des Theorems 5 folgendes Ergebnis:

Minimale Anzahl N_k von Orbits mit Periode k :	Periode k	1	2	3	4	5	6	7	8
	N_k für (a)	1	1	1	1	2	2	4	5
	N_k für (b)	3	2	4	7	16	30	68	140

Dabei wurde die Formel für N_k am Ende des Abschnitts 1 mit $F_k = \text{Spur}(A^k)$ angewendet.

Im Falle (a) lässt sich A^k durch die Fibonacci-Zahlen \mathcal{F}_k , $k \in \mathbb{N}_0$, darstellen. Wir haben $\mathcal{F}_0 = 0$, $\mathcal{F}_1 = 1$, $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}$ für $n \geq 2$ und erhalten $A^k = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{k-1} & \mathcal{F}_k \\ \mathcal{F}_k & \mathcal{F}_{k+1} \end{pmatrix}$. Dies ergibt $F_k = \mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{F}_{k+1}$. Ist nun k eine Primzahl, so muss $\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{F}_{k+1} - 1$ durch k teilbar sein, damit N_k ganzzahlig ist.

ŠHARKOVSKIĬS Ergebnis beruht auf der oben entwickelten Theorie. Allerdings wird dort kein Wert darauf gelegt, die Anzahl der periodischen Orbits zu zählen. Es soll nur gezeigt werden, dass bestimmte Perioden auf jeden Fall mindestens einmal auftreten. Durch kombinatorische Überlegungen wird untersucht, wie viele Pfeile bei einem Überdeckungsgraphen zu einem Orbit mit Periode k mindestens existieren müssen. In diesen minimalen Graphen lassen sich geschlossene Pfade mit anderen Längen finden, was bedeutet, dass zwangsläufig auch andere Periodenlängen auftreten. Der folgende Satz gilt universell für **alle** stetigen Intervallabbildungen. Mittels des Symbols \triangleleft führen wir folgende Totalordnung auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_* = \{1, 2, \dots\}$ ein:

$$\begin{aligned} 1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2^p \triangleleft 2^{p+1} \triangleleft \dots \triangleleft 2^{q+1} \cdot 7 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 5 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^q \cdot 7 \triangleleft 2^q \cdot 5 \triangleleft 2^q \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3, \end{aligned}$$

d.h., $n=2^p(2k+1) \triangleleft m=2^q(2l+1)$, falls gilt: ($k=0$ und [$l>0$ oder $p<q$]) oder ($k>0$ und [$k>l>0$ oder $p>q$]).

Eine **Totalordnung** \trianglelefteq auf einer Menge A muss folgende Axiome erfüllen:

- Reflexivität: Für alle $a \in A$ gilt $a \trianglelefteq a$.
- Transitivität: Für alle $a_1, a_2, a_3 \in A$ impliziert $a_1 \trianglelefteq a_2$ und $a_2 \trianglelefteq a_3$, dass $a_1 \trianglelefteq a_3$ gilt.
- Antisymmetrie: Für alle $a_1, a_2 \in A$ impliziert $a_1 \trianglelefteq a_2$ und $a_2 \trianglelefteq a_1$, dass $a_1 = a_2$ gilt.
- Vergleichbarkeit: Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt entweder $a_1 \trianglelefteq a_2$ oder $a_2 \trianglelefteq a_1$.

Da jede natürliche Zahl in der obigen Auflistung genau einmal vorkommt, ist es klar, dass Šarkovskiis Anordnung eine Totalordnung auf \mathbb{N} liefert, wenn wir $n \trianglelefteq m$ definieren durch $n \triangleleft m$ oder $n = m$. Im Gegensatz zur klassischen Anordnung können nun aber zwischen zwei Zahlen unendlich viele andere Zahlen liegen.

Theorem 6 (ŠARKOVSKIĬ [Sa64]) *Hat eine beliebige stetige Intervallabbildung f einen Orbit der Periode m , dann hat f für jedes n mit $n \triangleleft m$ auch einen Orbit der Periode n .*

Insbesondere impliziert jede Periode mit einem ungeraden Teiler, dass unendlich viele weitere periodische Orbits existieren.

Für eine relativ elementare Darstellung eines vollständigen Beweises verweisen wir auf [De89, Ho94].

4. Chaotische Dynamik

Wir können mit obiger Technik auch unendlich lange Pfade im Graphen realisieren. Ist die Folge $(I_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $j_n \in \{1, \dots, k-1\}$ ein unendlich langer Pfad im Überdeckungsgraphen von f , dann gibt es mindestens einen Punkt $x \in I_{j_0}$, so dass $x_n = f^n(x) \in I_{j_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt einfach durch eine Grenzwertbetrachtung für immer länger werdende Pfade. Dazu verwenden wir, dass ein Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossener Intervalle, die geschachtelt sind, wenigstens einen Punkt enthält.

