

Chaos und ŠARKOVSKIĬs Anordnung der natürlichen Zahlen*

Alexander Mielke[†]

Die Theorie der Dynamischen Systeme geht zurück auf die bahnbrechenden Arbeiten von H. POINCARÉ im ausgehenden 19. Jahrhundert. Er hat damals die vom schwedischen König Oscar II gestellte Preisfrage “Ist das Sonnensystem stabil?” untersucht. Auch wenn er die Antwort nicht entgültig gegeben hat, so hat er doch damals schon chaotisches Verhalten erahnt. Allerdings schlummerte dieses Gebiet noch weitere 60 Jahre bis es durch S. SMALE wieder neuen Schwung bekam. Daraus entwickelte sich ein bis heute aktuelles mathematisches Forschungsgebiet, das viele Anwendungen hat.

Eine der wesentlichen Fragen, die hierbei auftritt, ist diejenige, in welchem Sinne ein rein deterministisches System zufälliges, chaotisches Verhalten aufweisen kann. Wir wollen hier eine der vielen möglichen Antworten studieren, wobei wir uns dabei von der Einfachheit und der Anschaulichkeit leiten lassen und nur die einfachsten nichtrivialen Fälle betrachten.

Der Zustand unseres dynamischen Systems sei durch eine reelle Variable x im Intervall $[0, 1]$ charakterisiert. Mittels einer Abbildung f des Intervalls in sich lässt sich aus x der Zustand im nächsten Zeitschritt als $f(x)$ berechnen. Durch die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ lässt sich also die gesamte Zukunft vorausberechnen. Es liegt also ein deterministisches System vor. Dennoch kann die Dynamik (d.h. die Folge $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$) sehr kompliziertes Verhalten aufweisen. Triviales Verhalten ergibt sich, wenn sich die Zustände einem festen Grenzwert annähern. Interessanter ist allerdings, wenn sich ein periodisches oder gar chaotisches Verhalten einstellt.

Wir wollen hier diese Begriffe an ganz einfachen Modellen untersuchen, und zwar einerseits an stetigen Abbildungen eines Intervalls in sich selbst und andererseits an einem vereinfachten Modell des so-geannten LORENZ-Attraktors, der als Modell zur Wetterbeschreibung vorgeschlagen wurde. Dabei wird es von Bedeutung sein, dass das Auftreten von bestimmten periodischen Zuständen in direktem Zusammenhang steht mit dem Auftreten von Chaos. Dies wird durch den Titel “*Period three implies chaos*” der Veröffentlichung [LY75] plakativ gemacht. Schon vorher hat A. ŠARKOVSKIĬ [Sa64] ein wesentlich detaillierteres Ergebnis bewiesen, das unter anderem besagt, dass aus der Existenz einer periodischen Lösung mit ungerader Periode bereits die Existenz periodischer Lösungen zu allen geraden Perioden und auch die Existenz chaotischer Lösungen folgt.

Wir zeigen hier, dass diese Zusammenhänge mittels einfacher mathematischer Hilfsmittel geführt werden können, die bereits in der Oberstufe des Gymnasiums zur Verfügung stehen. Dazu gehören der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, etwas Kombinatorik in endlichen, gerichteten Graphen und, falls vorhanden, ein wenig Matrizentheorie.

*Dieser Vortrag wurde auf dem “5. Forum zur Begabtenförderung in Mathematik, 3.–5. April 2003 in Stuttgart” gehalten und basiert teilweise auf [Mi90].

[†]Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung, Universität Stuttgart; 28. Januar 2003

1. Periodische Orbits für Intervallabbildungen

Ein dynamisches System ist durch eine Zustandsmenge X und eine Abbildung f gegeben. Die diskrete Zeit wird durch die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ repräsentiert. Die rein deterministische Dynamik entsteht dadurch, dass sich der Zustand $x_{n+1} \in X$ des Systems zur Zeit $n+1$ durch f aus dem Zustand x_n zur Zeit n eindeutig ergibt:

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = \dots = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{(n+1)\text{-fach}}(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Der Zustand ist also für alle Zeiten durch den Anfangszustand $x_0 \in X$ festgelegt.

Hier betrachten wir nur den Fall, dass X ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Durch eine affine Transformation können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Intervall das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist. Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen liefert unser erstes Ergebnis.

Theorem 1 Jedes stetige $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt x , d.h. $x = f(x)$.

Beweis: Die stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - x$ erfüllt $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Der Zwischenwertsatz besagt, dass g wenigstens eine Nullstelle $x \in [0, 1]$ besitzt. Jede solche Nullstelle ist ein Fixpunkt von f . ■

Da wir aber das Verhalten der Folge $x_n = f^n(x_0)$ betrachten wollen, interessieren wir uns auch für die Iterierten $f^n = f \circ \dots \circ f$, die wiederum stetige Funktionen von $[0, 1]$ in sich sind. Oft zeigt sich, dass f^n wesentlich mehr Fixpunkte hat als f .

Definition 2 Ein Punkt $x \in [0, 1]$ heißt *periodischer Punkt* für f mit *Periode* m , falls $f^m(x) = x$. Wir sagen, dass x die *minimale Periode* k hat, falls $f^k(x) = x$ und $f^n(x) \neq x$ für $n = 1, \dots, k-1$ gilt. Wir nennen dann die Menge $O_k = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\} \subset [0, 1]$ einen *Orbit* mit *Periode* k .

Da ein periodischer Orbit mit Periode k aus genau k verschiedenen Punkten besteht, kann aus der Anzahl der Fixpunkte von f^k und der Anzahl der Fixpunkte von f^n für alle Teiler n von k die Anzahl der periodischen Orbits errechnet werden. Wir betrachten dazu das Beispiel $f_\mu : x \mapsto \mu x(1-x)$ mit $\mu = 3.9$, siehe Abb. 1. Dabei sind Fixpunkte natürlich einfach als Schnittpunkte des Graphens mit der Winkelhalbierenden gegeben.

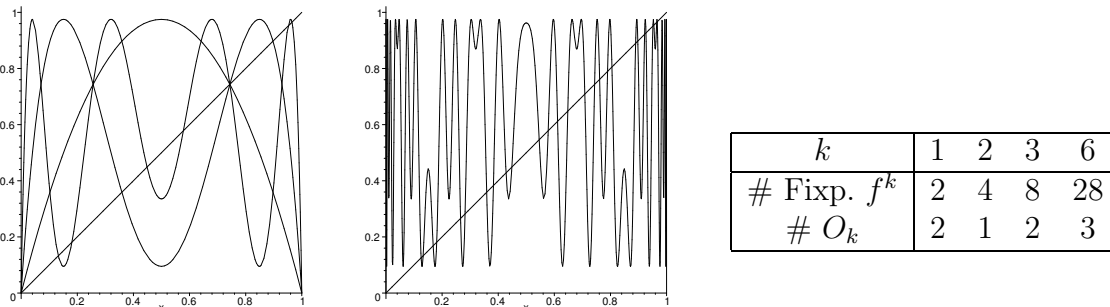


Abbildung 1: Die Intervallabbildung $f : x \mapsto 3.9x(1-x)$. Links: f, f^2, f^3 ; Mitte: f^6 .

2. Überdeckungsgraphen periodischer Orbits

Wir können nun einen periodischen Orbit in der Form

$$O_k = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\} \quad \text{mit } 0 < y_0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < 1$$

schreiben, wobei $y_j = x_{\pi(j)}$ gilt und $\pi : \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ eine Permutation ist. Um aus der Existenz eines periodischen Orbits die Existenz weiterer periodischer Orbits schließen zu können, gehen wir wie folgt vor: Wir zerlegen das Intervall $[y_1, y_k]$ in die $k-1$ Teilintervalle

$$I_1 = [y_0, y_1], \quad I_2 = [y_1, y_2], \quad \dots, \quad I_{k-1} = [y_{k-2}, y_{k-1}].$$