Ist nun aber die Überdeckungsmatrix nicht zu trivial, so gibt es auf manchen Ecken I_j eine Wahlmöglichkeit, d.h., es gehen mindestens zwei Pfeile von I_j aus. Wir können also zufällig entscheiden, wohin wir gehen. Falls wir immer wieder auf solche Intervalle gelangen, haben wir unendlich oft die Möglichkeit zufällig zu wählen. Dies scheint im Widerspruch dazu zu stehen, dass die Dynamik von f deterministisch ist. Allerdings wählen wir ja mit jeder Zufallsentscheidung eine andere Anfangsbedingung $x \in I$.

Damit lässt sich nun sehr einfach beweisen, dass “*Periode drei Chaos impliziert*”, siehe [LY75, GH83]. Zunächst ist klar, dass ein Orbit mit Periode 3 entweder die Form $x_0 < x_1 < x_2$ oder $x_0 < x_2 < x_1$ hat. In beiden Fällen ergibt sich der Überdeckungsgraph des Beispiels aus Abb. 2(a). Wir sehen, dass wir spätestens in jedem zweiten Schritt in I_2 sind und eine Münze werfen können. Wir erhalten folgendes Ergebnis:

Theorem 7 (Chaotische Lösungen) *Ist $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und besitzt einen Orbit der Periode 3, dann gibt es zu jeder zufälligen Münzwurffolge $w : \mathbb{N} \rightarrow \{W, Z\}$ (Wappen, Zahl) eine Anfangsbedingung $x_0 \in [0, 1]$, so dass die Folge $x_n = f^n(x_0)$ entsprechend durch I_1 und I_2 läuft, d.h., $x_n \in \hat{w}(n) \in \{I_1, I_2\}$ und die Folge \hat{w} ergibt sich aus w indem W durch I_2 und Z durch $I_1 I_2$ ersetzt wird.*

Wir wollen diese Wahlmöglichkeit des Anfangspunktes gemäß einer vorgegebenen symbolischen Folge anhand eines Beispiels verdeutlichen. Dazu betrachten wir die stetige Abbildung $\widehat{f} : x \mapsto 2 \min\{x, 1-x\}$ des Einheitsintervalls $I = [0, 1]$ in sich. Diese Abbildung hat bezüglich der Intervallunterteilung $I_1 = [0, 1/2]$ und $I_2 = [1/2, 1]$ folgenden Überdeckungsgraphen und -matrix:

$$\widehat{I}_1 \longleftrightarrow \widehat{I}_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit sind beliebige Pfade im Graphen erlaubt.

Mittels Dualentwicklung lässt sich \widehat{f} auch einfach darstellen. Für $y = \widehat{f}(x)$ gilt

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i 2^{-i} \text{ und } y = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i 2^{-i} \text{ mit } a_i, b_i \in \{0, 1\} \text{ und } b_i = \begin{cases} a_{i+1} & \text{für } a_1 = 0, \\ 1 - a_{i+1} & \text{für } a_1 = 1. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, dass jeweils die erste Dualziffer angibt, ob x in I_1 oder I_2 liegt. In jedem Iterationsschritt von $x_k = \widehat{f}^k(x_0)$ wird die erste Dualziffer gestrichen und die Folgenden rücken um eine Stelle auf, wobei negiert werden muss ($0 \leftrightarrow 1$), falls die erste Ziffer 1 war. Somit können wir aus der anfänglichen Ziffernfolge sofort schließen, welche Ziffer nach k Iterationen die erste sein wird. Es ist entweder a_{k+1} oder $1 - a_{k+1}$ je nachdem, wie oft negiert wurde.

Dieser Prozess lässt sich auch rückwärts durchführen, d.h., zu einem Pfad $(I_{j_n})_{k \in \mathbb{N}_0}$ lässt sich ein geeigneter Startwert $x \in I$ finden mit $\widehat{f}^n(x) \in I_{j_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Tatsächlich ist diese Richtung der Abbildung sehr einfach zu beschreiben. Zu einem Pfad $(I_{j_n})_{k \in \mathbb{N}_0}$ stellen wir die Dualziffernfolge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $c_n = j_n - 1$. Wir definieren nun

$$a_n = \begin{cases} c_0 & \text{falls } n = 1, \\ c_{n-1} & \text{falls } \sum_{j=0}^{n-1} c_j \text{ gerade ist,} \\ 1 - c_{n-1} & \text{falls } \sum_{j=0}^{n-1} c_j \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Als Beispiel betrachten wir den periodischen Pfad

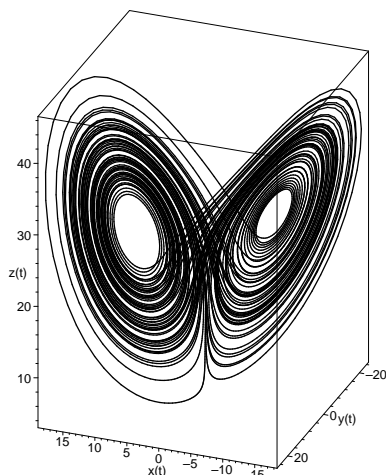
$$\underbrace{(I_1, I_1, I_2, I_2, I_2, I_1, I_1, I_1, I_2, I_1, I_1, I_2, I_2, I_2, I_1, I_1, I_1, I_2, \dots)},$$

der $(c_n) = \underbrace{(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)}$ und $(a_n) = \underbrace{(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots)}$ liefert. Als Startwert erhalten wir somit $x^* = \sum a_n 2^{-n} = 94/511$ und können bestätigen, dass der Orbit $(\widehat{f}^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$ tatsächlich den gewünschten Weg einhält.