Da die beiden Randpunkte des Teilintervalls I_j wieder auf zwei verschiedene Punkte des Orbits O_k abgebildet werden, überdeckt das Bild $f(I_j)$ wieder vollständig ein oder mehrere benachbarte Teilintervalle. Wir können daher einen Überdeckungsgraphen konstruieren, dessen Ecken genau die Teilintervalle I_1, \dots, I_{k-1} bilden und der genau m gerichtete Kanten von I_j nach I_n hat, wenn $f(I_j)$ das Intervall I_n genau m -mal überdeckt. Der Überdeckungsgraph kann auch durch eine Matrix $A[f]$ mit $k-1$ Spalten und Zeilen dargestellt werden, wobei $A[f]_{n,j} = m \in \mathbb{N}$ gilt. Zwei Beispiele sind in Abb. 2 angegeben.

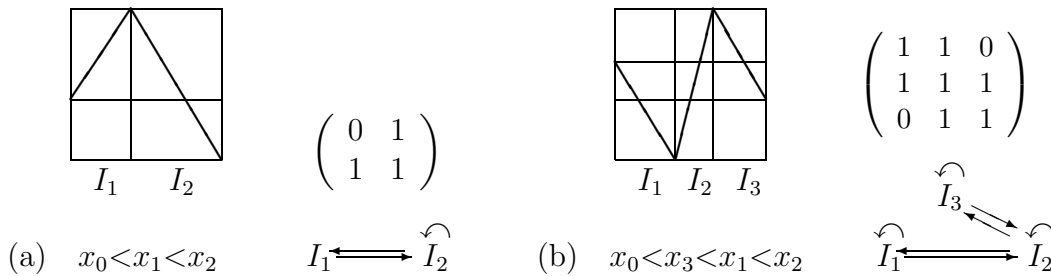


Abbildung 2: (a) Periode-3-Orbit, (b) Periode-4-Orbit

Wir wollen natürlich f^m studieren und die zugehörige Überdeckungsmatrix $A[f^m]$. Dazu gibt es nun folgende einfache Regel, die wiederum aus dem Zwischenwertsatz folgt: Für jeden Pfad der Länge m im gerichteten Graphen des Überdeckungsgraphen, der den Pfeilrichtungen folgt und das Anfangsintervall I_j mit dem Endintervall I_n verbindet, gibt es ein Teilintervall des Startintervalls I_j , so dass f^m das Endintervall I_n überdeckt. Als Konsequenz ergibt sich folgende Abschätzung.

Lemma 3 *Ist $A[f]$ die Überdeckungsmatrix zu f , dann gilt für die Überdeckungsmatrix $A[f^m]$ von f^m bezüglich der gleichen Intervalle die elementweise Abschätzung*

$$A[f^m] \geq A[f]^m \quad (\text{Matrizenpotenz}), \quad \text{d.h. } A[f^m]_{i,k} \geq (A[f]^m)_{i,k}.$$

In den nächsten zwei Abschnitten ziehen wir aus dieser Theorie zwei weit reichende Folgerungen. Wir geben Abschätzungen für die Minimalanzahl periodischer Orbits an und wir konstruieren chaotische Lösungen.

3. Existenz vieler periodischer Orbits

Wir können eine Abschätzung für die Anzahl periodischer Punkte angeben, indem wir die Anzahl der Selbstüberdeckungen der Teilintervalle betrachten. Im Überdeckungsgraphen entspricht das genau den geschlossenen Wegen.

Theorem 4 Die Anzahl der Punkte in $[0, 1]$, die bezüglich f die Periode m haben, lässt sich nach unten durch

$$\text{Spur}(A[f]^m) = (A[f]^m)_{1,1} + (A[f]^m)_{2,2} + \dots + (A[f]^m)_{k-1,k-1}$$

abschätzen.