Leider lässt sich die Zuordnung von einem Pfad auf eine Anfangsbedingung fast nie explizit angeben. Jedoch gibt es noch einen weiteren Fall, der in der quadratischen Funktion f_μ (siehe Abb. 1) auftritt, nämlich im Falle $\mu = 4.0$. Mittels der Koordinatentransformation $y = h(x) = (1 - \cos(\pi x))/2$ geht das dynamische System $x \mapsto \widehat{f}(x)$ in das dynamische System $y \mapsto f_{4.0}(y)$ über, denn $f_{4.0} = h \circ \widehat{f} \circ h^{-1}$. In unserem Beispiel folgt also, dass $y^* = h(x^*) \approx 0.0812$ den obigen periodischen Pfad bezüglich der Abbildung $f_{4.0}$ realisiert.

Mit dieser Konstruktionsvorschrift lässt sich prinzipiell zu jedem unendlich langen Pfad eine zugehörige Anfangsbedingung konstruieren. Um einen Pfad jedoch über lange Zeit mittels einer numerischen Rechnung genau verfolgen zu können, müssen wir die zugehörige Anfangsbedingung sehr genau berechnen und dürfen auch anschließend keine großen Rundungsfehler zulassen.

5. Chaos im LORENZ-Attraktor



Obige Techniken lassen sich, allerdings mit erheblichem mathematischen Aufwand, auf komplexere und praktisch relevantere Probleme anwenden. Der bekannteste Vertreter chaotischen Verhaltens ist wohl der LORENZ-Attraktor, der vom Atmosphärenforscher E.N. LORENZ [Lo63] in einem stark vereinfachten Wettermodell entdeckt wurde. Die Lösungen kreisen ein paar Mal rechts (Tiefdruckwetter: T) und ein paar Mal links (Hochdruckwetter: H), wobei sich die Anzahl der Umläufe sehr zufällig verhält. Dieses Modell wurde somit zum Paradigma der Schwierigkeiten bei der Wettervorhersage.

Mittels eines vereinfachten “Schmetterlingmodells”, siehe Abb. 3 (links), können wir uns diese Effekte klarmachen. Auf der Verbindungslinie der beiden Löcher entsteht wieder eine Intervallabbildung, die aber diesmal in einem Punkte U unstetig ist, siehe Abb. 3. Dennoch lassen sich nichttriviale Überdeckungsgraphen angeben, die die Existenz vieler periodischer Orbits und chaotischen Verhaltens implizieren [GH83]. Für die volle LORENZ-Gleichung wurde Chaos erst mittels Computereinsatz in [Tu02] nachgewiesen.

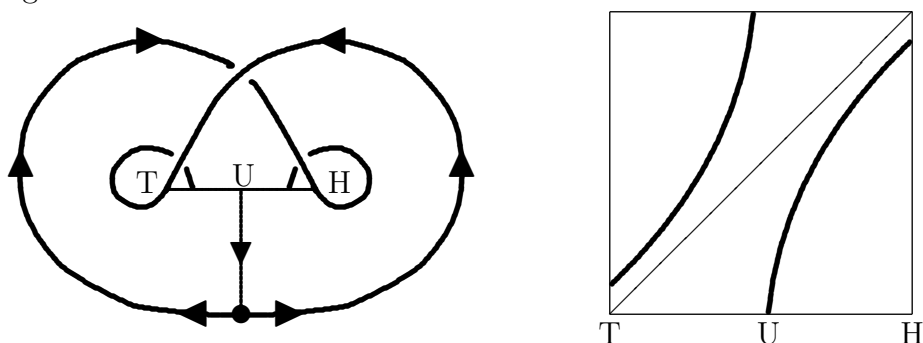


Abbildung 3: Schmetterlingmodell des LORENZ-Attraktors (links) und zugehörige Intervallabbildung (rechts)

Literatur

- [De89] R. L. DEVANEY. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989 (2. Aufl.).
- [DH96] F. DIACU, P. HOLMES. *Celestial Encounters*. Princeton University Press, 1996.
- [GH83] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Appl. Math. Sciences Vol. 42, Springer-Verlag, 1983.
- [Ho94] R.A. HOLMGREN. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Lo63] E.N. LORENZ. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmospheric Science* 20 (1963) 130–141.
- [LY75] T.-Y. LI, J.A. YORKE. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* 82 (1975) 985–992.
- [Mi90] A. MIELKE. Topological methods for discrete dynamical systems. *GAMM-Mitt.* 2 (1990) 19–37.
- [Sa64] A. ŠARKOVSKIĬ. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *Ukrain. Math. Zeit.* 16 (1964) 61–71.
- [Tu02] W. TUCKER. A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem. *J. Found. Comput. Math.* 2 (2002) 53–117.