ŠHARKOVSKIĀS Ergebnis beruht auf der oben entwickelten Theorie. Durch kombinatorische Überlegungen wird untersucht, wieviele Pfeile bei einem Überdeckungsgraphen zu einem Orbit mit Periode k mindestens existieren müssen. Aus diesem minimalen Graphen lassen sich geschlossene Pfade mit anderen Längen finden, was bedeutet, dass zwangsläufig auch andere Periodenlängen auftreten. Der folgende Satz gilt universell für ALLE stetigen Intervallabbildungen. Mittels des Symbols \triangleleft führen wir folgende Totalordnung auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_* = \{1, 2, \dots\}$ ein:

$$\begin{aligned} 1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2^p \triangleleft 2^{p+1} \triangleleft \dots \triangleleft 2^{q+1} \cdot 7 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 5 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^q \cdot 7 \triangleleft 2^q \cdot 5 \triangleleft 2^q \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3, \end{aligned}$$

d.h., $n=2^p(2k+1) \triangleleft m=2^q(2l+1)$, falls gilt: ($k=0$ und [$l>0$ oder $p<q$]) oder ($k>0$ und [$k>l>0$ oder $p>q$]).

Theorem 5 (ŠARKOVSKIĀ [Sa64]) Hat eine beliebige stetige Intervallabbildung f einen Orbit der Periode m , dann hat f für jedes n mit $n \triangleleft m$ auch einen Orbit der Periode n .

Insbesondere impliziert jede Periode mit einem ungeraden Teiler, dass unendlich viele weitere periodische Orbits existieren.

Für einen vollständigen Beweis verweisen wir auf [BG*80].

4. Chaotische Dynamik

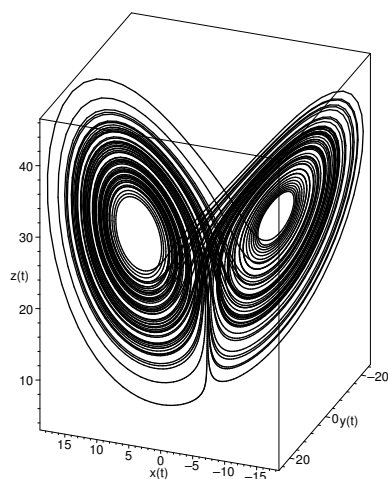
Wir können mit obiger Technik auch unendliche lange Wege im Graphen realisieren. Ist die Folge $(I_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $j_n \in \{1, \dots, k-1\}$ ein unendlich langer erlaubter Weg im Überdeckungsgraphen von f , dann gibt es einen Punkt $x \in I_{j_0}$, so dass $x_n = f^n(x_0) \in I_{j_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt einfach durch eine Grenzwertbetrachtung für immer länger werdende Pfade.

Ist nun aber der Überdeckungspfad nicht zu trivial, so gibt es auf manchen Ecken I_j eine Wahlmöglichkeit, d.h. es gehen mindestens zwei Pfeile von I_j aus. Wir können also zufällig entscheiden, wohin wir gehen. Falls wir immer wieder auf solche Intervalle gelangen, haben wir unendlich oft die Möglichkeit zufällig zu wählen. Dies scheint im Widerspruch dazu zu stehen, dass die Dynamik von f deterministisch ist. Allerdings wählen wir ja mit jeder Zufallsentscheidung eine andere Anfangsbedingung.

Damit lässt sich nun sehr einfach beweisen, “Periode drei Chaos impliziert”, siehe [LY75, GH83]. Zunächst ist klar, dass ein Orbit mit Periode 3 entweder die Form $x_0 < x_1 < x_2$ oder $x_0 < x_2 < x_1$ hat. In beiden Fällen ergibt sich der Überdeckungsgraph des Beispiels aus Abb. 2(a). Wir sehen, dass wir spätestens in jedem zweiten Schritt in I_2 sind und eine Münze werfen können. Wir erhalten folgendes Ergebnis.

Theorem 6 (Chaotische Lösungen) Ist $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und besitzt einen Orbit der Periode 3, dann gibt es zu jeder zufälligen Münzwurffolge $w : \mathbb{N} \rightarrow \{W, Z\}$ (Wappen, Zahl) eine Anfangsbedingung $x_0 \in [0, 1]$, so dass die Folge $x_n = f^n(x_0)$ entsprechend durch I_1 und I_2 läuft, d.h., $x_n \in \hat{w}(n) \in \{I_1, I_2\}$ und die Folge \hat{w} ergibt sich aus w indem W durch I_2 und Z durch $I_1 I_2$ ersetzt wird.

5. Chaos im LORENZ–Attraktor



Obige Techniken lassen sich, allerdings mit erheblichem mathematischen Aufwand, auf komplexere und praktisch relevantere Probleme anwenden. Der bekannteste Vertreter chaotischen Verhaltens ist wohl der LORENZ–Attraktor, der vom Atmosphärenforscher E.N. LORENZ [Lo63] in einem stark vereinfachten Wettermodell entdeckt wurde. Die Lösungen kreisen ein paarmal rechts (Tiefdruckwetter: T) und ein paarmal links (Hochdruckwetter: H), wobei sich die Anzahl der Umkreisungen sehr zufällig verhält. Dieses Modell wurde somit zum Paradigma der Schwierigkeiten bei der Wettervorhersage.

Mittels eines vereinfachten “Schmetterlingmodells”, siehe Abb. 3 (links), können wir uns diese Effekte klarmachen. Auf der Verbindungslinie der beiden Löcher entsteht wieder eine Intervallabbildung, die diesmal aber unstetig ist, siehe Abb. 3 (rechts). Dennoch lassen sich nichttriviale Überdeckungsgraphen angeben, die die Existenz vieler periodischer Orbits und chaotischen Verhaltens implizieren [GH83]. Für die volle LORENZ–Gleichung wurde Chaos erst mittels Computereinsatz in [Tu02] nachgewiesen.

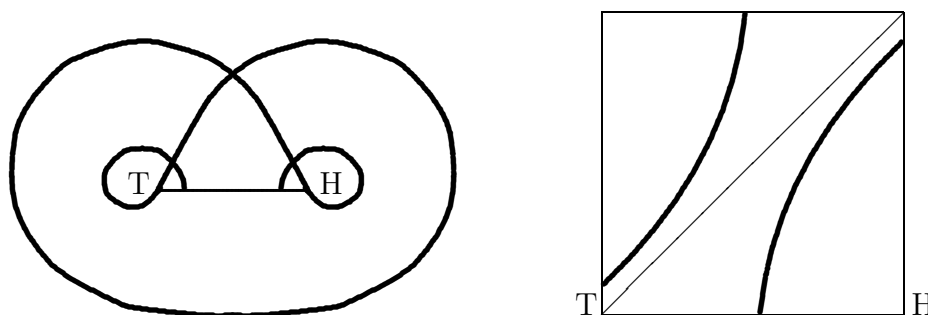


Abbildung 3: Schmetterlingmodell des LORENZ–Attraktors (links) und zugehörige Intervallabbildung (rechts)

- [BG*80] L. BLOCH, J. GUCKENHEIMER, M. MISIUREWICZ, L.S. YOUNG. Periodic points and topological entropy in one–dimensional maps. In “Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics Vol. 819, Springer–Verlag 1980”, pp. 18–34.
- [GH83] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer–Verlag, 1983. Appl. Math. Sciences Vol. 42.
- [Lo63] E.N. LORENZ. Deterministic non–periodic flow. *J. Atmospheric Science* 20 (1963) 130–141.
- [LY75] T.–Y. LI, J.A. YORKE. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* 82 (1975) 985–992.
- [Mi90] A. MIELKE. Topological methods for discrete dynamical systems. *GAMM–Mitt.* 2 (1990) 19–37.
- [Sa64] A. ŠARKOVSKIĀ. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *Ukrain. Math. Zeit.* 16 (1964) 61–71.
- [Tu02] W. TUCKER. A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem. *J. Found. Comput. Math.* 2 (2002) 53–117.